

Aufgaben zu Quadratischen Funktionen

Inhaltsverzeichnis

0.1	QUADFKT-01a	3
0.2	QUADFKT-01b	5
0.3	QUADFKT-01c	7
0.4	QUADFKT-01d	9
0.5	QUADFKT-02	11
0.6	QUADFKT-03	13
0.7	QUADFKT-04	14
0.8	QUADFKT-05a	15
0.9	QUADFKT-05b	16
0.10	QUADFKT-06	17
0.11	QUADFKT-07	20
0.12	QUADFKT-08	22
0.13	QUADFKT-09	24
0.14	QUADFKT-10	26
0.15	QUADFKT-11	27
0.16	QUADFKT-12	28
0.17	QUADFKT-13	29
0.18	QUADFKT-14	30
0.19	QUADFKT-15a	31
0.20	QUADFKT-15b	32
0.21	QUADFKT-15c	33
0.22	QUADFKT-16a	34
0.23	QUADFKT-16b	35
0.24	QUADFKT-17	36
0.25	QUADFKT-18	37
0.26	QUADFKT-19	38
0.27	QUADFKT-19b	39
0.28	QUADFKT-20	40
0.29	QUADFKT-21	41
0.30	QUADFKT-22	42
0.31	QUADFKT-23	43
0.32	QUADFKT-24	45
0.33	QUADFKT-25	46
0.34	QUADFKT-26	47
0.35	QUADFKT-27	48
0.36	QUADFKT-28	49
0.37	QUADFKT-29	51
0.38	QUADFKT-31	53
0.39	QUADFKT-32	55

0.40	QUADFKT-33	56
0.41	QUADFKT-34a	57
0.42	QUADFKT-34b	59
0.43	QUADFKT-35	61
0.44	QUADFKT-36	62
0.45	QUADFKT-37	64
0.46	QUADFKT-38	65
0.47	QUADFKT-39	67
0.48	QUADFKT-40	68
0.49	QUADFKT-41	69
0.50	QUADFKT-42	70
0.51	QUADFKT-43	71
0.52	QUADFKT-44	73
0.53	QUADFKT-45	75
0.54	QUADFKT-46	77
0.55	QUADFKT-47	79

0.1 QUADFKT-01a

Der Funktionsgraph einer Quadratischen Funktion f hat den Scheitelpunkt $S(4|-2)$ und verläuft durch den Punkt $P(2|6)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ und ihre Nullstellen!

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunkform** der Quadratischen Funktion an. Bekanntlich lautet die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Diese Formel wird nun angewendet und die Koordinaten von S werden für x_s und y_s eingesetzt:

$$f(x) = a \cdot (x - 4)^2 - 2 \quad (4)$$

Es fehlt nur noch der Formfaktor a . Den erhalte ich, indem ich die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung einsetze.

$$\begin{array}{rclcl} f(2) & = & 6 & & (1) \\ a \cdot (2 - 4)^2 - 2 & = & 6 & & (1) \\ a \cdot 4 - 2 & = & 6 & | + 2 & (1) \\ 4a & = & 8 & | : 4 & (1) \\ a & = & 2 & & (1) \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 4)^2 - 2 \quad \text{oder ausmultipliziert:} \quad f(x) = 2x^2 - 16x + 30 \quad (1)$$

Anmerkung: Ein Ausmultiplizieren der Klammer ist eigentlich nicht erforderlich. Nur dann, wenn man zur Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel gemäß Lösungsvariante 2 arbeiten möchte, braucht man diese Form.

Zur Nullstellenbestimmung wird der Funktionsterm gleich 0 gesetzt.

Nullstellenbestimmung, 1. Variante:

$$\begin{array}{rclcl} 2 \cdot (x_0 - 4)^2 - 2 & = & 0 & | : 2 & (2) \\ (x_0 - 4)^2 - 1 & = & 0 & | + 1 & (2) \\ (x_0 - 4)^2 & = & 1 & | \sqrt{} & (2) \\ x_{01/02} - 4 & = & \pm \sqrt{1} & | + 4 & \\ x_{01/02} & = & 4 \pm 1 & & (2) \\ x_{01} = 4 + 1 = 5 & & x_{02} = 4 - 1 = 3 & & (2) \end{array}$$

Nullstellenbestimmung, 2. Variante:

$$\begin{array}{rcll} 2x_0^2 - 16x_0 + 30 & = & 0 & | : 2 \quad (2) \\ x_0^2 - 8x_0 + 15 & = & 0 & | \text{ p-q-Formel } \quad (2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{01/2} &= -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 15} & (2) \\ &= 4 \pm \sqrt{16 - 15} \\ x_{01/2} &= 4 \pm 1 & (2) \end{aligned}$$

$$\boxed{x_{01} = 3 \quad x_{02} = 5} \quad (2)$$

0.2 QUADFKT-01b

Der Funktionsgraph einer Quadratischen Funktion f hat den Scheitelpunkt $S(4|8)$ und verläuft durch den Punkt $P(3|6)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ und ihre Nullstellen!

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunkform** der Quadratischen Funktion an. Bekanntlich lautet die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Diese Formel wird nun angewendet und die Koordinaten von S werden für x_s und y_s eingesetzt:

$$f(x) = a \cdot (x - 4)^2 + 8 \quad (4)$$

Es fehlt nur noch der Formfaktor a . Den erhalte ich, indem ich die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung einsetze.

$$\begin{aligned} f(3) &= 6 & (1) \\ a \cdot (3 - 4)^2 + 8 &= 6 & (2) \\ a \cdot (-1)^2 + 8 &= 6 \\ a \cdot 1 + 8 &= 6 & | -8 \quad (1) \\ a &= -2 & (1) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = -2 \cdot (x - 4)^2 + 8 \quad \text{oder ausmultipliziert:} \quad f(x) = -2x^2 + 16x - 24 \quad (1)$$

Anmerkung: Ein Ausmultiplizieren der Klammer ist eigentlich nicht erforderlich. Nur dann, wenn man zur Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel gemäß Lösungsvariante 2 arbeiten möchte, braucht man diese Form.

Zur Nullstellenbestimmung wird der Funktionsterm gleich 0 gesetzt.

Nullstellenbestimmung, 1. Variante:

$$\begin{aligned} -2 \cdot (x_0 - 4)^2 + 8 &= 0 & | : (-2) & (2) \\ (x_0 - 4)^2 - 4 &= 0 & | + 4 & (2) \\ (x_0 - 4)^2 &= 4 & | \sqrt{} & (2) \\ x_{01/02} - 4 &= \pm \sqrt{4} & | + 4 & \\ x_{01/02} &= 4 \pm 2 & & (2) \\ x_{01} = 4 + 2 = 6 & & x_{02} = 4 - 2 = 2 & (2) \end{aligned}$$

Nullstellenbestimmung, 2. Variante:

$$\begin{array}{rcl} -2x_0^2 + 16x_0 - 24 & = & 0 \\ x_0^2 - 8x_0 + 12 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : (-2) \\ | \text{ p-q-Formel} \end{array} \quad \begin{array}{l} (2) \\ (2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{01/2} &= -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 12} \\ &= 4 \pm \sqrt{16 - 12} \\ x_{01/2} &= 4 \pm 2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} (2) \\ (2) \end{array}$$

$$\boxed{x_{01} = 6 \quad x_{02} = 2} \quad (2)$$

0.3 QUADFKT-01c

Der Funktionsgraph einer Quadratischen Funktion f hat den Scheitelpunkt $S(3|8)$ und verläuft durch den Punkt $P(2|6)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ und ihre Nullstellen!

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunkform** der Quadratischen Funktion an. Bekanntlich lautet die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Diese Formel wird nun angewendet und die Koordinaten von S werden für x_s und y_s eingesetzt:

$$f(x) = a \cdot (x - 3)^2 + 8 \quad (4)$$

Es fehlt nur noch der Formfaktor a . Den erhalte ich, indem ich die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung einsetze.

$$\begin{aligned} f(2) &= 6 & (1) \\ a \cdot (2 - 3)^2 + 8 &= 6 & (2) \\ a \cdot (-1)^2 + 8 &= 6 \\ a \cdot 1 + 8 &= 6 & | -8 \quad (1) \\ a &= -2 & (1) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = -2 \cdot (x - 3)^2 + 8 \quad \text{oder ausmultipliziert:} \quad f(x) = -2x^2 + 12x - 10 \quad (1)$$

Anmerkung: Ein Ausmultiplizieren der Klammer ist eigentlich nicht erforderlich. Nur dann, wenn man zur Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel gemäß Lösungsvariante 2 arbeiten möchte, braucht man diese Form.

Zur Nullstellenbestimmung wird der Funktionsterm gleich 0 gesetzt.

Nullstellenbestimmung, 1. Variante:

$$\begin{aligned} -2 \cdot (x_0 - 3)^2 + 8 &= 0 & | : (-2) & (2) \\ (x_0 - 3)^2 - 4 &= 0 & | + 4 & (2) \\ (x_0 - 3)^2 &= 4 & | \sqrt{} & (2) \\ x_{01/02} - 3 &= \pm\sqrt{4} & | + 3 & \\ x_{01/02} &= 3 \pm 2 & & (2) \\ x_{01} = 3 + 2 = 5 & & x_{02} = 3 - 2 = 1 & (2) \end{aligned}$$

Nullstellenbestimmung, 2. Variante:

$$\begin{array}{rcll} -2x_0^2 + 12x_0 - 10 & = & 0 & | : (-2) \quad (2) \\ x_0^2 - 6x_0 + 5 & = & 0 & | \text{ p-q-Formel } \quad (2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{01/2} &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5} & (2) \\ &= 3 \pm \sqrt{9 - 5} \\ x_{01/2} &= 3 \pm 2 & (2) \end{aligned}$$

$$\boxed{x_{01} = 5 \quad x_{02} = 1} \quad (2)$$

0.4 QUADFKT-01d

Der Funktionsgraph einer Quadratischen Funktion f hat den Scheitelpunkt $S(1|12)$ und verläuft durch den Punkt $P(2|9)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ und ihre Nullstellen!

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunkform** der Quadratischen Funktion an. Bekanntlich lautet die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Diese Formel wird nun angewendet und die Koordinaten von S werden für x_s und y_s eingesetzt:

$$f(x) = a \cdot (x - 1)^2 + 12 \quad (4)$$

Es fehlt nur noch der Formfaktor a . Den erhalte ich, indem ich die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung einsetze.

$$f(2) = 9 \quad (1)$$

$$a \cdot (2 - 1)^2 + 12 = 9 \quad (2)$$

$$a \cdot 1^2 + 12 = 9$$

$$a + 12 = 9 \quad | -12 \quad (1)$$

$$a = -3 \quad (1)$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = -3 \cdot (x - 1)^2 + 12 \quad \text{oder ausmultipliziert:} \quad f(x) = -3x^2 + 6x + 9 \quad (1)$$

Anmerkung: Ein Ausmultiplizieren der Klammer ist eigentlich nicht erforderlich. Nur dann, wenn man zur Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel gemäß Lösungsvariante 2 arbeiten möchte, braucht man diese Form.

Zur Nullstellenbestimmung wird der Funktionsterm gleich 0 gesetzt.

Nullstellenbestimmung, 1. Variante:

$$-3 \cdot (x_0 - 1)^2 + 12 = 0 \quad | : (-3) \quad (2)$$

$$(x_0 - 1)^2 - 4 = 0 \quad | + 4 \quad (2)$$

$$(x_0 - 1)^2 = 4 \quad | \sqrt{} \quad (2)$$

$$x_{01/02} - 1 = \pm \sqrt{4} \quad | + 1$$

$$x_{01/02} = 1 \pm 2 \quad (2)$$

$$x_{01} = 1 + 2 = 3 \quad x_{02} = 1 - 2 = -1 \quad (2)$$

Nullstellenbestimmung, 2. Variante:

$$\begin{array}{rcl} -3x_0^2 + 6x_0 + 9 & = & 0 \\ x_0^2 - 2x_0 - 3 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : (-3) \\ | \text{ p-q-Formel} \end{array} \quad \begin{array}{l} (2) \\ (2) \end{array}$$

$$x_{01/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} \quad (2)$$

$$= 1 \pm \sqrt{1 + 3}$$

$$x_{01/2} = 1 \pm 2 \quad (2)$$

$$\boxed{x_{01} = 3 \quad x_{02} = -1} \quad (2)$$

0.5 QUADFKT-02

Der Graph der Quadratischen Funktion f verläuft durch die drei Punkte $P_1(-3|32)$, $P_2(-1|10)$ und $P_3(2|7)$. Geben Sie die Funktionsgleichung an!

Lösung: Ich gehe von der **Normalform** der Quadratischen Funktion aus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Es müssen nur die drei Parameter a , b und c bestimmt werden. Dazu setze ich die Koordinaten von jedem der drei Punkte ein und erhalte ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.

$$\begin{array}{rclcl} f(-3) & = & 32 & \Rightarrow & a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 32 \\ f(-1) & = & 10 & \Rightarrow & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 10 \\ f(2) & = & 7 & \Rightarrow & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 7 \end{array}$$

Zusammengefasst ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} (1) & 9a & -3b + c = 32 \\ (2) & a & -b + c = 10 \\ (3) & 4a & +2b + c = 7 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit jedem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden, also beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren, dem Gleichsetzungsverfahren, dem Additions-/Subtraktionsverfahren, der Cramerschen Regel oder dem Gauß-Jordan-Verfahren. Weil das Einsetzungsverfahren das einfachste ist, wähle ich dieses aus. Dazu löse ich Gleichung (2) nach c auf und setze das Ergebnis in (1) und (3) ein.

$$(2) \quad a - b + c = 10 \quad \Rightarrow \quad c = 10 - a + b$$

Einsetzen in (1) und (3) und zusammenfassen:

$$\begin{array}{rcl} (1) & 9a - 3b + 10 - a + b & = 32 \\ (3) & 4a + 2b + 10 - a + b & = 7 \\ \hline (1) & 8a - 2b & = 22 \\ (3) & 3a + 3b & = -3 \end{array}$$

Nun löse ich Gleichung (3) nach b auf und setze das Ergebnis in (1) ein.

$$\begin{array}{rcl} (3) & 3a + 3b & = -3 \quad | -3a \\ & 3b & = -3 - 3a \quad | :3 \\ & b & = -1 - a \end{array}$$

Einsetzen in (1):

$$\begin{array}{rcl} (1) & 8a - 2b & = 22 \\ & 8a - 2(-1 - a) & = 22 \\ & 8a + 2 + 2a & = 22 \\ & 10a + 2 & = 22 \quad | -2 \\ & 10a & = 20 \quad | :10 \\ & a & = 2 \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (3) eingesetzt.

$$b = -1 - a = -1 - 2 = -3$$

Beide Ergebnisse werden in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$c = 10 - a + b = 10 - 2 - 3 = 5$$

Also lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

0.6 QUADFKT-03

Der Graph einer Quadratischen Funktion f_1 schneidet die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = x - 2$ bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 1$. Die Parabel schneidet die y -Achse bei $y_0 = 2$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ an!

Lösung: Ich gehe von der **Normalform** der Quadratischen Funktion aus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (2)$$

Der y -Achsenabschnitt $y_0 = 2$ bedeutet direkt, dass $c = 2$ ist. Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = ax^2 + bx + 2 \quad (2)$$

Die Schnittpunkte mit der Geraden können aus der Geradengleichung bestimmt werden.

$$\begin{aligned} y_1 = f_2(x_1) &= x_1 - 2 = -4 - 2 = -6 & (2) \\ y_2 = f_2(x_2) &= x_2 - 2 = 1 - 2 = -1 & (2) \end{aligned}$$

Die Koordinaten der beiden Punkte können wir nun in die Funktionsgleichung $f_1(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1 \Rightarrow a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + 2 = -6 & (1) \\ f(x_2) &= y_2 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = -1 & (1) \end{aligned}$$

Das Lineargleichungssystem wird vereinfacht:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 16a & -4b & +2 & = -6 \\ (2) & a & +b & +2 & = -1 \\ \hline (1) & & 16a & -4b & = -8 & (1) \\ (2) & & a & +b & = -3 & (1) \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren aufgelöst werden. Ich verwende das Einsetzungsverfahren. Ich stelle dazu Gleichung (2) nach b um.

$$(2) \quad a + b = -3 \Rightarrow b = -3 - a$$

Diesen Term setze ich in Gleichung (1) für b ein.

$$\begin{aligned} 16a - 4b &= -8 \\ 16a - 4 \cdot (-3 - a) &= -8 \\ 16a + 12 + 4a &= -8 \\ 20a + 12 &= -8 & | -12 \\ 20a &= -20 & | :20 \\ a &= -1 & (5) \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$b = -3 - a = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2 \quad (2)$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ (1)

0.7 QUADFKT-04

Der Graph einer Quadratischen Funktion f_1 schneidet die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = x - 1$ bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 1$. Die Parabel schneidet die y -Achse bei $y_0 = 3$. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ an!

Lösung: Ich gehe von der **Normalform** der Quadratischen Funktion aus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (2)$$

Der y -Achsenabschnitt $y_0 = 3$ bedeutet direkt, dass $c = 3$ ist. Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = ax^2 + bx + 3 \quad (2)$$

Die Schnittpunkte mit der Geraden können aus der Geradengleichung bestimmt werden.

$$y_1 = f_2(x_1) = x_1 - 1 = -4 - 1 = -5 \quad (2)$$

$$y_2 = f_2(x_2) = x_2 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad (2)$$

Die Koordinaten der beiden Punkte können wir nun in die Funktionsgleichung $f_1(x)$ einsetzen.

$$\begin{array}{lclclcl} f(x_1) & = & y_1 & \Rightarrow & a \cdot (-4)^2 & + b \cdot (-4) & + 3 & = & -5 & (1) \\ f(x_2) & = & y_2 & \Rightarrow & a \cdot 1^2 & + b \cdot 1 & + 3 & = & 0 & (1) \end{array}$$

Das Lineargleichungssystem wird vereinfacht:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 16a & -4b & +3 & = & -5 \\ (2) & a & +b & +3 & = & 0 \\ \hline (1) & & 16a & -4b & = & -8 & (1) \\ (2) & & a & +b & = & -3 & (1) \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren aufgelöst werden. Ich verwende das Einsetzungsverfahren. Ich stelle dazu Gleichung (2) nach b um.

$$(2) \quad a + b = -3 \quad \Rightarrow \quad b = -3 - a$$

Diesen Term setze ich in Gleichung (1) für b ein.

$$\begin{array}{rclcl} 16a - 4b & = & -8 \\ 16a - 4 \cdot (-3 - a) & = & -8 \\ 16a + 12 + 4a & = & -8 \\ 20a + 12 & = & -8 & | -12 \\ 20a & = & -20 & | : 20 \\ a & = & -1 & (5) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$b = -3 - a = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2 \quad (2)$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ (1)

0.8 QUADFKT-05a

Gegeben ist die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = -x^2 + 2x + 2$. Verschieben Sie die Parabel so, dass ihr Scheitelpunkt auf den Punkt $S(3|2)$ zu liegen kommt! Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

Lösung: Zur Lösung gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Lösungswege:

- **Lösungsweg 1:**

- Scheitelpunkt von f_1 bestimmen.
- Differenzen zu den neuen Scheitelpunktkoordinaten berechnen.
- Mit Verschiebformel neue Funktion aufstellen.

- **Lösungsweg 2:**

Neue Funktion mit **Scheitelpunktform** aufstellen. Der Scheitelpunkt ist bekannt, von f_2 wird nur der **Formfaktor a** übernommen.

Offensichtlich ist Lösungsweg 2 einfacher. Von f_1 entnehmen wir $a = -1$, der Scheitelpunkt ist oben angegeben. Mit der **Scheitelpunktform** kann die Funktionsgleichung direkt angegeben werden:

$$f_2(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s = -1 \cdot (x - 3)^2 + 2$$

Wer Lust hat, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umformen. Notwendig ist das aber nicht. Die Lösung lautet damit:

$$f_2(x) = -(x - 3)^2 + 2 \quad \text{oder:} \quad f_2(x) = -x^2 + 6x - 7$$

0.9 QUADFKT-05b

Gegeben ist die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = -x^2 - 3x + 1$. Verschieben Sie die Parabel so, dass ihr Scheitelpunkt auf den Punkt $S(2|3)$ zu liegen kommt! Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

Lösung: Zur Lösung gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Lösungswege:

- **Lösungsweg 1:**

- Scheitelpunkt von f_1 bestimmen.
- Differenzen zu den neuen Scheitelpunktkoordinaten berechnen.
- Mit Verschiebformel neue Funktion aufstellen.

- **Lösungsweg 2:**

Neue Funktion mit **Scheitelpunktform** aufstellen. Der Scheitelpunkt ist bekannt, von f_2 wird nur der **Formfaktor a** übernommen.

Offensichtlich ist Lösungsweg 2 einfacher. Von f_1 entnehmen wir $a = -1$, der Scheitelpunkt ist oben angegeben. Mit der **Scheitelpunktform** kann die Funktionsgleichung direkt angegeben werden:

$$f_2(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s = -1 \cdot (x - 2)^2 + 3$$

Wer Lust hat, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umformen. Notwendig ist das aber nicht. Die Lösung lautet damit:

$$f_2(x) = -(x - 2)^2 + 3 \quad \text{oder:} \quad f_2(x) = -x^2 + 4x - 1$$

0.10 QUADFKT-06

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Parabel (Quadratische Funktion), die durch die Punkte $P_1(1|-12)$, $P_2(3|4)$ und $P_3(6|-2)$ verläuft!

Lösung: Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Koordinaten jedes Punktes liefern je eine Gleichung.

$$\begin{array}{lcl} (1) & f(1) & = -12 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -12 \\ (2) & f(3) & = 4 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 4 \\ (3) & f(6) & = -2 \Rightarrow a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = -2 \end{array}$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung mit den Variablen a , b und c .

$$\begin{array}{lcl} (1) & a & +b +c = -12 \quad (2) \\ (2) & 9a & +3b +c = 4 \quad (2) \\ (3) & 36a & +6b +c = -2 \quad (2) \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit jedem bekannten Verfahren gelöst werden.

Lösungsvariante 1: Cramersche Regel

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} -12 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -12 & 1 \\ 4 & 3 \\ -2 & 6 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 9 & 3 \\ 36 & 6 \end{matrix}} \\ &= \frac{-36 - 2 + 24 + 6 + 72 - 4}{3 + 36 + 54 - 108 - 6 - 9} \\ &= \frac{60}{-30} \\ a &= -2 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -12 & 1 & 1 & -12 \\ 9 & 4 & 1 & 9 & 4 \\ 36 & -2 & 1 & 36 & -2 \end{array} \right| \\
&= \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 9 & 3 \\ 36 & 6 & 1 & 36 & 6 \end{array} \right| \\
&= \frac{4 - 432 - 18 - 144 + 2 + 108}{3 + 36 + 54 - 108 - 6 - 9} \\
&= \frac{-480}{-30} \\
b &= 16 \quad (4)
\end{aligned}$$

Den Parameter c bestimme ich durch Einsetzen in (1).

$$\begin{aligned}
a + b + c &= -12 \\
-2 + 16 + c &= -12 \\
14 + c &= -12 \quad | -14 \\
c &= -26 \quad (2)
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = -2x^2 + 16x - 26$ (1)

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren

$$\begin{aligned}
(1) \quad a + b + c &= -12 \\
(2) \quad 9a + 3b + c &= 4 \\
(3) \quad 36a + 6b + c &= -2
\end{aligned}$$

Da der Parameter vor c überall gleich ist, bietet sich dieses Verfahren an. Ich subtrahiere (1) von (2), so dass c wegfällt.

$$\begin{aligned}
(1) \quad a + b + c &= -12 \quad | - \\
(2) \quad 9a + 3b + c &= 4 \quad | \\
\hline
(4) \quad 8a + 2b &= 16 \quad (2)
\end{aligned}$$

Jetzt subtrahiere ich (1) von (3), so dass wieder c wegfällt.

$$\begin{aligned}
(1) \quad a + b + c &= -12 \quad | - \\
(3) \quad 36a + 6b + c &= -2 \quad | \\
\hline
(5) \quad 35a + 5b &= 10 \quad (2)
\end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (4) und (5) habe ich ein Gleichungssystem mit nur noch zwei Variablen. Für den nächsten Reduktionsschritt verwende ich wieder das Additions-/Subtraktionsverfahren.

$$\begin{array}{rcll}
(4) & 8a & +2b & = 16 & | \cdot 5 \\
(5) & 35a & +5b & = 10 & | \cdot 2 \\
\hline
(4) & 40a & +10b & = 80 & | \\
(5) & 70a & +10b & = 20 & | - \\
\hline
& -30a & & = 60 & | : (-30) \\
& a & & = -2 & (5)
\end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (4) ein, um b zu berechnen.

$$\begin{array}{rcl}
8a + 2b & = & 16 \\
8 \cdot (-2) + 2b & = & 16 \\
-16 + 2b & = & 16 & | + 16 \\
2b & = & 32 & | : 2 \\
b & = & 16 & (2)
\end{array}$$

Beide Ergebnisse setze ich in (1) ein.

$$\begin{array}{rcl}
a + b + c & = & -12 \\
-2 + 16 + c & = & -12 \\
14 + c & = & -12 & | - 14 \\
c & = & -26 & (2)
\end{array}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = -2x^2 + 16x - 26$ (1)

0.11 QUADFKT-07

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Parabel (Quadratische Funktion), die durch die Punkte $P_1(-1|-11)$, $P_2(1|5)$ und $P_3(4|-1)$ verläuft!

Lösung: Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Koordinaten jedes Punktes liefern je eine Gleichung.

$$\begin{array}{lclclcl} (1) & f(-1) & = & -11 & \Rightarrow & a \cdot (-1)^2 & + b \cdot (-1) & + c & = & -11 \\ (2) & f(1) & = & 5 & \Rightarrow & a \cdot 1^2 & + b \cdot 1 & + c & = & 5 \\ (3) & f(4) & = & -1 & \Rightarrow & a \cdot 4^2 & + b \cdot 4 & + c & = & -1 \end{array}$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung mit den Variablen a , b und c .

$$\begin{array}{lclcl} (1) & a & -b & +c & = & -11 & (1) \\ (2) & a & +b & +c & = & 5 & (1) \\ (3) & 16a & +4b & +c & = & -1 & (1) \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit jedem bekannten Verfahren gelöst werden. Ich verwende hier einmal die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} -11 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -11 & -1 \\ 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 16 & 4 \end{matrix}} \\ &= \frac{-11 + 1 + 20 + 1 + 44 + 5}{1 - 16 + 4 - 16 - 4 + 1} \\ &= \frac{60}{-30} \\ a &= -2 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -11 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 16 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -11 \\ 1 & 5 \\ 16 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 16 & 4 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{5 - 176 - 1 - 80 + 1 + 11}{1 - 16 + 4 - 16 - 4 + 1} \\
&= \frac{-240}{-30} \\
b &= 8 \quad (5)
\end{aligned}$$

Den Parameter c bestimme ich durch Einsetzen in (1).

$$\begin{aligned}
a - b + c &= -11 \\
-2 - 8 + c &= -11 \\
-10 + c &= -11 \quad | + 10 \\
c &= -1 \quad (3)
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = -2x^2 + 8x - 1 \quad (1)$

0.12 QUADFKT-08

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Parabel (Quadratische Funktion), die durch die Punkte $P_1(-2 | -11)$, $P_2(3 | -16)$ und $P_3(4 | -35)$ verläuft!

Lösung: Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Koordinaten jedes Punktes liefern je eine Gleichung.

$$\begin{array}{lcl} (1) & f(-2) & = -11 \Rightarrow a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = -11 \\ (2) & f(3) & = -16 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -16 \\ (3) & f(4) & = -35 \Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = -35 \end{array}$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung mit den Variablen a , b und c .

$$\begin{array}{lcl} (1) & 4a & -2b + c = -11 \quad (2) \\ (2) & 9a & +3b + c = -16 \quad (2) \\ (3) & 16a & +4b + c = -35 \quad (2) \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit jedem bekannten Verfahren gelöst werden. Ich verwende hier einmal die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} -11 & -2 & 1 \\ -16 & 3 & 1 \\ -35 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -11 & -2 \\ -16 & 3 \\ -35 & 4 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -2 \\ 9 & 3 \\ 16 & 4 \end{matrix}} \\ &= \frac{-33 + 70 - 64 + 105 + 44 - 32}{12 - 32 + 36 - 48 - 16 + 18} \\ &= \frac{90}{-30} \\ a &= -3 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & -11 & 1 \\ 9 & -16 & 1 \\ 16 & -35 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{matrix} 4 & -11 \\ 9 & -16 \\ 16 & -35 \end{matrix}}{\begin{matrix} 4 & -2 \\ 9 & 3 \\ 16 & 4 \end{matrix}} \\
&= \frac{-64 - 176 - 315 + 256 + 140 + 99}{12 - 32 + 36 - 48 - 16 + 18} \\
&= \frac{-60}{-30} \\
b &= 2 \quad (4)
\end{aligned}$$

Den Parameter c bestimme ich durch Einsetzen in (1).

$$\begin{aligned}
4a - 2b + c &= -11 \\
4 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 + c &= -11 \\
-12 - 4 + c &= -11 \\
-16 + c &= -11 \quad | +16 \\
c &= 5 \quad (2)
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$ (1)

0.13 QUADFKT-09

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Parabel (Quadratische Funktion), die durch die Punkte $P_1(-3|-9)$, $P_2(2|-14)$ und $P_3(3|-33)$ verläuft!

Lösung: Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Koordinaten jedes Punktes liefern je eine Gleichung.

$$\begin{array}{lcl} (1) & f(-3) & = -9 \Rightarrow a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = -9 \\ (2) & f(2) & = -14 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -14 \\ (3) & f(3) & = -33 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -33 \end{array}$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung mit den Variablen a , b und c .

$$\begin{array}{lcl} (1) & 9a & -3b + c = -9 \quad (2) \\ (2) & 4a & +2b + c = -14 \quad (2) \\ (3) & 9a & +3b + c = -33 \quad (2) \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit jedem bekannten Verfahren gelöst werden. Ich verwende hier einmal die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} -9 & -3 & 1 \\ -14 & 2 & 1 \\ -33 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -9 & -3 \\ -14 & 2 \\ -33 & 3 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 9 & -3 \\ 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{matrix}} \\ &= \frac{-18 + 99 - 42 + 66 + 27 - 42}{18 - 27 + 12 - 18 - 27 + 12} \\ &= \frac{90}{-30} \\ a &= -3 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\begin{vmatrix} 9 & -9 & 1 \\ 4 & -14 & 1 \\ 9 & -33 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & -9 \\ 4 & -14 \\ 9 & -33 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-126 - 81 - 132 + 126 + 297 + 36}{18 - 27 + 12 - 18 - 27 + 12} \\
&= \frac{120}{-30} \\
b &= -4 \quad (4)
\end{aligned}$$

Den Parameter c bestimme ich durch Einsetzen in (1).

$$\begin{aligned}
9a - 3b + c &= -9 \\
9 \cdot (-3) - 3 \cdot (-4) + c &= -9 \\
-27 + 12 + c &= -9 \\
-15 + c &= -9 \quad | + 15 \\
c &= 6 \quad (2)
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $f(x) = -3x^2 - 4x + 6$ (1)

0.14 QUADFKT-10

Gegeben ist eine Gerade mit der Funktionssgleichung $f_1(x) = 2x + 2$. Bestimmen Sie die Quadratische Funktion $f_2(x)$ so, dass der zugehörige Funktionsgraph die Gerade bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ schneidet. Der **obere** Schnittpunkt ist zugleich der Scheitelpunkt der Parabel. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

Lösung: Zunächst werden die Schnittpunkte bestimmt. Dazu werden die x -Werte in die Funktion f_1 eingesetzt.

$$y_1 = f_1(x_1) = 2x_1 + 2 = 2 \cdot (-2) + 2 = -2 \quad (3)$$

$$y_2 = f_1(x_2) = 2x_2 + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6 \quad (3)$$

Die Schnittpunkte lauten also: $P_1(-2|-2)$ und $P_2(2|6)$. Der Punkt P_2 ist der **obere** Schnittpunkt, denn sein y -Wert ist größer. Damit ist P_2 der **Scheitelpunkt** von f_2 . Der Ansatz der Funktionsgleichung kann damit sinnvollerweise mit der **Scheitelpunktform** erfolgen.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ f_2(x) &= a \cdot (x - 2)^2 + 6 \quad (6) \end{aligned}$$

Setzt man die Koordinaten des anderen Punktes ein, dann kann man damit den Parameter a berechnen.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_2(x_1) \\ -2 &= a \cdot (-2 - 2)^2 + 6 \\ -2 &= 16a + 6 \quad | -6 \\ -8 &= 16a \quad | : 16 \\ a &= -\frac{1}{2} \quad (6) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also: $f_2(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 6 \quad (2)$

Wer mag, kann noch die Klammer auflösen und die Gleichung in Normalform angeben. Dann erhält man: $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$

0.15 QUADFKT-11

Gegeben ist eine Gerade mit der Funktionssgleichung $f_1(x) = 2x + 3$. Bestimmen Sie die Quadratische Funktion $f_2(x)$ so, dass der zugehörige Funktionsgraph die Gerade bei $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$ schneidet. Der **untere** Schnittpunkt ist zugleich der Scheitelpunkt der Parabel. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_2(x)$ an! (20 P.)

Lösung: Zunächst werden die Schnittpunkte bestimmt. Dazu werden die x -Werte in die Funktion f_1 eingesetzt.

$$y_1 = f_1(x_1) = 2x_1 + 3 = 2 \cdot (-3) + 3 = -3 \quad (3)$$

$$y_2 = f_1(x_2) = 2x_2 + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \quad (3)$$

Die Schnittpunkte lauten also: $P_1(-3|-3)$ und $P_2(1|5)$. Der Punkt P_1 ist der **untere** Schnittpunkt, denn sein y -Wert ist kleiner. Damit ist P_1 der **Scheitelpunkt** von f_2 . Der Ansatz der Funktionsgleichung kann damit sinnvollerweise mit der **Scheitelpunktform** erfolgen.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= a \cdot (x - x_s)^2 + y_s \\ f_2(x) &= a \cdot (x - (-3))^2 + (-3) \\ f_2(x) &= a \cdot (x + 3)^2 - 3 \quad (6) \end{aligned}$$

Setzt man die Koordinaten des anderen Punktes ein, dann kann man damit den Parameter a berechnen.

$$\begin{aligned} y_2 &= f_2(x_2) \\ 5 &= a \cdot (1 + 3)^2 - 3 \\ 5 &= 16a - 3 \quad | + 3 \\ 8 &= 16a \quad | : 16 \\ a &= \frac{1}{2} \quad (6) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also: $f_2(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 3 \quad (2)$

Wer mag, kann noch die Klammer auflösen und die Gleichung in Normalform angeben.

Dann erhält man: $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}$

0.16 QUADFKT-12

Gegeben ist eine Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = 2x^2 + 8x + 3$. Sie verschieben die Parabel so, dass ihr Scheitelpunkt bei $S(1|5)$ liegt. Dann drehen Sie die Parabel um 180° um ihren Scheitelpunkt, wie nebenstehend angedeutet. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$?

Lösung: Die gesuchte Parabel hat die gleiche **Form**, wie die gegebene. Also ist der **Formfaktor a** zunächst der gleiche. Durch die Drehung um 180° kehrt sich dann das Vorzeichen des Formfaktors um. Wir erhalten also:

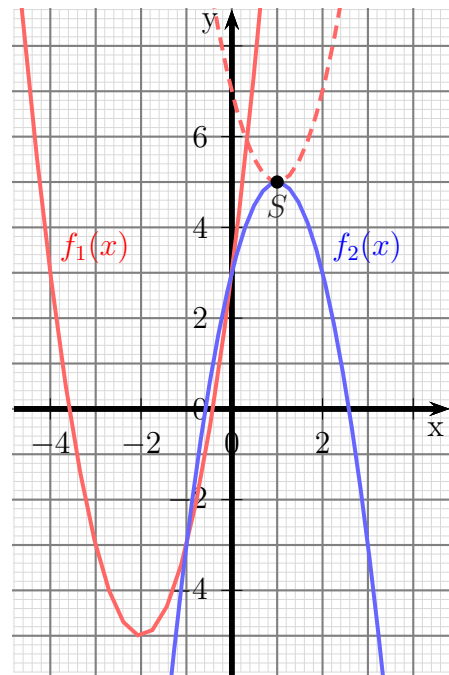
$$a = -2 \quad (10)$$

Da der Scheitelpunkt gegeben ist, kann die Funktionsgleichung direkt in der **Scheitelpunktform** angegeben werden.

$$f_2(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s = -2 \cdot (x - 1)^2 + 5$$

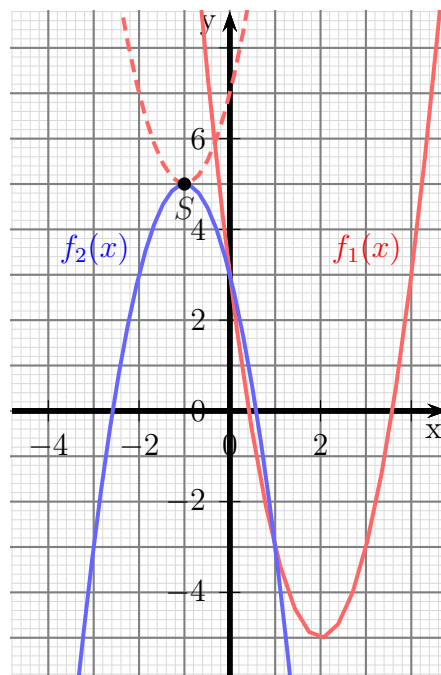
Zusammengefasstes Ergebnis: $f_2(x) = -2(x - 1)^2 + 5$ (10)

Wer mag, kann noch die Klammer auflösen und die Gleichung in Normalform angeben. Dann erhält man: $f_2(x) = -2x^2 + 4x + 3$



0.17 QUADFKT-13

Gegeben ist eine Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = 2x^2 - 8x + 3$. Sie verschieben die Parabel so, dass ihr Scheitelpunkt bei $S(-1|5)$ liegt. Dann drehen Sie die Parabel um 180° um ihren Scheitelpunkt, wie nebenstehend angedeutet. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$?



Lösung: Die gesuchte Parabel hat die gleiche **Form**, wie die gegebene. Also ist der **Formfaktor** a zunächst der gleiche. Durch die Drehung um 180° kehrt sich dann das Vorzeichen des Formfaktors um. Wir erhalten also:

$$a = -2 \quad (10)$$

Da der Scheitelpunkt gegeben ist, kann die Funktionsgleichung direkt in der **Scheitelpunktform** angegeben werden.

$$f_2(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s = -2 \cdot (x + 1)^2 + 5$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $f_2(x) = -2(x + 1)^2 + 5$ (10)

Wer mag, kann noch die Klammer auflösen und die Gleichung in Normalform angeben. Dann erhält man: $f_2(x) = -2x^2 - 4x + 3$

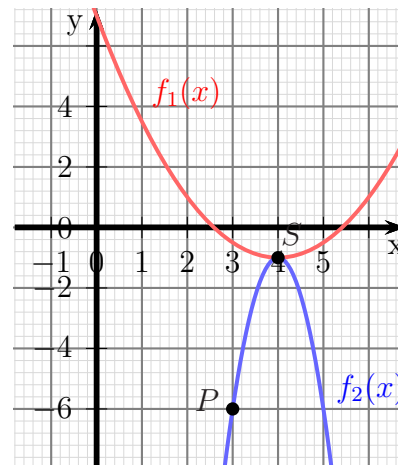
0.18 QUADFKT-14

Wie ist die Parabel mit der Gleichung

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7$$

zu ändern, damit bei **gleichem Scheitelpunkt S** der Punkt $P(3|-6)$ zur neuen Parabel gehört? Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f_2(x)$ an!

Anmerkung: Die Skizze dient lediglich zur Verdeutlichung, es dürfen daraus **keine** Daten zur Berechnung entnommen werden! (20 P.)



Lösung: Zunächst berechne ich den x -Wert des Scheitelpunktes S . Dazu verwende ich die Formel zur Scheitelpunktbestimmung.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4 \quad (5)$$

$$y_s = f_1(x_s) = \frac{1}{2}x_s^2 - 4x_s + 7 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 7 = -1 \quad (5)$$

Der Scheitelpunkt heißt damit: $S(4|-1)$

Mit diesem Scheitelpunkt lässt sich die gesuchte Funktionsgleichung in Scheitelpunktform aufstellen:

$$f_2(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s = a \cdot (x - 4)^2 - 1 \quad (5)$$

Es fehlt nur noch der Parameter a . Dieser kann mit Hilfe der Daten des Punktes P berechnet werden.

$$\begin{aligned} f_2(x_P) &= y_P \\ f_2(3) &= -6 \\ a \cdot (3 - 4)^2 - 1 &= -6 \\ a - 1 &= -6 \quad | +1 \\ a &= -5 \quad (4) \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet also: $f_2(x) = -5 \cdot (x - 4)^2 - 1$ (1)

Wer mag, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umformen. Verlangt ist das allerdings nicht.

$$f_2(x) = -5 \cdot (x - 4)^2 - 1 = -5 \cdot (x^2 - 8x + 16) - 1 = -5x^2 + 40x - 81$$

0.19 QUADFKT-15a

Die Parabel mit der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(4|3)$ und verläuft durch den Punkt $P(6|11)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ und ihre Nullstellen, falls vorhanden! (20 P.)

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunkform** der Quadratischen Funktion an. Bekanntlich lautet die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Diese Formel wird nun angewendet und die Koordinaten von S eingesetzt:

$$f(x) = a \cdot (x - 4)^2 + 3 \quad (6)$$

Es fehlt nur noch der Formfaktor a . Den erhalte ich, indem ich die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung einsetze.

$$\begin{aligned} f(6) &= 11 \\ a \cdot (6 - 4)^2 + 3 &= 11 \\ a \cdot 4 + 3 &= 11 & | - 3 \\ 4a &= 8 & | : 4 \\ a &= 2 \quad (6) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 4)^2 + 3 \quad \text{oder:} \quad f(x) = 2x^2 - 16x + 35 \quad (2)$$

Nullstellenbestimmung, 1. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2 \cdot (x_0 - 4)^2 + 3 &= 0 & | : 2 \\ (x_0 - 4)^2 + 1,5 &= 0 & | - 1,5 \\ (x_0 - 4)^2 &= -1,5 & | \sqrt{} \\ x_0 - 4 &= \pm \sqrt{-1,5} \end{aligned}$$

Da die Zahl unter der Wurzel negativ ist, gibt es **keine** Nullstellen. (6)

Nullstellenbestimmung, 2. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0^2 - 16x_0 + 35 &= 0 & | : 2 \\ x_0^2 - 8x_0 + 17,5 &= 0 \\ x_{01/02} &= 4 \pm \sqrt{16 - 17,5} \\ x_{01/02} &= 4 \pm \sqrt{-1,5} \end{aligned}$$

Da die Diskriminante negativ ist, gibt es **keine** Nullstellen. (6)

0.20 QUADFKT-15b

Die Parabel mit der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(5|-8)$ und verläuft durch den Punkt $P(6|-6)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ und ihre Nullstellen, falls vorhanden! (20 P.)

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunkform** der Quadratischen Funktion an. Bekanntlich lautet die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Diese Formel wird nun angewendet und die Koordinaten von $S(5|-8)$ eingesetzt:

$$f(x) = a \cdot (x - 5)^2 - 8 \quad (6)$$

Es fehlt nur noch der Formfaktor a . Den erhalte ich, indem ich die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung einsetze.

$$\begin{aligned} f(6) &= -6 \\ a \cdot (6 - 5)^2 - 8 &= -6 \\ a - 8 &= -6 \quad | + 8 \\ a &= 2 \quad (6) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 5)^2 - 8 \quad \text{oder:} \quad f(x) = 2x^2 - 20x + 42 \quad (2)$$

Nullstellenbestimmung, 1. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2 \cdot (x_0 - 5)^2 - 8 &= 0 & | : 2 \\ (x_0 - 5)^2 - 4 &= 0 & | + 4 \\ (x_0 - 5)^2 &= 4 & | \sqrt{} \\ x_0 - 5 &= \pm 2 & | + 5 \\ x_0 &= 5 \pm 2 \\ x_{01} = 5 + 2 = 7 & \quad x_{02} = 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

$$x_{01} = 7 \quad \text{und} \quad x_{02} = 3 \quad (6)$$

Nullstellenbestimmung, 2. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0^2 - 20x_0 + 42 &= 0 & | : 2 \\ x_0^2 - 10x_0 + 21 &= 0 \\ x_{01/02} &= 5 \pm \sqrt{25 - 21} \\ &= 5 \pm \sqrt{4} \\ x_{01/02} &= 5 \pm 2 \\ x_{01} = 5 + 2 = 7 & \quad x_{02} = 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

$$x_{01} = 7 \quad \text{und} \quad x_{02} = 3 \quad (6)$$

0.21 QUADFKT-15c

Die Parabel mit der Quadratischen Funktion $f(x)$ hat den Scheitelpunkt $S(4|18)$ und verläuft durch den Punkt $P(2|10)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ und ihre Nullstellen, falls vorhanden! (20 P.)

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunkform** der Quadratischen Funktion an. Bekanntlich lautet die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Diese Formel wird nun angewendet und die Koordinaten von $S(4|18)$ eingesetzt:

$$f(x) = a \cdot (x - 4)^2 + 18 \quad (6)$$

Es fehlt nur noch der Formfaktor a . Den erhalte ich, indem ich die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung einsetze.

$$\begin{aligned} f(2) &= 10 \\ a \cdot (2 - 4)^2 + 18 &= 10 \\ a \cdot 4 + 18 &= 10 & | -18 \\ 4a &= -8 & | :4 \\ a &= -2 \quad (6) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = -2 \cdot (x - 4)^2 + 18 \quad \text{oder:} \quad f(x) = -2x^2 + 16x - 14 \quad (2)$$

Nullstellenbestimmung, 1. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -2 \cdot (x_0 - 4)^2 + 18 &= 0 & | :(-2) \\ (x_0 - 4)^2 - 9 &= 0 & | +9 \\ (x_0 - 4)^2 &= 9 & | \sqrt{} \\ x_0 - 4 &= \pm 3 & | +4 \\ x_0 &= 4 \pm 3 \\ x_{01} = 4 + 3 = 7 & \quad x_{02} = 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

$$x_{01} = 7 \quad \text{und} \quad x_{02} = 1 \quad (6)$$

Nullstellenbestimmung, 2. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -2x_0^2 + 16x_0 - 14 &= 0 & | :(-2) \\ x_0^2 - 8x_0 + 7 &= 0 \\ x_{01/02} &= 4 \pm \sqrt{16 - 7} \\ &= 4 \pm \sqrt{9} \\ x_{01/02} &= 4 \pm 3 \\ x_{01} = 4 + 3 = 7 & \quad x_{02} = 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

$$x_{01} = 7 \quad \text{und} \quad x_{02} = 1 \quad (6)$$

0.22 QUADFKT-16a

Die Parabel mit der Quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $S(5|6)$ und verläuft durch den Punkt $P(6|8)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ und ihre Nullstellen, falls vorhanden! (20 P.)

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunkform** der Quadratischen Funktion an. Bekanntlich lautet die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Diese Formel wird nun angewendet und die Koordinaten von S eingesetzt:

$$f(x) = a \cdot (x - 5)^2 + 6 \quad (6)$$

Es fehlt nur noch der Formfaktor a . Den erhalte ich, indem ich die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung einsetze.

$$\begin{aligned} f(6) &= 8 \\ a \cdot (6 - 5)^2 + 6 &= 8 \\ a \cdot 1 + 6 &= 8 \quad | -6 \\ a &= 2 \quad (6) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 5)^2 + 6 \quad \text{oder:} \quad f(x) = 2x^2 - 20x + 56 \quad (2)$$

Nullstellenbestimmung, 1. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2 \cdot (x_0 - 5)^2 + 6 &= 0 & | :2 \\ (x_0 - 5)^2 + 3 &= 0 & | -3 \\ (x_0 - 5)^2 &= -3 & | \sqrt{} \\ x_0 - 5 &= \pm \sqrt{-3} \end{aligned}$$

Da die Zahl unter der Wurzel negativ ist, gibt es **keine** Nullstellen. (6)

Nullstellenbestimmung, 2. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0^2 - 20x_0 + 56 &= 0 & | :2 \\ x_0^2 - 10x_0 + 28 &= 0 \\ x_{01/02} &= 5 \pm \sqrt{25 - 28} \\ x_{01/02} &= 5 \pm \sqrt{-3} \end{aligned}$$

Da die Diskriminante negativ ist, gibt es **keine** Nullstellen. (6)

0.23 QUADFKT-16b

Die Parabel mit der Quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $S(4|6)$ und verläuft durch den Punkt $P(5|8)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ und ihre Nullstellen, falls vorhanden! (20 P.)

Lösung: Zur Lösung bietet sich die **Scheitelpunkform** der Quadratischen Funktion an. Bekanntlich lautet die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion mit dem Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Diese Formel wird nun angewendet und die Koordinaten von S eingesetzt:

$$f(x) = a \cdot (x - 4)^2 + 6 \quad (6)$$

Es fehlt nur noch der Formfaktor a . Den erhalte ich, indem ich die Koordinaten des Punktes P in die Funktionsgleichung einsetze.

$$\begin{aligned} f(5) &= 8 \\ a \cdot (5 - 4)^2 + 6 &= 8 \\ a \cdot 1 + 6 &= 8 \quad | -6 \\ a &= 2 \quad (6) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 4)^2 + 6 \quad \text{oder:} \quad f(x) = 2x^2 - 16x + 38 \quad (2)$$

Nullstellenbestimmung, 1. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2 \cdot (x_0 - 4)^2 + 6 &= 0 & | :2 \\ (x_0 - 4)^2 + 3 &= 0 & | -3 \\ (x_0 - 4)^2 &= -3 & | \sqrt{} \\ x_0 - 4 &= \pm \sqrt{-3} \end{aligned}$$

Da die Zahl unter der Wurzel negativ ist, gibt es **keine** Nullstellen. (6)

Nullstellenbestimmung, 2. Variante:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0^2 - 16x_0 + 38 &= 0 & | :2 \\ x_0^2 - 8x_0 + 19 &= 0 \\ x_{01/02} &= 4 \pm \sqrt{16 - 19} \\ x_{01/02} &= 4 \pm \sqrt{-3} \end{aligned}$$

Da die Diskriminante negativ ist, gibt es **keine** Nullstellen. (6)

0.24 QUADFKT-17

Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls vorhanden) der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = -x^2 + 8x - 28 \quad \text{und} \quad f_2(x) = x^2 - 14x + 20$$

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsgleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned} -x^2 + 8x - 28 &= x^2 - 14x + 20 & | -x^2 + 14x - 20 & \quad (3) \\ -2x^2 + 22x - 48 &= 0 & | : (-2) & \\ x^2 - 11x + 24 &= 0 & & \quad (3) \\ x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{11^2}{2^2} - 24} \\ x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{96}{4}} \\ x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2} \\ x_1 = 8 & \quad x_2 = 3 & & \quad (6) \end{aligned}$$

Zu beiden x -Werten muss der zugehörige y -Wert bestimmt werden. Dazu verwende ich willkürlich f_2 .

$$y_1 = f_2(x_1) = 8^2 - 14 \cdot 8 + 20 = -28 \quad (3)$$

$$y_2 = f_2(x_2) = 3^2 - 14 \cdot 3 + 20 = -13 \quad (3)$$

Zusammengefasste Lösungen: $S_1(8 | -28)$ und $S_2(3 | -13)$ (2)

0.25 QUADFKT-18

Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls vorhanden) der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = x^2 - 8x + 25 \quad \text{und} \quad f_2(x) = -x^2 + 14x - 23$$

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsgleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 8x + 25 & = & -x^2 + 14x - 23 \quad | +x^2 - 14x + 23 \quad (3) \\ 2x^2 - 22x + 48 & = & 0 \quad | : 2 \\ x^2 - 11x + 24 & = & 0 \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{11^2}{2^2} - 24} \\ x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{96}{4}} \\ x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ x_{1/2} &= \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2} \\ x_1 = 8 \quad x_2 = 3 & \quad (6) \end{aligned}$$

Zu beiden x -Werten muss der zugehörige y -Wert bestimmt werden. Dazu verwende ich willkürlich f_1 .

$$y_1 = f_1(x_1) = 8^2 - 8 \cdot 8 + 25 = 25 \quad (3)$$

$$y_2 = f_1(x_2) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 25 = 10 \quad (3)$$

Zusammengefasste Lösungen: $S_1(8|25)$ und $S_2(3|10)$ (2)

0.26 QUADFKT-19

Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls vorhanden) der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 4x^2 - 6x + 10 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 2x^2 + 4x + 2$$

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsgleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{array}{rcll} f_1(x_s) & = & f_2(x_s) & \\ 4x_s^2 - 6x_s + 10 & = & 2x_s^2 + 4x_s + 2 & | - 2x_s^2 - 4x_s - 2 \quad (3) \\ 2x_s^2 - 10x_s + 8 & = & 0 & | : 2 \\ x_s^2 - 5x_s + 4 & = & 0 & (3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{S1} &= 1 \quad x_{S2} = 4 \quad (6) \end{aligned}$$

Zu beiden x -Werten muss der zugehörige y -Wert bestimmt werden. Dazu verwende ich willkürlich f_2 .

$$y_{S1} = f_2(x_{S1}) = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 2 = 8 \quad (3)$$

$$y_{S2} = f_2(x_{S2}) = 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 2 = 50 \quad (3)$$

Zusammengefasste Lösungen: $S_1(1|8)$ und $S_2(4|50)$ (2)

0.27 QUADFKT-19b

Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls vorhanden) der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 5x^2 - 4x - 5 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 3x^2 + 2x + 3$$

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsgleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ 5x_s^2 - 4x_s - 5 &= 3x_s^2 + 2x_s + 3 & | -3x_s^2 - 2x_s - 3 & \quad (3) \\ 2x_s^2 - 6x_s - 8 &= 0 & | : 2 & \\ x_s^2 - 3x_s - 4 &= 0 & & \quad (3) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x_{S1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} \\ x_{S1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\ x_{S1} &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 & x_{S2} &= \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 & \quad (6) \end{aligned}$$

Zu beiden x -Werten muss der zugehörige y -Wert bestimmt werden. Dazu verwende ich willkürlich f_2 .

$$y_{S1} = f_2(x_{S1}) = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = 59 \quad (3)$$

$$y_{S2} = f_2(x_{S2}) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 4 \quad (3)$$

Zusammengefasste Lösungen: $S_1(4|59)$ und $S_2(-1|4)$ (2)

0.28 QUADFKT-20

Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls vorhanden) der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 4x^2 - 8x + 14 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 2x^2 + 2x + 6$$

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsgleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{array}{rcll} f_1(x_s) & = & f_2(x_s) & \\ 4x_s^2 - 8x_s + 14 & = & 2x_s^2 + 2x_s + 6 & \quad | - 2x_s^2 - 2x_s - 6 \quad (3) \\ 2x_s^2 - 10x_s + 8 & = & 0 & \quad | : 2 \\ x_s^2 - 5x_s + 4 & = & 0 & \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{S1} &= 1 \quad x_{S2} = 4 \quad (6) \end{aligned}$$

Zu beiden x -Werten muss der zugehörige y -Wert bestimmt werden. Dazu verwende ich willkürlich f_2 .

$$y_{S1} = f_2(x_{S1}) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 6 = 10 \quad (3)$$

$$y_{S2} = f_2(x_{S2}) = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 6 = 46 \quad (3)$$

Zusammengefasste Lösungen: $S_1(1|10)$ und $S_2(4|46)$ (2)

0.29 QUADFKT-21

Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls vorhanden) der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 6x^2 - 14x + 4 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 4x^2 - 4x - 4$$

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsgleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{array}{rcll} f_1(x_s) & = & f_2(x_s) & \\ 6x_s^2 - 14x_s + 4 & = & 4x_s^2 - 4x_s - 4 & \quad | -4x_s^2 + 4x_s + 4 \quad (3) \\ 2x_s^2 - 10x_s + 8 & = & 0 & \quad | : 2 \\ x_s^2 - 5x_s + 4 & = & 0 & \quad (3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{S1} &= 1 \quad x_{S2} = 4 \quad (6) \end{aligned}$$

Zu beiden x -Werten muss der zugehörige y -Wert bestimmt werden. Dazu verwende ich willkürlich f_2 .

$$y_{S1} = f_2(x_{S1}) = 4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 4 = -4 \quad (3)$$

$$y_{S2} = f_2(x_{S2}) = 4 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 4 = 44 \quad (3)$$

Zusammengefasste Lösungen: $S_1(1|-4)$ und $S_2(4|44)$ (2)

0.30 QUADFKT-22

Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls vorhanden) der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 6x^2 - 20x + 2 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 4x^2 - 10x - 6$$

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsgleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ 6x_s^2 - 20x_s + 2 &= 4x_s^2 - 10x_s - 6 & | -4x_s^2 + 10x_s + 6 & \quad (3) \\ 2x_s^2 - 10x_s + 8 &= 0 & | : 2 & \\ x_s^2 - 5x_s + 4 &= 0 & & \quad (3) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{S1} &= 1 \quad x_{S2} = 4 & & \quad (6) \end{aligned}$$

Zu beiden x -Werten muss der zugehörige y -Wert bestimmt werden. Dazu verwende ich willkürlich f_2 .

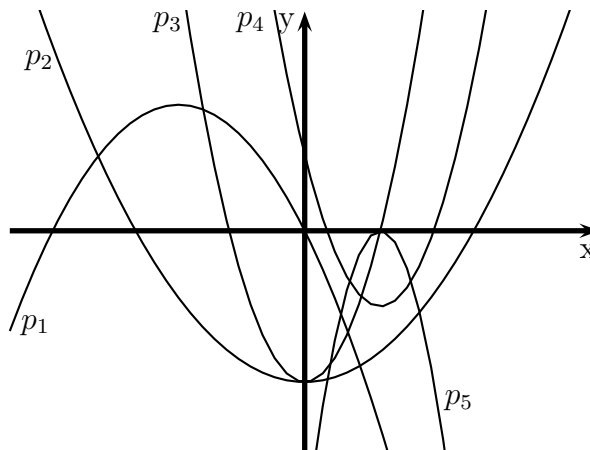
$$y_{S1} = f_2(x_{S1}) = 4 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 - 6 = -12 \quad (3)$$

$$y_{S2} = f_2(x_{S2}) = 4 \cdot 4^2 - 10 \cdot 4 - 6 = 18 \quad (3)$$

Zusammengefasste Lösungen: $S_1(1|-12)$ und $S_2(4|18)$ (2)

0.31 QUADFKT-23

Nebenstehend sind einige Parabeln dargestellt. Geben Sie an, welche Parabel zu welcher Funktionsgleichung passt, auch wenn im Diagramm keine Skalierung bekannt ist. Schreiben Sie dazu die Parabelbezeichnung hinter die jeweilige Funktionsgleichung. (je 3 P.)



$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f(x) = 0,2x^2 - 4$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 8$$

$$f(x) = -0,3x^2 - 2x$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

Lösung:

$$f(x) = x^2 - 4 \quad p_3$$

$$f(x) = 0,2x^2 - 4 \quad p_2$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 8 \quad p_5$$

$$f(x) = -0,3x^2 - 2x \quad p_1$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \quad p_4$$

Begründung:

Ich beziehe mich auf die Normalform: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = x^2 - 4$: Da $b = 0$ ist, liegt der Scheitelpunkt auf der y -Achse. Das trifft auf p_2 und p_3 zu. Der Parameter c ist negativ, daher liegt der y -Achsenabschnitt im negativen Bereich. Auch das trifft auf diese beiden Parabeln zu. Die Parabel p_2 ist sehr breit, hat also einen sehr kleinen Formfaktor a . Also bleibt nur p_3 übrig.

$f(x) = 0,2x^2 - 4$: Aus den Gründen, die bei der vorstehenden Funktion beschrieben wurden, muss es hier p_2 sein.

$f(x) = -2x^2 + 8x - 8$: Der Formfaktor a ist negativ mit größerem Betrag. Daher ist die Parabel nach unten geöffnet (p_1 und p_5) und schmal. Das passt nur auf p_5 .

$f(x) = -0,3x^2 - 2x$: Der Formfaktor ist negativ, die Parabel ist daher nach unten geöffnet. Das passt auf p_1 und p_5 . Aus $c = 0$ ergibt sich, dass die Parabel durch den Koordinatenursprung verläuft. Das passt nur für p_1 .

$f(x) = x^2 - 4x + 2$: Aus $c = 2$ ergibt sich ein positiver y -Achsenabschnitt. Das hat nur die Parabel p_4 .

0.32 QUADFKT-24

Nebstehend sind einige Parabeln dargestellt. Zu ihnen gehören die Funktionsgleichungen:

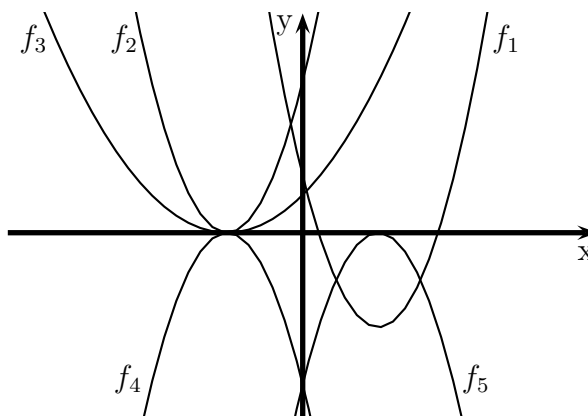
$$f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$$

$$f_4(x) = a_4x^2 + b_4x + c_4$$

$$f_5(x) = a_5x^2 + b_5x + c_5$$



Kreuzen Sie bei den nachfolgenden Behauptungen die jeweils richtige an.
(je 3 P.)

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---|
| <input type="radio"/> $c_1 > c_2$ | <input type="radio"/> $c_1 = c_2$ | <input type="radio"/> $c_1 < c_2$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |
| <input type="radio"/> $a_2 > a_3$ | <input type="radio"/> $a_2 = a_3$ | <input type="radio"/> $a_2 < a_3$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |
| <input type="radio"/> $a_2 > a_4$ | <input type="radio"/> $a_2 = a_4$ | <input type="radio"/> $a_2 < a_4$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |
| <input type="radio"/> $a_5 > a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 = a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 < a_4$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |
| <input type="radio"/> $c_5 > c_4$ | <input type="radio"/> $c_5 = c_4$ | <input type="radio"/> $c_5 < c_4$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |

Lösung:

- | | | | |
|--|--|--|---|
| <input type="radio"/> $c_1 > c_2$ | <input type="radio"/> $c_1 = c_2$ | <input checked="" type="radio"/> $c_1 < c_2$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |
| <input checked="" type="radio"/> $a_2 > a_3$ | <input type="radio"/> $a_2 = a_3$ | <input type="radio"/> $a_2 < a_3$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |
| <input checked="" type="radio"/> $a_2 > a_4$ | <input type="radio"/> $a_2 = a_4$ | <input type="radio"/> $a_2 < a_4$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |
| <input type="radio"/> $a_5 > a_4$ | <input checked="" type="radio"/> $a_5 = a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 < a_4$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |
| <input type="radio"/> $c_5 > c_4$ | <input checked="" type="radio"/> $c_5 = c_4$ | <input type="radio"/> $c_5 < c_4$ | <input type="radio"/> Keine der Aussagen ist richtig. |

0.33 QUADFKT-25

Nebenstehend sind einige Parabeln dargestellt. Zu ihnen gehören die Funktionsgleichungen:

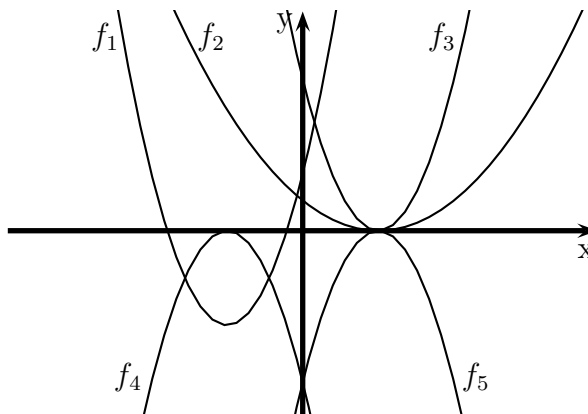
$$f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$$

$$f_4(x) = a_4x^2 + b_4x + c_4$$

$$f_5(x) = a_5x^2 + b_5x + c_5$$



Kreuzen Sie bei den nachfolgenden Behauptungen die jeweils richtigen an. Mehrfachnennungen sind möglich. (je 3 P.)

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| <input type="radio"/> $a_1 > a_4$ | <input type="radio"/> $a_1 = a_4$ | <input type="radio"/> $a_1 < a_4$ | <input type="radio"/> $a_1 = -a_4$ |
| <input type="radio"/> $c_1 > c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 = c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 < c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 = -c_3$ |
| <input type="radio"/> $a_2 > a_3$ | <input type="radio"/> $a_2 = a_3$ | <input type="radio"/> $a_2 < a_3$ | <input type="radio"/> $a_2 = -a_3$ |
| <input type="radio"/> $a_5 > a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 = a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 < a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 = -a_2$ |
| <input type="radio"/> $c_5 > c_4$ | <input type="radio"/> $c_5 = c_4$ | <input type="radio"/> $c_5 < c_4$ | <input type="radio"/> $c_5 = -c_4$ |

Lösung:

- | | | | |
|--|--|--|---|
| <input checked="" type="radio"/> $a_1 > a_4$ | <input type="radio"/> $a_1 = a_4$ | <input type="radio"/> $a_1 < a_4$ | <input checked="" type="radio"/> $a_1 = -a_4$ |
| <input type="radio"/> $c_1 > c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 = c_3$ | <input checked="" type="radio"/> $c_1 < c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 = -c_3$ |
| <input type="radio"/> $a_2 > a_3$ | <input type="radio"/> $a_2 = a_3$ | <input checked="" type="radio"/> $a_2 < a_3$ | <input type="radio"/> $a_2 = -a_3$ |
| <input type="radio"/> $a_5 > a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 = a_2$ | <input checked="" type="radio"/> $a_5 < a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 = -a_2$ |
| <input type="radio"/> $c_5 > c_4$ | <input checked="" type="radio"/> $c_5 = c_4$ | <input type="radio"/> $c_5 < c_4$ | <input type="radio"/> $c_5 = -c_4$ |

0.34 QUADFKT-26

Nebenstehend sind einige Parabeln dargestellt. Zu ihnen gehören die Funktionsgleichungen:

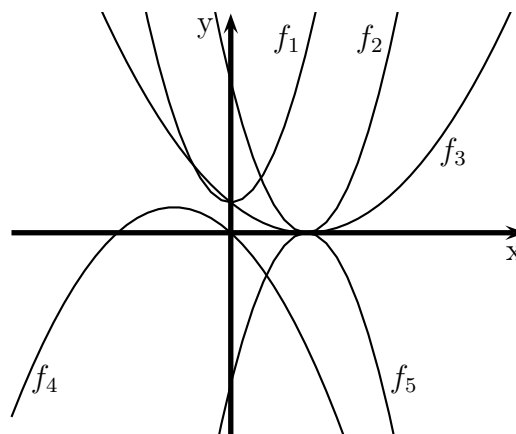
$$f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$f_3(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$$

$$f_4(x) = a_4x^2 + b_4x + c_4$$

$$f_5(x) = a_5x^2 + b_5x + c_5$$



Entscheiden Sie durch Ankreuzen, welche der nachfolgenden Behauptungen jeweils richtig sind. Mehrfachnennungen sind möglich.

(je 3 P.)

- | | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| <input type="radio"/> $c_1 > c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 = c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 < c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 = -c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 = 0$ |
| <input type="radio"/> $a_5 > a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 = a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 < a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 = -a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 = 0$ |
| <input type="radio"/> $c_4 > c_5$ | <input type="radio"/> $c_4 = c_5$ | <input type="radio"/> $c_4 < c_5$ | <input type="radio"/> $c_4 = -c_5$ | <input type="radio"/> $c_4 = 0$ |
| <input type="radio"/> $a_5 > a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 = a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 < a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 = -a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 = 0$ |
| <input type="radio"/> $c_2 > c_5$ | <input type="radio"/> $c_2 = c_5$ | <input type="radio"/> $c_2 < c_5$ | <input type="radio"/> $c_2 = -c_5$ | <input type="radio"/> $c_2 = 0$ |

Lösung:

- | | | | | |
|--|--|--|---|--|
| <input type="radio"/> $c_1 > c_3$ | <input checked="" type="radio"/> $c_1 = c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 < c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 = -c_3$ | <input type="radio"/> $c_1 = 0$ |
| <input type="radio"/> $a_5 > a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 = a_4$ | <input checked="" type="radio"/> $a_5 < a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 = -a_4$ | <input type="radio"/> $a_5 = 0$ |
| <input checked="" type="radio"/> $c_4 > c_5$ | <input type="radio"/> $c_4 = c_5$ | <input type="radio"/> $c_4 < c_5$ | <input type="radio"/> $c_4 = -c_5$ | <input checked="" type="radio"/> $c_4 = 0$ |
| <input type="radio"/> $a_5 > a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 = a_2$ | <input checked="" type="radio"/> $a_5 < a_2$ | <input checked="" type="radio"/> $a_5 = -a_2$ | <input type="radio"/> $a_5 = 0$ |
| <input checked="" type="radio"/> $c_2 > c_5$ | <input type="radio"/> $c_2 = c_5$ | <input type="radio"/> $c_2 < c_5$ | <input checked="" type="radio"/> $c_2 = -c_5$ | <input type="radio"/> $c_2 = 0$ |

0.35 QUADFKT-27

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion in Normalform:

$$f(x) = 5x^2 - 40x + 35$$

Wandeln Sie die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform um! (20 P.)

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 40x + 35 && | : 5 \\ \frac{f(x)}{5} &= x^2 - 8x + 7 && | \text{ Quad. Ergänz. } (4) \\ \frac{f(x)}{5} &= x^2 - 8x + 16 - 16 + 7 && (4) \\ \frac{f(x)}{5} &= (x - 4)^2 - 16 + 7 && (4) \\ \frac{f(x)}{5} &= (x - 4)^2 - 9 && | \cdot 5 \quad (4) \\ f(x) &= 5 \cdot (x - 4)^2 - 45 && (4) \end{aligned}$$

Alternative Lösung: Man kann auch die Koordinaten des Scheitelpunktes berechnen und damit die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform aufstellen.

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{b}{2a} \\ x_s &= -\frac{-40}{2 \cdot 5} \\ x_s &= 4 && (8) \\ y_s &= f(x_s) \\ &= 5x_s^2 - 40x_s + 35 \\ &= 5 \cdot 4^2 - 40 \cdot 4 + 35 \\ y_s &= -45 && (8) \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $S(4|-45)$. Der Formfaktor kann mir $a = 5$ aus der Normalform abgelesen werden. Damit kann die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform angegeben werden.

$$f(x) = 5 \cdot (x - 4)^2 - 45 \quad (4)$$

0.36 QUADFKT-28

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion in Normalform:

$$f(x) = 2x^2 - 6x - 8$$

Wandeln Sie die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform um und geben Sie den Scheitelpunkt an! (20 P.)

Lösungsvariante 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 6x - 8 && | : 2 \\ \frac{f(x)}{2} &= x^2 - 3x - 4 && | \text{Quad. Ergänz.} \quad (4) \\ \frac{f(x)}{2} &= x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 && (4) \\ \frac{f(x)}{2} &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{16}{4} \\ \frac{f(x)}{2} &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} && | \cdot 2 \quad (4) \\ f(x) &= 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform lautet: $f(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$ (4)

Der Scheitelpunkt kann abgelesen werden: $S\left(\frac{3}{2} | \frac{25}{2}\right)$ (4)

Lösungsvariante 2: Man kann auch die Koordinaten des Scheitelpunktes berechnen und damit die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform aufstellen.

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{b}{2a} \\ x_s &= -\frac{-6}{2 \cdot 2} \\ x_s &= \frac{3}{2} \quad (6) \\ y_s &= f(x_s) \\ &= 2x_s^2 - 6x_s - 8 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} - 8 \\ y_s &= -\frac{25}{2} \quad (6) \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $S(\frac{3}{2} | -\frac{25}{2})$ (3)

Der Formfaktor kann mit $a = 2$ aus der Normalform abgelesen werden. Damit kann die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform angegeben werden:

$$f(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} \quad (5)$$

0.37 QUADFKT-29

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion in Normalform:

$$f(x) = 7x^2 - 4x - 14$$

Wandeln Sie die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform um und geben Sie den Scheitelpunkt an! (20 P.)

Lösungsvariante 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= 7x^2 - 4x - 14 && | : 7 \\ \frac{f(x)}{7} &= x^2 - \frac{4}{7}x - 2 && | \text{Quad. Ergänz.} \quad (4) \\ \frac{f(x)}{7} &= x^2 - \frac{4}{7}x + \left(\frac{2}{7}\right)^2 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 - 2 && (4) \\ \frac{f(x)}{7} &= \left(x - \frac{2}{7}\right)^2 - \frac{4}{49} - \frac{98}{49} \\ \frac{f(x)}{7} &= \left(x - \frac{2}{7}\right)^2 - \frac{102}{49} && | \cdot 7 \quad (4) \\ f(x) &= 7 \cdot \left(x - \frac{2}{7}\right)^2 - \frac{102}{7} \end{aligned}$$

Die Scheitelpunktform lautet: $f(x) = 7 \cdot \left(x - \frac{2}{7}\right)^2 - \frac{102}{7}$ (4)

Der Scheitelpunkt kann abgelesen werden: $S\left(\frac{2}{7} \mid -\frac{102}{7}\right)$ (4)

Lösungsvariante 2: Die Formel zur Scheitelpunktbestimmung wird angewendet.

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-4}{2 \cdot 7} \\ x_s &= \frac{2}{7} \quad (6) \\ y_s &= f(x_s) \\ &= 7 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{7} - 14 \\ &= \frac{4}{7} - \frac{8}{7} - \frac{98}{7} \\ y_s &= -\frac{102}{7} \quad (6) \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $S\left(\frac{2}{7} \mid -\frac{102}{7}\right)$ (3)

Der Formfaktor kann mit $a = 7$ aus der Normalform abgelesen werden. Damit kann die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform angegeben werden:

$$f(x) = 7 \cdot \left(x - \frac{2}{7}\right)^2 - \frac{102}{7} \quad (5)$$

0.38 QUADFKT-31

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion in Normalform:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 15$$

Wandeln Sie die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform um und geben Sie den Scheitelpunkt an! (20 P.)

Lösungsvariante 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 5x + 15 && | : 3 \\ \frac{f(x)}{3} &= x^2 - \frac{5}{3}x + 5 && | \text{ Quadr. Ergänz. } (4) \\ \frac{f(x)}{3} &= x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5 && (4) \\ \frac{f(x)}{3} &= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{180}{36} \\ \frac{f(x)}{3} &= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{155}{36} && | \cdot 3 \quad (4) \\ f(x) &= 3 \cdot \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{155}{12} \end{aligned}$$

Die Scheitelpunktform lautet: $f(x) = 3 \cdot \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{155}{12}$ (4)

Der Scheitelpunkt kann abgelesen werden: $S\left(\frac{5}{6} \mid \frac{155}{12}\right)$ (4)

Lösungsvariante 2: Die Formel zur Scheitelpunktbestimmung wird angewendet.

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-5}{2 \cdot 3} \\ x_s &= \frac{5}{6} \quad (6) \\ y_s &= f(x_s) \\ &= 3 \cdot x_s^2 - 5 \cdot x_s + 15 \\ &= 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} + 15 \\ &= \frac{25}{12} - \frac{50}{12} + \frac{180}{12} \\ y_s &= \frac{155}{12} \quad (6) \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $S\left(\frac{5}{6} \mid \frac{155}{12}\right)$ (3)

Der Formfaktor kann mit $a = 3$ aus der Normalform abgelesen werden. Damit kann die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform angegeben werden:

$$f(x) = 3 \cdot \left(x^2 - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{155}{12} \quad (5)$$

0.39 QUADFKT-32

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer Quadratischen Funktion in Normalform:

$$f(x) = 6x^2 - 2x + 18$$

Leiten Sie aus der gegebenen Normalform die Scheitelpunktform her und geben Sie den Scheitelpunkt an! (20 P.)

Lösungsvariante 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^2 - 2x + 18 && | : 6 \\ \frac{f(x)}{6} &= x^2 - \frac{1}{3}x + 3 && | \text{Quadr. Ergänz.} \quad (4) \\ \frac{f(x)}{6} &= x^2 - \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 && (4) \\ \frac{f(x)}{6} &= \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} + \frac{108}{36} \\ \frac{f(x)}{6} &= \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{107}{36} && | \cdot 6 \quad (4) \\ f(x) &= 6 \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{107}{6} \end{aligned}$$

Die Scheitelpunktform lautet: $f(x) = 6 \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{107}{6}$ (4)

Der Scheitelpunkt kann abgelesen werden: $S\left(\frac{1}{6} \mid \frac{107}{6}\right)$ (4)

0.40 QUADFKT-33

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Parabel (Quadratische Funktion), die durch die Punkte $P_1(-1|1)$, $P_2(0|3)$ und $P_3(2|19)$ verläuft! (20 P.)

Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die drei Punkte werden mit ihren Koordinaten in die Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{array}{lclcl} P_1 : & f(-1) & = & 1 & \Rightarrow & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & = & 1 & (2) \\ P_2 : & f(0) & = & 3 & \Rightarrow & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 3 & (2) \\ P_3 : & f(2) & = & 19 & \Rightarrow & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 19 & (2) \end{array}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort:

$$c = 3 \quad (2)$$

Wir setzen das Ergebnis in die beiden anderen Gleichungen ein.

$$\begin{array}{rclcl} (1) & a & -b & +3 & = & 1 & | -3 \\ (3) & 4a & +2b & +3 & = & 19 & | -3 \\ \hline (1) & a & -b & & = & -2 & (1) \\ (3) & 4a & +2b & & = & 16 & (1) \end{array}$$

Wir haben jetzt ein Lineargleichungssystem in Normalform. Es bietet sich das Einsetzungsverfahren an. Dazu löst man am besten die Gleichung (1) nach a auf.

$$\begin{array}{rclcl} a - b & = & -2 & | +b \\ a & = & b - 2 & (3) \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird nun in Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{array}{rclcl} 4a + 2b & = & 16 \\ 4 \cdot (b - 2) + 2b & = & 16 \\ 4b - 8 + 2b & = & 16 & | +8 \\ 6b & = & 24 & | :6 \\ b & = & 4 & (3) \end{array}$$

Jetzt fehlt nur noch Parameter a . Dazu setzen wir das Ergebnis für b in die umgestellte Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rclcl} a & = & b - 2 \\ & = & 4 - 2 \\ a & = & 2 & (3) \end{array}$$

Damit sind alle Parameter bekannt. Die Funktionsgleichung kann angegeben werden.

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 3 \quad (1)$$

0.41 QUADFKT-34a

Eine Normalparabel (Formfaktor $a = 1$) verläuft durch die Punkte $P(-7|5)$ und $Q(-9|21)$. Berechnen Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$ sowie den Scheitelpunkt S der Parabel! (20 P.)

Lösung: Mit $a = 1$ lautet die Normalform:

$$f(x) = x^2 + bx + c \quad (1)$$

Die Koordinaten beider Punkte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} (1) & f(-7) & = 5 \Rightarrow (-7)^2 + b \cdot (-7) + c = 5 \\ (2) & f(-9) & = 21 \Rightarrow (-9)^2 + b \cdot (-9) + c = 21 \end{array} \quad (4)$$

Die beiden Gleichungen werden in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 49 - 7b + c & = 5 \quad | - 49 \\ (2) & 81 - 9b + c & = 21 \quad | - 81 \\ \hline (1) & -7b + c & = -44 \\ (2) & -9b + c & = -60 \end{array} \quad (2)$$

Zur Lösung des Lineargleichungssystems bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an.¹ Die Gleichung (2) wird von Gleichung (1) subtrahiert.

$$\begin{array}{rcl} (1) & -7b + c & = -44 \quad | \\ (2) & -9b + c & = -60 \quad | - \\ \hline & 2b & = 16 \quad | : 2 \\ & b & = 8 \end{array} \quad (5)$$

Zur Bestimmung von c wird das Ergebnis in (1) oder (2) eingesetzt. Beispielhaft wird hier (1) verwendet.

$$\begin{array}{rcl} -7b + c & = & -44 \\ -7 \cdot 8 + c & = & -44 \quad | + 56 \\ c & = & 12 \end{array} \quad (2)$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = x^2 + 8x + 12$ (1)

Zur Scheitelpunktbestimmung bietet sich die Berechnungsformel an.

$$\begin{array}{lcl} x_s & = & -\frac{b}{2a} \\ & = & -\frac{8}{2 \cdot 1} \\ x_s & = & -4 \end{array} \quad (2)$$

¹Auch sinnvoll wäre das Einsetzungsverfahren nutzbar, indem eine der beiden Gleichungen nach c aufgelöst würde.

Den zugehörigen Funktionswert y_s liefert die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}y_s &= f(x_s) \\&= x_s^2 + 8x_s + 12 \\&= (-4)^2 + 8 \cdot (-4) + 12 \\&= 16 - 32 + 12 \\y_s &= -4\end{aligned}\tag{2}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $S(-4|-4)$ (1)

0.42 QUADFKT-34b

Eine Normalparabel (Formfaktor $a = 1$) verläuft durch die Punkte $P(-6|5)$ und $Q(-8|21)$. Berechnen Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$ sowie den Scheitelpunkt S der Parabel! (20 P.)

Lösung: Mit $a = 1$ lautet die Normalform:

$$f(x) = x^2 + bx + c \quad (1)$$

Die Koordinaten beider Punkte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} (1) & f(-6) & = 5 \Rightarrow (-6)^2 + b \cdot (-6) + c = 5 \\ (2) & f(-8) & = 21 \Rightarrow (-8)^2 + b \cdot (-8) + c = 21 \end{array} \quad (4)$$

Die beiden Gleichungen werden in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 36 - 6b + c & = 5 \quad | - 36 \\ (2) & 64 - 8b + c & = 21 \quad | - 64 \\ \hline (1) & -6b + c & = -31 \\ (2) & -8b + c & = -43 \end{array} \quad (2)$$

Zur Lösung des Lineargleichungssystems bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an.² Die Gleichung (2) wird von Gleichung (1) subtrahiert.

$$\begin{array}{rcl} (1) & -6b + c & = -31 \quad | \\ (2) & -8b + c & = -43 \quad | - \\ \hline & 2b & = 12 \quad | : 2 \\ & b & = 6 \end{array} \quad (5)$$

Zur Bestimmung von c wird das Ergebnis in (1) oder (2) eingesetzt. Beispielhaft wird hier (1) verwendet.

$$\begin{array}{rcl} -6b + c & = & -31 \\ -6 \cdot 6 + c & = & -31 \quad | + 36 \\ c & = & 5 \end{array} \quad (2)$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = x^2 + 6x + 5$ (1)

Zur Scheitelpunktbestimmung bietet sich die Berechnungsformel an.

$$\begin{array}{lcl} x_s & = & -\frac{b}{2a} \\ & = & -\frac{6}{2 \cdot 1} \\ x_s & = & -3 \end{array} \quad (2)$$

²Auch sinnvoll wäre das Einsetzungsverfahren nutzbar, indem eine der beiden Gleichungen nach c aufgelöst würde.

Den zugehörigen Funktionswert y_s liefert die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}y_s &= f(x_s) \\&= x_s^2 + 6x_s + 5 \\&= (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 5 \\&= 9 - 18 + 5 \\y_s &= -4\end{aligned}\tag{2}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $S(-3|-4)$ (1)

0.43 QUADFKT-35

Eine Parabel mit dem Formfaktor $a = 2$ verläuft durch die Punkte $P(-3|36)$ und $Q\left(\frac{3}{7}|\frac{60}{49}\right)$. Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörige Quadratische Funktion $f(x)$.

Lösung: Mit $a = 2$ lautet die Normalform:

$$f(x) = 2x^2 + bx + c \quad (1)$$

Die Koordinaten beider Punkte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} (1) & f(-3) & = 5 \Rightarrow 2 \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 36 \\ (2) & f\left(\frac{3}{7}\right) & = \frac{60}{49} \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 + b \cdot \frac{3}{7} + c = \frac{60}{49} \end{array} \quad (4)$$

Die beiden Gleichungen werden in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 2 \cdot 9 - 3b + c & = 36 \quad | - 18 \\ (2) & 2 \cdot \frac{9}{49} + \frac{3}{7} \cdot b + c & = \frac{60}{49} \quad | - \frac{18}{49} \\ \hline (1) & -3b + c & = 18 \\ (2) & \frac{3}{7} \cdot b + c & = \frac{42}{49} \quad | \cdot 49 \\ \hline (1) & -3b + c & = 18 \\ (2) & 21b + 49c & = 42 \end{array} \quad (6)$$

Hier bietet sich das Einsetzungsverfahren zur Lösung an, indem (1) nach c aufgelöst und in (2) eingesetzt wird.

$$\begin{array}{lcl} -3b + c & = & 18 \quad | + 3b \\ c & = & 18 + 3b \end{array}$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{array}{lcl} 21b + 49c & = & 42 \\ 21b + 49 \cdot (18 + 3b) & = & 42 \\ 21b + 882 + 147b & = & 42 \quad | - 882 \\ 168b & = & -840 \quad | : 168 \\ b & = & -5 \end{array} \quad (6)$$

Der Wert wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} c & = & 18 + 3b \\ & = & 18 + 3 \cdot (-5) \\ c & = & 3 \end{array} \quad (2)$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ (1)

0.44 QUADFKT-36

Eine Parabel mit dem Formfaktor $a = 3$ verläuft durch die Punkte $P(-3|45)$ und $Q(\frac{2}{3}|1)$. Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörige Quadratische Funktion $f(x)$. Berechnen Sie auch den Scheitelpunkt der Parabel! (20 P.)

Lösung: Mit $a = 3$ lautet die Normalform:

$$f(x) = 3x^2 + bx + c \quad (2)$$

Die Koordinaten beider Punkte werden eingesetzt.

$$(1) \quad f(-3) = 45 \Rightarrow 3 \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 45 \quad (2)$$

$$(2) \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + b \cdot \frac{2}{3} + c = 1 \quad (2)$$

Die beiden Gleichungen werden in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{rcll} (1) & 3 \cdot 9 - 3b + c & = & 45 \quad | - 27 \\ (2) & 3 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \cdot b + c & = & 1 \quad | - \frac{4}{3} \\ \hline (1) & -3b + c & = & 18 \\ (2) & \frac{2}{3} \cdot b + c & = & -\frac{1}{3} \quad | \cdot 3 \\ \hline (1) & -3b + c & = & 18 \quad (1) \\ (2) & 2b + 3c & = & -1 \quad (1) \end{array}$$

Hier bietet sich das Einsetzungsverfahren zur Lösung an, indem (1) nach c aufgelöst und in (2) eingesetzt wird.

$$\begin{array}{rcl} -3b + c & = & 18 \quad | + 3b \\ c & = & 18 + 3b \end{array}$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{array}{rcll} & 2b + 3c & = & -1 \\ & 2b + 3 \cdot (18 + 3b) & = & -1 \\ & 2b + 54 + 9b & = & -1 \quad | - 54 \\ & 11b & = & -55 \quad | : 11 \\ & b & = & -5 \quad (5) \end{array}$$

Der Wert wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} c & = & 18 + 3b \\ & = & 18 + 3 \cdot (-5) \\ c & = & 3 \quad (2) \end{array}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$ (1)

Zur Scheitelpunktbestimmung bietet sich die Berechnungsformel an.

$$\begin{aligned}x_s &= -\frac{b}{2a} \\&= -\frac{-5}{2 \cdot 3} \\x_s &= \frac{5}{6} \quad (2)\end{aligned}$$

Den zugehörigen Funktionswert y_s liefert die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned}y_s &= f(x_s) \\&= 3x_s^2 - 5x_s + 3 \\&= 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} + 3 \\&= \frac{25}{12} - \frac{25}{6} + 3 \\&= \frac{25}{12} - \frac{50}{12} + \frac{36}{12} \\y_s &= \frac{11}{12} \quad (2)\end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $S\left(\frac{5}{6} \mid \frac{11}{12}\right)$ (1)

0.45 QUADFKT-37

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $P_1(2|4)$ und $P_2(5|13)$. Die y -Achse schneidet sie bei $y_0 = 28$. Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörige Funktionsgleichung! (20 P.)

Lösung:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Mit $y_0 = 28$ ergibt sich:

$$f(x) = ax^2 + bx + 28$$

Die Punkte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} (1) & f(2) = 4 & \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 28 = 4 \quad (2) \\ (2) & f(5) = 13 & \Rightarrow a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 28 = 13 \quad (2) \end{array}$$

Die beiden Gleichungen werden in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{rcl} (1) & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 28 & = 4 \quad | - 28 \\ (2) & a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 28 & = 13 \quad | - 28 \\ \hline (1) & 4a + 2b & = -24 \\ (2) & 25a + 5b & = -15 \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach b umgestellt.

$$\begin{array}{rcl} 4a + 2b & = & -24 \quad | - 4a \\ 2b & = & -24 - 4a \quad | : 2 \\ b & = & -12 - 2a \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 25a + 5b & = & -15 \\ 25a + 5 \cdot (-12 - 2a) & = & -15 \\ 25a - 60 - 10a & = & -15 \quad | + 60 \\ 15a & = & 45 \quad | : 15 \\ a & = & 3 \end{array}$$

Durch Einsetzen des Ergebnisses in die umgestellte Gleichung (1) erhält man b .

$$b = -12 - 2a = -12 - 2 \cdot 3 = -18$$

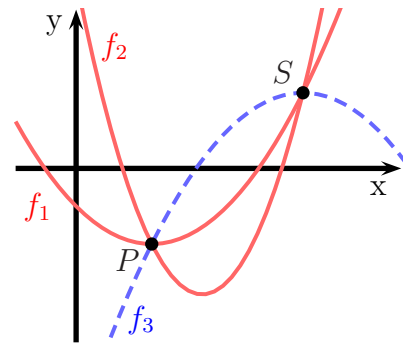
Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 3x^2 - 18x + 28$

0.46 QUADFKT-38

Die beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{2}$$

schneiden sich in S und P wie nebenstehend dargestellt. Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung $f_3(x)$ der Parabel, die ebenfalls durch S und P verläuft, wobei der **rechte** Schnittpunkt S gleichzeitig den Scheitelpunkt von f_3 darstellt. (20 P.)



Lösung: Zuerst werden die Schnittpunkte bestimmt.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ \frac{1}{2}x_s^2 - x_s - \frac{1}{2} &= \frac{3}{2}x_s^2 - 5x_s + \frac{5}{2} & | -\frac{3}{2}x_s^2 + 5x_s - \frac{5}{2} \\ -x_s^2 + 4x_s - 3 &= 0 & | \cdot (-1) \\ x_s^2 - 4x_s + 3 &= 0 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_{1/2} &= 2 \pm 1 \\ x_1 &= 3 & x_2 = 1 \end{aligned}$$

Die zugehörigen y -Werte werden berechnet. Dies kann wahlweise mit f_1 oder mit f_2 durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1) \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{2} - \frac{6}{2} - \frac{1}{2} \\ y_1 &= 1 \\ y_2 &= f_1(x_2) \\ &= \frac{1}{2}x_2^2 - x_2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \\ y_2 &= -1 \end{aligned}$$

Wir erhalten die Schnittpunkte: $S(3|1)$ und $P(1|-1)$

Mit diesen Werten lautet die gesuchte Funktion:

$$f_3(x) = a \cdot (x - 3)^2 + 1$$

Um den Formfaktor a zu bestimmen werden die Koordinaten des Punktes P eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} f_3(1) & = & -1 \\ a \cdot (1 - 3)^2 + 1 & = & -1 \\ a \cdot 4 + 1 & = & -1 \quad | -1 \\ 4a & = & -2 \quad | :4 \\ a & = & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Ergebnis: $f_3(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 3)^2 + 1$

Wer mag, kann die Funktionsgleichung noch in die Normalform umwandeln. Verlangt ist das aber nicht. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (x - 3)^2 + 1 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 6x + 9) + 1 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} + 1 \\ f_3(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

0.47 QUADFKT-39

Berechnen Sie die **Nullstellen** x_{01} und x_{02} sowie den **Scheitelpunkt** $S(x_s|y_s)$ der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3x^2 - 12x - 15$!

Lösung:

1. Nullstellenbestimmung: Zur Nullstellenberechnung muss der Funktionsterm gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{aligned} 3x_0^2 - 12x_0 - 15 &= 0 & | : 3 & \quad (2) \\ x_0^2 - 4x_0 - 5 &= 0 & | \text{ p-q-Formel} & \quad (2) \\ x_{01/02} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-5)} & & \quad (2) \\ &= 2 \pm \sqrt{4 + 5} & & \\ &= 2 \pm 3 & & \quad (2) \\ x_{01} = 2 + 3 = 5 & \quad x_{02} = 2 - 3 = -1 & & \quad (2) \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Nullstellen liegen bei $x_{01} = 5$ und $x_{02} = -1$.

2. Scheitelpunktbestimmung: Der x -Wert x_s des Scheitelpunktes kann mit der Scheitelpunktformel bestimmt werden.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2 \quad (5)$$

Den zugehörigen y -Wert y_s liefert die Funktionsgleichung, wenn man für x den gefundenen Wert x_s einsetzt.

$$y_s = 3x_s^2 - 12x_s - 15 = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 15 = 12 - 24 - 15 = -27 \quad (4)$$

Ergebnis: Der Scheitelpunkt liegt bei $S(2|-27)$. (1)

0.48 QUADFKT-40

Berechnen Sie die **Nullstellen** x_{01} und x_{02} sowie den **Scheitelpunkt** $S(x_s|y_s)$ der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 4x^2 + 8x - 32$!

Lösung:

1. Nullstellenbestimmung: Zur Nullstellenberechnung muss der Funktionsterm gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll} 4x_0^2 + 8x_0 - 32 & = & 0 & | : 4 \quad (2) \\ x_0^2 + 2x_0 - 8 & = & 0 & | \text{ p-q-Formel } \quad (2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{01/02} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-8)} & (2) \\ &= -1 \pm \sqrt{1+8} \\ &= -1 \pm 3 & (2) \end{aligned}$$

$$x_{01} = -1 + 3 = 2 \qquad x_{02} = -1 - 3 = -4 \quad (2)$$

Ergebnis: Die Nullstellen liegen bei $x_{01} = 2$ und $x_{02} = -4$.

2. Scheitelpunktbestimmung: Der x -Wert x_s des Scheitelpunktes kann mit der Scheitelpunktformel bestimmt werden.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 4} = -1 \quad (5)$$

Den zugehörigen y -Wert y_s liefert die Funktionsgleichung, wenn man für x den gefundenen Wert x_s einsetzt.

$$y_s = 4x_s^2 + 8x_s - 32 = 4 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 32 = 4 - 8 - 32 = -36 \quad (4)$$

Ergebnis: Der Scheitelpunkt liegt bei $S(-1|-36)$. (1)

0.49 QUADFKT-41

Berechnen Sie die **Nullstellen** x_{01} und x_{02} sowie den **Scheitelpunkt** $S(x_s|y_s)$ der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 5x^2 + 10x - 15$!

Lösung:

1. Nullstellenbestimmung: Zur Nullstellenberechnung muss der Funktionsterm gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll} 5x_0^2 + 10x_0 - 15 & = & 0 & | : 5 \quad (2) \\ x_0^2 + 2x_0 - 3 & = & 0 & | \text{ p-q-Formel } \quad (2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{01/02} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)} & (2) \\ &= -1 \pm \sqrt{1+3} \\ &= -1 \pm 2 & (2) \end{aligned}$$

$$x_{01} = -1 + 2 = 1 \quad x_{02} = -1 - 2 = -3 \quad (2)$$

Ergebnis: Die Nullstellen liegen bei $x_{01} = 1$ und $x_{02} = -3$.

2. Scheitelpunktbestimmung: Der x -Wert x_s des Scheitelpunktes kann mit der Scheitelpunktformel (siehe Regelheft) bestimmt werden.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot 5} = -1 \quad (5)$$

Den zugehörigen y -Wert y_s liefert die Funktionsgleichung, wenn man für x den gefundenen Wert x_s einsetzt.

$$y_s = 5x_s^2 + 10x_s - 15 = 5 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) - 15 = 5 - 10 - 15 = -20 \quad (4)$$

Ergebnis: Der Scheitelpunkt liegt bei $S(-1|-20)$. (1)

0.50 QUADFKT-42

Berechnen Sie die **Nullstellen** x_{01} und x_{02} sowie den **Scheitelpunkt** $S(x_s|y_s)$ der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 6x^2 + 12x - 48$!

Lösung:

1. Nullstellenbestimmung: Zur Nullstellenberechnung muss der Funktionsterm gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll} 6x_0^2 + 12x_0 - 48 & = & 0 & | : 6 \quad (2) \\ x_0^2 + 2x_0 - 8 & = & 0 & | \text{ p-q-Formel } \quad (2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{01/02} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-8)} & (2) \\ &= -1 \pm \sqrt{1 + 8} \\ &= -1 \pm 3 & (2) \end{aligned}$$

$$x_{01} = -1 + 3 = 2 \qquad x_{02} = -1 - 3 = -4 \quad (2)$$

Ergebnis: Die Nullstellen liegen bei $x_{01} = 2$ und $x_{02} = -4$.

2. Scheitelpunktbestimmung: Der x -Wert x_s des Scheitelpunktes kann mit der Scheitelpunktformel (siehe Regelheft) bestimmt werden.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot 6} = -1 \quad (5)$$

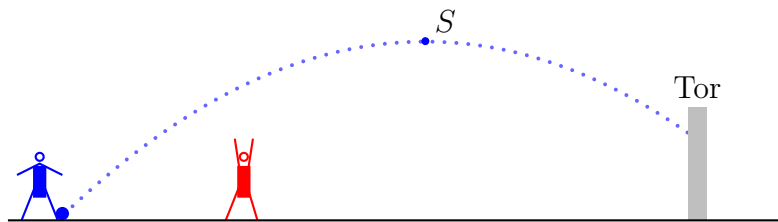
Den zugehörigen y -Wert y_s liefert die Funktionsgleichung, wenn man für x den gefundenen Wert x_s einsetzt.

$$y_s = 6x_s^2 + 12x_s - 48 = 6 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) - 48 = 6 - 12 - 48 = -54 \quad (4)$$

Ergebnis: Der Scheitelpunkt liegt bei $S(-1|-54)$. (1)

0.51 QUADFKT-43

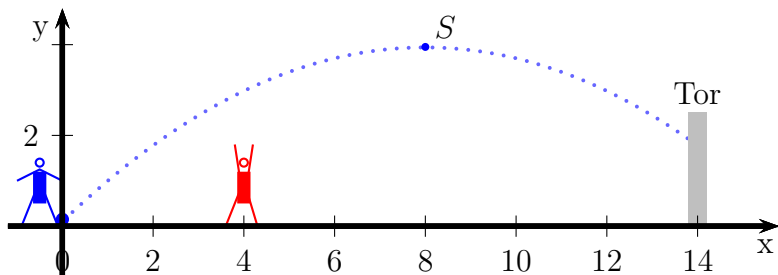
Ein Fußballspieler läuft mit dem Ball auf das gegnerische Tor zu. Der Torwart läuft ihm entgegen, um den Ball abzufangen. Im Augenblick des Torschusses ist der Torwart noch 4 Meter vom Stürmer entfernt. Der



Stürmer ist 14 Meter vom Tor entfernt. Der Ballflug beschreibt einen Parabelbogen, dessen höchster Punkt S 8 Meter vom Schützen entfernt und 3,84 Meter über dem Erdboden liegt.

1. Kann der Torwart den Ball abfangen? Wenn er springt, kommt er mit den Händen bis 2,5 Meter hoch.
2. Wird der Ball ins Tor oder darüber hinweg fliegen? Die obere Latte befindet sich 2,44 Meter über dem Boden.

Lösung: Am besten legt man zunächst ein Koordinatensystem in die Planfigur. Ich lege den Koordinatenursprung in den Ball beim Abschuss. Andere sinnvolle Möglichkeiten gibt es aber auch.



Danach bestimmt man die Funktionsgleichung. Bekannt ist der Scheitelpunkt $S(8|3,84)$ und der Punkt $P(0|0)$, durch den der Funktionsgraph verläuft. Der Ansatz mit der Scheitelpunktform ist hier sinnvoll.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\ f(x) &= a \cdot (x - 8)^2 + 3,84 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Formfaktors a werden die bekannten Koordinaten des Punktes $P(0|0)$ eingesetzt.

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ a \cdot (0 - 8)^2 + 3,84 &= 0 \\ a \cdot 64 + 3,84 &= 0 && | - 3,84 \\ 64a &= -3,84 && | : 64 \\ a &= -0,06 \end{aligned}$$

Damit ist die Funktionsgleichung bekannt: $f(x) = -0,06 \cdot (x - 8)^2 + 3,84$

zu Frageteil 1: In welcher Höhe fliegt der Ball über den Torwart? Kann er ihn abfangen?

Die Antwort auf diese Frage liefert die Funktionsgleichung mit $x = 4$, dem Abstand zum Torwart.

$$\begin{aligned} f(4) &= -0,06 \cdot (4 - 8)^2 + 3,84 \\ &= -0,06 \cdot 16 + 3,84 \\ &= 2,88 \end{aligned}$$

Der Ball fliegt 2,88 Meter über den Torwart. So hoch kann er nicht springen.

zu Frageteil 2: Fliegt der Ball ins Tor oder darüber hinweg?

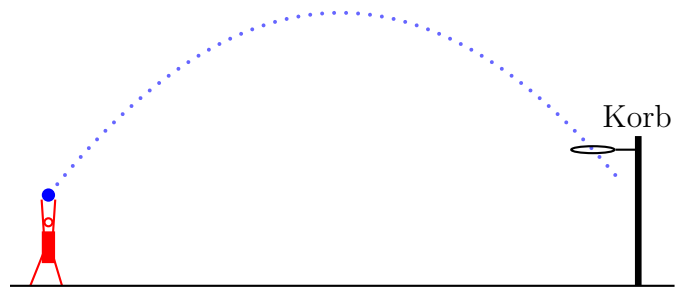
Auch hier hilft die Funktionsgleichung, diesmal mit $x = 14$, dem Abstand zum Tor.

$$\begin{aligned} f(14) &= -0,06 \cdot (14 - 8)^2 + 3,84 \\ &= -0,06 \cdot 36 + 3,84 \\ &= 1,68 \end{aligned}$$

Der Ball fliegt in einer Höhe von 1,68 Metern über die Torlinie. Da das Tor 2,44 Meter hoch ist, trifft der Ball ins Tor.

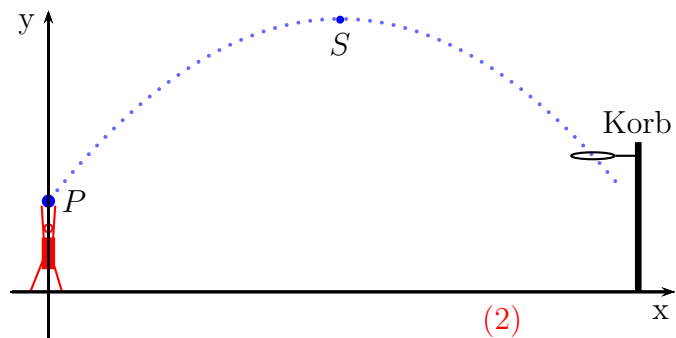
0.52 QUADFKT-44

Ein Basketballspieler steht 7 Meter vom gegnerischen Korb entfernt und versucht einen Korbwurf. Der Korb befindet sich 3,05 Meter über dem Boden, der Ball verlässt die Hände des Werfers in einer Höhe von 2 Metern. Die parabelförmige Flugbahn erreicht ihre maximale Höhe von 4,40 Metern im waagerechten Abstand von 4 Metern vom Spieler entfernt. Prüfen Sie durch eine Rechnung, ob der Ball den Korb trifft!



Lösung: Um die Frage beantworten zu können, benötigen wir eine Funktionsgleichung. Dazu legt man sich zunächst ein geeignetes Koordinatensystem in die Planfigur.

In der Rechnung werden alle Maße in der Einheit *Meter* verwendet. Dann kann man dabei die Einheiten weglassen.



Da der Scheitelpunkt $S(4|4,4)$ bekannt ist, bietet sich die Scheitelpunktform zum Aufstellen der Funktionsgleichung an.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\ f(x) &= a \cdot (x - 4)^2 + 4,4 \end{aligned} \quad (5)$$

Bekannt ist auch der Punkt $P(0|2)$, an dem der Ball die Hände des Werfers verlässt. Setzt man dessen Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, dann erhält man eine Gleichung, mit der a berechnet werden kann.

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ a \cdot (0 - 4)^2 + 4,4 &= 2 & (3) \\ 16a + 4,4 &= 2 & | - 4,4 \\ 16a &= -2,4 & | : 16 \\ a &= -0,15 & (4) \end{aligned}$$

Somit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -0,15 \cdot (x - 4)^2 + 4,4$ (1)

Um die Frage zu klären, ob der Ball den Korb trifft, gibt es (mindestens) zwei Möglichkeiten:

1. Man setzt den Abstand zum Korb für x ein und rechnet mit $x_K = 7$ den Funktionswert y_K aus.
2. Man berechnet, für welche x -Werte die Funktion die Höhe des Korbes mit $y_K = 3,05$ ergibt.

Variante 1:

$$\begin{aligned}
 y_K &= f(x_K) \\
 y_K &= -0,15 \cdot (x_K - 4)^2 + 4,4 \\
 &= -0,15 \cdot (7 - 4)^2 + 4,4 \\
 &= -0,15 \cdot 9 + 4,4 \\
 y_K &= 3,05 \qquad (4)
 \end{aligned}$$

Das ist genau die Höhe des Korbes, er wird getroffen. (1)

Variante 2:

$$\begin{aligned}
 f(x_K) &= y_K \\
 -0,15 \cdot (x_K - 4)^2 + 4,4 &= 3,05 & | - 4,4 \\
 -0,15 \cdot (x_K - 4)^2 &= -1,35 & | : (-0,15) \\
 (x_K - 4)^2 &= 9 & | \sqrt{} \\
 x_K - 4 &= \pm 3 & | + 4 \\
 x_{K1} = 1 & \quad x_{K2} = 7 & (4)
 \end{aligned}$$

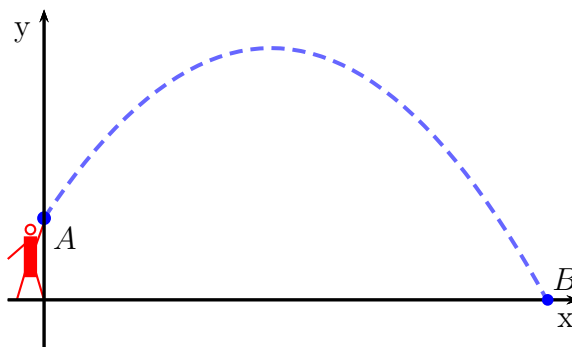
Die zweite Lösung ist genau der Abstand zum Korb. Er wird getroffen. (1)

0.53 QUADFKT-45

Ein Sportler stößt eine Kugel, wie nebenstehend angedeutet. Die Flugparabel der Kugel genügt in der Einheit *Meter* dieser Funktion:

$$f(x) = -0,2x^2 + 2x + 2,2$$

Im Punkt A (auf der y -Achse) verlässt die Kugel die Hand des Kugelstoßers und beginnt den freien Flug. Im Punkt B trifft sie auf den Boden auf.



1. In welcher Höhe h_A über dem Boden verlässt die Kugel die Hand des Sportlers?
2. In welcher waagrecht gemessenen Entfernung e vom Abwurfpunkt gemessen schlägt die Kugel auf dem Boden auf?
3. Welche maximale Höhe h_{max} erreicht die Kugel während des freien Fluges?

Lösung:

zu 1:

$$h_A = y_0 = c = 2,2$$

Ergebnis: Die Kugel verlässt die Hand 2,2 Meter über dem Boden. (4)

zu 2:

$$\begin{aligned} e &= x_0 \\ f(x_0) &= 0 \\ -0,2x_0^2 + 2x_0 + 2,2 &= 0 & | : (-0,2) & (2) \\ x_0^2 - 10x_0 - 11 &= 0 & | p-q\text{-Formel} & (2) \\ x_{01/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 + 11} \\ &= 5 \pm 6 \\ x_{01} = 5 + 6 = 11 & \quad x_{02} = 5 - 6 = -1 & (2) \end{aligned}$$

Die Lösung $x_{01} = -1$ entfällt, liegt außerhalb (links) der Wurfparabel. (1)

Ergebnis: Die Kugel fliegt 11 Meter weit. (1)

zu 3: Die maximale Höhe h_{max} ist der y -Wert y_S des Scheitelpunktes.

$$\begin{aligned}
 x_S &= -\frac{b}{2a} \\
 &= -\frac{2}{2 \cdot (-0,2)} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$x_S = 5 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 y_S &= f(x_S) \\
 &= -0,2x_S^2 + 2x_S + 2,2 \quad (2) \\
 &= -0,2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 2,2
 \end{aligned}$$

$$y_S = 6,8 \quad (1)$$

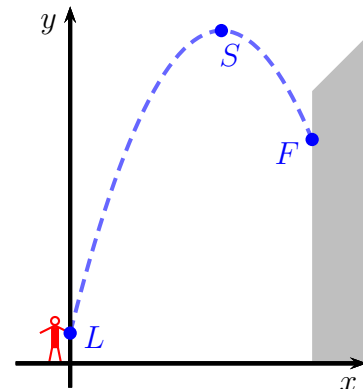
Ergebnis: Die Kugel fliegt maximal 6,8 Meter hoch. (1)

0.54 QUADFKT-46

Ein Feuerwehrmann spritzt mit seiner Löschspritze in das Fenster F eines brennenden Gebäudes. Der Wasserstrahl hat die Form einer Parabel. Legt man die x -Achse auf den Erdboden und die y -Achse durch die Spitze der Löchspritze L , dann lautet die zugehörige Funktionsgleichung in der Einheit *Meter*:

$$f(x) = -0,4x^2 + 4x + 1$$

Das Fenster F befindet sich 7,40 Meter hoch über dem Erdboden.



1. Wie hoch über dem Erdboden befindet sich die Spitze der Löchspritze L ?
2. Wie hoch über dem Erdboden ist die höchste Stelle S des Wasserstrahles?
3. Wieviele Meter ist das Gebäude vom Feuerwehrmann entfernt?

Lösung:

zu 1: Die Spritzenhöhe stellt den y -Achsenabschnitt der Parabelfunktion dar. Den kann man am Parameter c aus der Normalform der Parabelfunktion ablesen: $c = 1$.

Ergebnis: Die Spitze der Löchspritze befindet sich 1 Meter über dem Erdboden. (4)

zu 2: Die maximale Höhe des Wasserstrahls ist der y -Wert y_S des Scheitelpunktes.

$$\begin{aligned}x_S &= -\frac{b}{2a} & (2) \\&= -\frac{4}{2 \cdot (-0,4)} \\x_S &= 5 & (2)\end{aligned}$$

Der Wert wird in die Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}y_S &= f(x_S) \\&= -0,4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 1 & (2) \\y_S &= 11 & (1)\end{aligned}$$

Ergebnis: Der Wasserstrahl kommt maximal 11 Meter hoch. (1)

zu 3: Gesucht ist der x -Wert x_F , für den der y -Wert $y_F = 7,4$ ist.

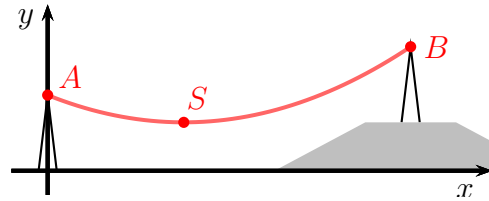
$$\begin{aligned}
 f(x_F) &= y_F \\
 -0,4x_F^2 + 4x_F + 1 &= 7,4 & | - 7,4 \\
 -0,4x_F^2 + 4x_F - 6,4 &= 0 & | : (-0,4) \quad (2) \\
 x_F^2 - 10x_F + 16 &= 0 & | p-q\text{-Formel} \quad (2) \\
 x_{F1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - 16} \\
 &= 5 \pm 3 \\
 x_{F1} = 5 + 3 = 8 & \quad x_{F2} = 5 - 3 = 2 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Der Wert $x_{F2} = 2$ entfällt, da er **links** vom höchsten Punkt S des Wasserstrahls liegt, also noch **davor**. (1)

Ergebnis: Das Gebäude ist 8 Meter vom Feuerwehrmann entfernt. (1)

0.55 QUADFKT-47

Eine Freileitung hängt zwischen zwei Masten über einem Fluss. Mit der x -Achse auf Höhe des Flusses und der y -Achse im linken Mast kann die Kurve der Freileitung in der Einheit *Meter* näherungsweise durch diese Funktion beschrieben werden:



$$f(x) = 0,006x^2 - 0,36x + 15$$

Der Aufhängepunkt B am rechten Mast befindet sich 24,60 Meter über der Flussebene.

1. Wie hoch über der Flussebene befindet sich die Mastspitze im Punkt A ?
2. Wie hoch über der Flussebene hängt die tiefste Stelle S der Freileitung?
3. Wie groß ist der waagerechte Abstand zwischen den beiden Freileitungsmasten?

Lösung:

zu 1: Der linke Aufhängepunkt stellt den y -Achsenabschnitt der Parabelfunktion dar. Den kann man am Parameter c aus der Normalform der Parabelfunktion ablesen: $c = 15$.

Ergebnis: Die linke Mastspitze befindet sich 15 Meter über der Flussebene. (4)

zu 2: Der tiefste Punkt der Freileitung ist der y -Wert y_S des Scheitelpunktes.

$$\begin{aligned} x_S &= -\frac{b}{2a} & (2) \\ &= -\frac{-0,36}{2 \cdot 0,006} \\ x_S &= 30 & (2) \end{aligned}$$

Der Wert wird in die Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} y_S &= f(x_S) \\ &= 0,006 \cdot 30^2 - 0,36 \cdot 30 + 15 & (2) \\ y_S &= 9,6 & (1) \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Freileitung hängt im tiefsten Punkt 9,60 Meter über dem Wasser. (1)

zu 3: Gesucht ist der x -Wert x_B des Punktes B , für den der y -Wert $y_B = 24,60$ ist.

$$\begin{aligned}
 f(x_B) &= y_B \\
 0,006x_B^2 - 0,36x_B + 15 &= 24,6 && | - 24,6 \\
 0,006x_B^2 - 0,36x_B - 9,6 &= 0 && | : 0,006 \quad (2) \\
 x_B^2 - 60x_B - 1\,600 &= 0 && | p-q\text{-Formel} \quad (2) \\
 x_{B1/2} &= 30 \pm \sqrt{30^2 + 1\,600} \\
 &= 30 \pm 25 \\
 x_{B1} = 30 + 50 = 80 & \quad x_{B2} = 30 - 50 = -20 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Der Wert $x_{B2} = -20$ entfällt, da er **links** vom linken Mast liegt, also **außerhalb** des zu untersuchenden Bereiches. (1)

Ergebnis: Der Abstand der beiden Masten beträgt 80 Meter. (1)