

Musterlösungen Aufstellen von Funktionen

19. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1	FKTAUFS-01	3
2	FKTAUFS-02	6
3	FKTAUFS-03	9
4	FKTAUFS-04	12
5	FKTAUFS-05	15
6	FKTAUFS-06	18
7	FKTAUFS-07	21
8	FKTAUFS-08	22
9	FKTAUFS-09	23
10	FKTAUFS-10	25
11	FKTAUFS-11	27
12	FKTAUFS-12	29
13	FKTAUFS-13	31
14	FKTAUFS-14	34
15	FKTAUFS-15	37

16 FKTAUFS-16

39

17 FKTAUFS-17

41

1 FKTAUFS-01

Ein Polynom 3. Ordnung hat einen Wendepunkt an der Stelle $x_w = 2$ mit der Wendetangente $f_1(x) = -3x + 4$ und schneidet die x -Achse bei $x_0 = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung (25)

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Um aus dem Text die Bedingungen für insgesamt 4 Gleichungen herauszuholen, gehen wir den Text schrittweise durch.

Ein Polynom 3. Ordnung hat einen Wendepunkt an der Stelle $x_w = 2 \dots$

Dass es sich um ein **Polynom 3. Grades** handelt, haben wir schon ausgenutzt, indem wir den Ansatz mit der Normalform gemacht haben. **Wendepunkt** bedeutet, dass die zweite Ableitung dort Null ist:

$$f''(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a \cdot 2 + 2b = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir alles aus diesem Teil des Satzes verwendet. Es geht weiter:

\dots mit der Wendetangente $f_1(x) = -3x + 4 \dots$

Dass die Wendetangente bekannt ist, bedeutet zweierlei:

1. Funktion und Wendetangente haben dort einen gemeinsamen Punkt.
2. Funktion und Wendetangente haben dort die gleiche Steigung.

Das ergibt entsprechend zwei Bedingungen und zwei Gleichungen.

$$\begin{aligned} f(2) = f_1(2) & \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -3 \cdot 2 + 4 \quad (2) \\ f'(2) = f'_1(2) & \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = -3 \quad (2) \end{aligned}$$

Drei Bedingungen haben wir schon, es fehlt also nur noch eine. Dazu lesen wir die Aufgabenstellung weiter durch:

\dots und schneidet die x -Achse bei $x_0 = 1$.

Damit sind die Koordinaten eines Punktes bekannt: $P(1|0)$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir 4 Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter a bis d . Zusammengefasst und etwas vereinfacht sieht das Gleichungssystem dann so aus:

$$\begin{array}{rcll} I & 12a & +2b & = 0 \\ II & 8a & +4b & +2c & +d & = -2 \\ III & 12a & +4b & +c & & = -3 \\ IV & a & +b & +c & +d & = 0 \end{array}$$

Nur in Gleichung II und IV kommt der Parameter d vor. Daher bietet es sich an, diese beiden Gleichungen so zu kombinieren, dass dabei d herausfällt. Das geht am einfachsten dadurch, dass man Gleichung IV von Gleichung II subtrahiert. Die neue Gleichung nenne ich V. Die anderen Gleichungen schreibe ich unverändert darunter.

$$\begin{array}{rcll} II & 8a & +4b & +2c & +d & = -2 & | \\ IV & a & +b & +c & +d & = 0 & | - \\ \hline V & 7a & +3b & +c & & = -2 \\ I & 12a & +2b & & & = 0 \\ III & 12a & +4b & +c & & = -3 \end{array}$$

Auch hier gibt es wieder zwei Gleichungen, die eine Variable – nämlich c – beinhalten, die in der dritten Gleichung nicht vorkommt. Daher bietet es sich an, auch diese Gleichungen so zu kombinieren, dass c herausfällt. Dazu subtrahiere ich die Gleichung V von Gleichung III. Die neue Gleichung nenne ich VI. Ich sortiere die Gleichungen dazu etwas um.

$$\begin{array}{rcll} V & 7a & +3b & +c & = -2 & | - \\ III & 12a & +4b & +c & = -3 & | \\ I & 12a & +2b & & = 0 & \\ \hline VI & 5a & +b & & = -1 \\ I & 12a & +2b & & = 0 \end{array}$$

Wenn man die Gleichung VI verdoppelt oder besser noch die Gleichung I halbiert, dann kann die Differenz zwischen beiden gebildet werden, so dass der Parameter b herausfällt.

$$\begin{array}{rcll} VI & 5a & +b & = -1 \\ I & 12a & +2b & = 0 & | : 2 \\ \hline VI & 5a & +b & = -1 & | - \\ Ia & 6a & +b & = 0 & | \\ \hline & a & & = 1 & (8) \end{array}$$

Das Ergebnis setzen wir in Gleichung I ein, um b zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcll} 12a + 2b & = & 0 \\ 12 \cdot 1 + 2b & = & 0 & | - 12 \\ 2b & = & -12 & | : 2 \\ b & = & -6 & (3) \end{array}$$

Die Ergebnisse für a und b setzen wir in Gleichung III ein, um c zu bestimmen.

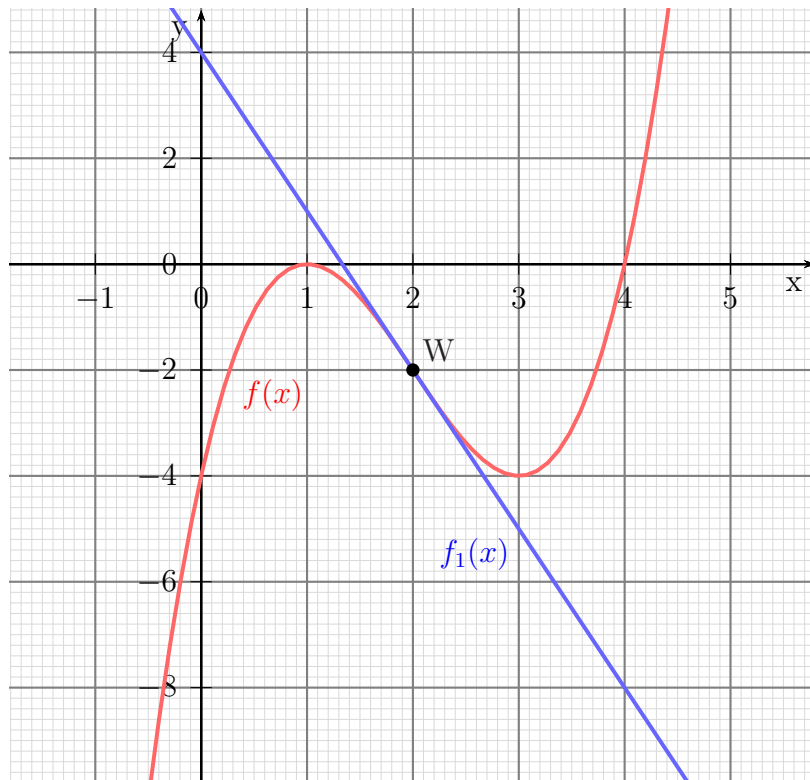
$$\begin{aligned} 12a + 4b + c &= -3 \\ 12 \cdot 1 + 4 \cdot (-6) + c &= -3 \quad | +12 \\ c &= 9 \quad (2) \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für a , b und c setzen wir in Gleichung IV ein, um d zu bestimmen.

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ 1 - 6 + 9 + d &= 0 \quad | -4 \\ d &= -4 \quad (1) \end{aligned}$$

Damit sind alle Parameter bestimmt, die Funktionsgleichung kann angegeben werden.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \quad (1)$$



2 FKTAUFS-02

Ein Polynom 3. Ordnung hat einen Wendepunkt an der Stelle $x_w = 2$ mit der Wendetangente $f_1(x) = 3x - 4$ und schneidet die x -Achse bei $x_0 = 4$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung (25)

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Um aus dem Text die Bedingungen für insgesamt 4 Gleichungen herauszuholen, gehen wir den Text schrittweise durch.

Ein Polynom 3. Ordnung hat einen Wendepunkt an der Stelle $x_w = 2 \dots$

Dass es sich um ein **Polynom 3. Grades** handelt, haben wir schon ausgenutzt, indem wir den Ansatz mit der Normalform gemacht haben. **Wendepunkt** bedeutet, dass die zweite Ableitung dort Null ist:

$$f''(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a \cdot 2 + 2b = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir alles aus diesem Teil des Satzes verwendet. Es geht weiter:

\dots mit der Wendetangente $f_1(x) = 3x - 4 \dots$

Dass die Wendetangente bekannt ist, bedeutet zweierlei:

1. Funktion und Wendetangente haben dort einen gemeinsamen Punkt.
2. Funktion und Wendetangente haben dort die gleiche Steigung.

Das ergibt entsprechend zwei Bedingungen und zwei Gleichungen.

$$\begin{aligned} f(2) = f_1(2) & \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 3 \cdot 2 - 4 \quad (2) \\ f'(2) = f'_1(2) & \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Drei Bedingungen haben wir schon, es fehlt also nur noch eine. Dazu lesen wir die Aufgabenstellung weiter durch:

\dots und schneidet die x -Achse bei $x_0 = 4$.

Damit sind die Koordinaten eines Punktes bekannt: $P(4|0)$

$$f(4) = 0 \Rightarrow a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir 4 Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter a bis d . Zusammengefasst und etwas vereinfacht sieht das Gleichungssystem dann so aus:

$$\begin{array}{rclcl} I & 12a & +2b & & = 0 \\ II & 8a & +4b & +2c & +d = 2 \\ III & 12a & +4b & +c & = 3 \\ IV & 64a & +16b & +4c & +d = 0 \end{array}$$

Nur in Gleichung II und IV kommt der Parameter d vor. Daher bietet es sich an, diese beiden Gleichungen so zu kombinieren, dass dabei d herausfällt. Das geht beispielsweise dadurch, dass man Gleichung II von Gleichung IV subtrahiert. Die neue Gleichung nenne ich V. Die anderen Gleichungen schreibe ich unverändert darunter.

$$\begin{array}{rclcl} II & 8a & +4b & +2c & +d = 2 & | - \\ IV & 64a & +16b & +4c & +d = 0 & | \\ \hline V & 56a & +12b & +2c & & = -2 \\ I & 12a & +2b & & & = 0 \\ III & 12a & +4b & +c & & = 3 \end{array}$$

Auch hier gibt es wieder zwei Gleichungen, die eine Variable – nämlich c – beinhalten, die in der dritten Gleichung nicht vorkommt. Daher bietet es sich an, auch diese Gleichungen so zu kombinieren, dass c herausfällt. Dazu muss ich zuvor die Gleichung III verdoppeln oder besser noch die Gleichung V halbieren. Dann subtrahiere ich die Gleichung V von Gleichung III. Die neue Gleichung nenne ich VI. Ich sortiere die Gleichungen dazu etwas um.

$$\begin{array}{rclcl} V & 56a & +12b & +2c & = -2 & | : 2 \\ III & 12a & +4b & +c & = 3 \\ I & 12a & +2b & & = 0 \\ \hline V & 28a & +6b & +c & = -1 & | \\ III & 12a & +4b & +c & = 3 & | - \\ I & 12a & +2b & & = 0 \\ \hline VI & 16a & +2b & & = -4 \\ I & 12a & +2b & & = 0 \end{array}$$

Jetzt kann die Differenz zwischen beiden gebildet werden, so dass der Parameter b herausfällt.

$$\begin{array}{rclcl} VI & 16a & +2b & = -4 & | \\ I & 12a & +2b & = 0 & | - \\ \hline & 4a & & = -4 & | : 4 \\ & a & & = -1 & (8) \end{array}$$

Das Ergebnis setzen wir in Gleichung I ein, um b zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} 12a + 2b & = & 0 \\ 12 \cdot (-1) + 2b & = & 0 \quad | + 12 \\ 2b & = & 12 \quad | : 2 \\ b & = & 6 \quad (3) \end{array}$$

Die Ergebnisse für a und b setzen wir in Gleichung III ein, um c zu bestimmen.

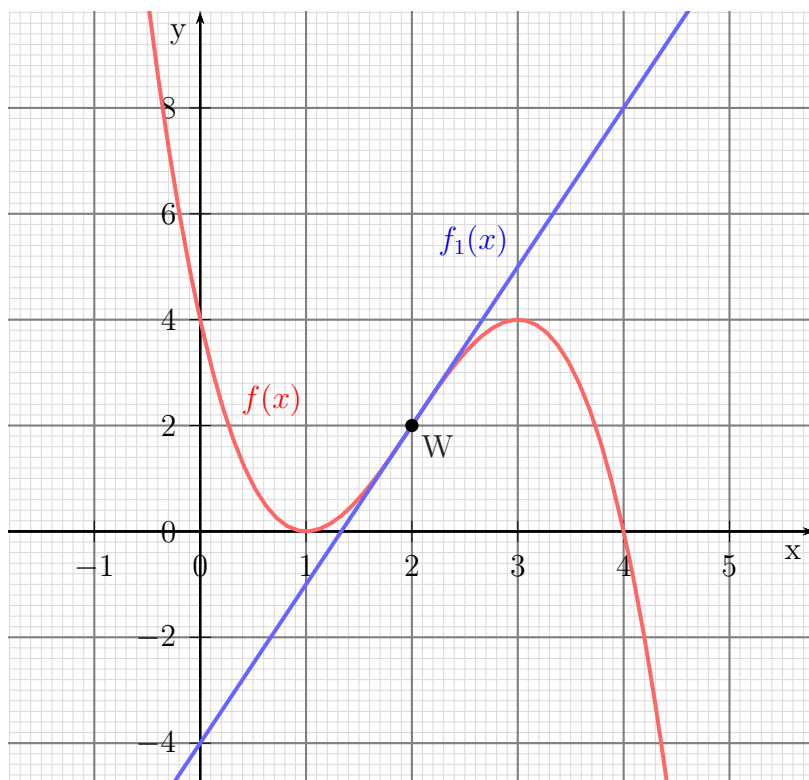
$$\begin{array}{rcl} 12a + 4b + c & = & -3 \\ 12 \cdot (-1) + 4 \cdot 6 + c & = & 3 \quad | - 12 \\ c & = & -9 \quad (2) \end{array}$$

Die Ergebnisse für a , b und c setzen wir in Gleichung II ein, um d zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} 8a + 4b + 2c + d & = & 2 \\ 8 \cdot (-1) + 4 \cdot 6 + 2 \cdot (-9) + d & = & 2 \\ -8 + 24 - 18 + d & = & 2 \quad | + 2 \\ d & = & 4 \quad (1) \end{array}$$

Damit sind alle Parameter bestimmt, die Funktionsgleichung kann angegeben werden.

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 \quad (1)$$



3 FKTAUFS-03

Ein Polynom dritten Grades hat einen Wendepunkt bei $W(3|2)$ und berührt bei $x_1 = 1$ die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = 9x - 9$ als Tangente. Wie lautet die Funktionsgleichung des Polynoms?

Lösung (25)

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad (1)$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \quad (1)$$

Um aus dem Text die Bedingungen für insgesamt 4 Gleichungen herauszuholen, gehen wir den Text schrittweise durch.

Ein Polynom dritten Grades hat einen Wendepunkt bei $W(3|2) \dots$

Dass es sich um ein **Polynom 3. Grades** handelt, haben wir schon ausgenutzt, indem wir den Ansatz mit der Normalform gemacht haben. **Wendepunkt** bedeutet, dass die zweite Ableitung dort Null ist:

$$f''(3) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 3 + 2b = 0 \quad (2)$$

Wendepunkt bedeutet, dass der Funktionswert dort bekannt ist:

$$f(3) = 2 \Rightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 2 \quad (2)$$

Damit haben wir alles aus diesem Teil des Satzes verwendet. Es geht weiter:

\dots und berührt bei $x_1 = 1$ die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = 9x - 9$ als Tangente.

Berühren bedeutet immer, dass die Steigung gleich der Geradensteigung ist. Also gilt:

$$f'(1) = f_2'(1) \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 9 \quad (2)$$

Berühren bedeutet aber nicht nur *gleiche Steigung*, sondern auch *gleicher Punkt*. Wir können also auch von gleichen Funktionswerten ausgehen.

$$f(1) = f_2(1) \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 9 \cdot 1 - 9 \quad (2)$$

Damit haben wir 4 Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter a bis d . Zusammengefasst und etwas vereinfacht sieht das Gleichungssystem dann so aus:

$$\begin{array}{llllll} I & 18a & +2b & & & = 0 \\ II & 27a & +9b & +3c & +d & = 2 \\ III & 3a & +2b & +c & & = 9 \\ IV & a & +b & +c & +d & = 0 \end{array} \quad (2)$$

Nur in Gleichung II und IV kommt der Parameter d vor. Daher bietet es sich an, diese beiden Gleichungen so zu kombinieren, dass dabei d herausfällt. Das geht am einfachsten dadurch, dass man Gleichung IV von Gleichung II subtrahiert. Die neue Gleichung nenne ich V. Die anderen Gleichungen schreibe ich unverändert darunter.

$$\begin{array}{rcllcl}
 II & 27a & +9b & +3c & +d & = 2 & | \\
 IV & a & +b & +c & +d & = 0 & | - \\
 \hline
 V & 26a & +8b & +2c & & = 2 & \\
 I & 18a & +2b & & & = 0 & \\
 III & 3a & +2b & +c & & = 9 &
 \end{array}$$

Auch hier gibt es wieder zwei Gleichungen, die eine Variable – nämlich c – beinhalten, die in der dritten Gleichung nicht vorkommt. Daher bietet es sich an, auch diese Gleichungen so zu kombinieren, dass c herausfällt. Vor der Differenzbildung muss aber zuerst die Gleichung III verdoppelt werden. Die neue Gleichung nenne ich VI.

$$\begin{array}{rcllcl}
 V & 26a & +8b & +2c & = 2 & \\
 III & 3a & +2b & +c & = 9 & | \cdot 2 \\
 I & 18a & +2b & & = 0 & \\
 \hline
 V & 26a & +8b & +2c & = 2 & | \\
 III & 6a & +4b & +2c & = 18 & | - \\
 I & 18a & +2b & & = 0 & \\
 \hline
 VI & 20a & +4b & & = -16 & \\
 I & 18a & +2b & & = 0 &
 \end{array}$$

Wenn man die Gleichung I verdoppelt oder besser noch die Gleichung VI halbiert, dann kann die Differenz zwischen beiden gebildet werden, so dass der Parameter b herausfällt.

$$\begin{array}{rcllcl}
 VI & 20a & +4b & = -16 & | : 2 \\
 I & 18a & +2b & = 0 & \\
 \hline
 VI & 10a & +2b & = -8 & | \\
 I & 18a & +2b & = 0 & | - \\
 \hline
 & -8a & & = -8 & | : (-8) \\
 & a & & = 1 & (6)
 \end{array}$$

Das Ergebnis setzen wir in Gleichung I ein, um b zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcllcl}
 18a + 2b & = & 0 \\
 18 \cdot 1 + 2b & = & 0 \\
 18 + 2b & = & 0 & | - 18 \\
 2b & = & -18 & | : 2 \\
 b & = & -9 & (2)
 \end{array}$$

Die Ergebnisse für a und b setzen wir in Gleichung III ein, um c zu bestimmen.

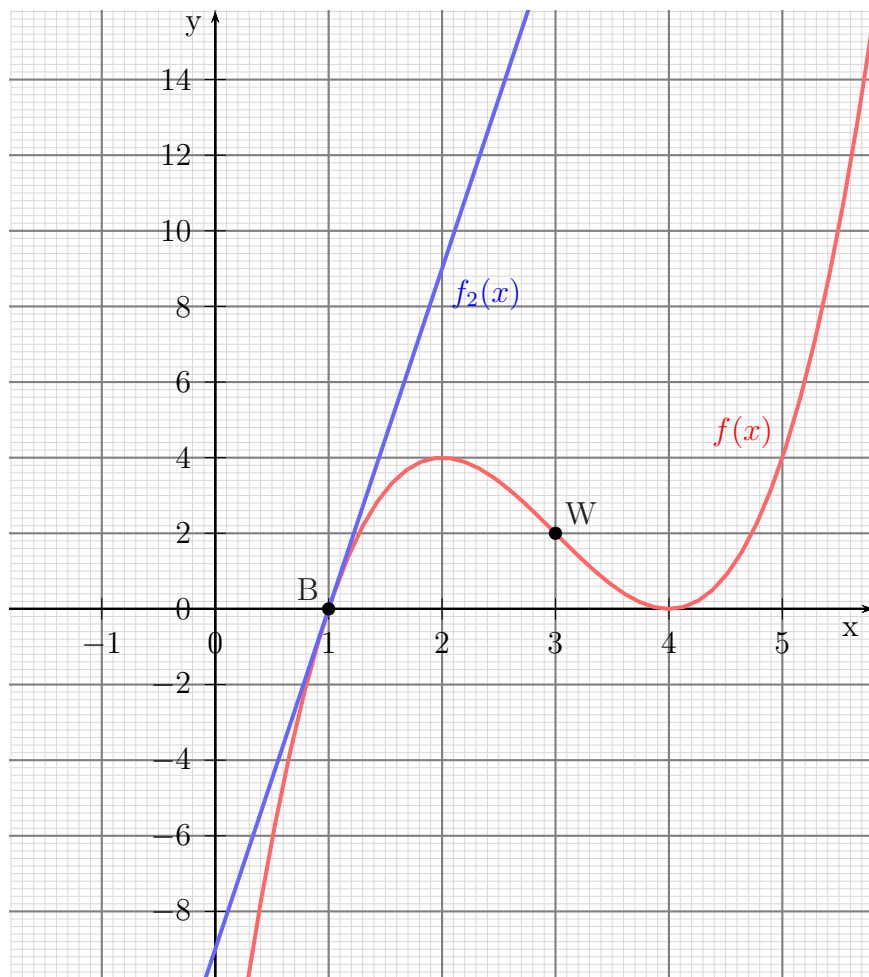
$$\begin{array}{rcllcl}
 3a + 2b + c & = & 9 \\
 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-9) + c & = & 9 \\
 3 - 18 + c & = & 9 & | + 15 \\
 c & = & 24 & (2)
 \end{array}$$

Die Ergebnisse für a , b und c setzen wir in Gleichung III ein, um d zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} a + b + c + d & = & 0 \\ 1 - 9 + 24 + d & = & 0 \\ 16 + d & = & 0 \quad | -16 \\ d & = & -16 \quad (1) \end{array}$$

Damit sind alle Parameter bestimmt, die Funktionsgleichung kann angegeben werden.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 \quad (1)$$



4 FKTAUFS-04

Ein Polynom dritten Grades hat einen Wendepunkt bei $W(3|-4)$ und berührt bei $x_1 = 1$ die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = -9x + 7$ als Tangente. Wie lautet die Funktionsgleichung des Polynoms?

Lösung (25)

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad (1)$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \quad (1)$$

Um aus dem Text die Bedingungen für insgesamt 4 Gleichungen herauszuholen, gehen wir den Text schrittweise durch.

Ein Polynom dritten Grades hat einen Wendepunkt bei $W(3|-4)$...

Dass es sich um ein **Polynom 3. Grades** handelt, haben wir schon ausgenutzt, indem wir den Ansatz mit der Normalform gemacht haben. **Wendepunkt** bedeutet, dass die zweite Ableitung dort Null ist:

$$f''(3) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 3 + 2b = 0 \quad (2)$$

Wendepunkt bedeutet, dass der Funktionswert dort bekannt ist:

$$f(3) = -4 \Rightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = -4 \quad (2)$$

Damit haben wir alles aus diesem Teil des Satzes verwendet. Es geht weiter:

... und berührt bei $x_1 = 1$ die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = -9x + 7$ als Tangente.

Berühren bedeutet immer, dass die Steigung gleich der Geradensteigung ist. Also gilt:

$$f'(1) = f_2'(1) \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = -9 \quad (2)$$

Berühren bedeutet aber nicht nur *gleiche Steigung*, sondern auch *gleicher Punkt*. Wir können also auch von gleichen Funktionswerten ausgehen.

$$f(1) = f_2(1) \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -9 \cdot 1 + 7 \quad (2)$$

Damit haben wir 4 Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter a bis d . Zusammengefasst und etwas vereinfacht sieht das Gleichungssystem dann so aus:

$$\begin{array}{lllll} I & 18a & +2b & & = 0 \\ II & 27a & +9b & +3c & +d = -4 \\ III & 3a & +2b & +c & = -9 \\ IV & a & +b & +c & +d = -2 \end{array} \quad (2)$$

Nur in Gleichung II und IV kommt der Parameter d vor. Daher bietet es sich an, diese beiden Gleichungen so zu kombinieren, dass dabei d herausfällt. Das geht am einfachsten dadurch, dass man Gleichung IV von Gleichung II subtrahiert. Die neue Gleichung nenne ich V. Die anderen Gleichungen schreibe ich unverändert darunter.

$$\begin{array}{rcllcl}
 II & 27a & +9b & +3c & +d & = & -4 & | \\
 IV & a & +b & +c & +d & = & -2 & | - \\
 \hline
 V & 26a & +8b & +2c & & = & -2 & \\
 I & 18a & +2b & & & = & 0 & \\
 III & 3a & +2b & +c & & = & -9 &
 \end{array}$$

Auch hier gibt es wieder zwei Gleichungen, die eine Variable – nämlich c – beinhalten, die in der dritten Gleichung nicht vorkommt. Daher bietet es sich an, auch diese Gleichungen so zu kombinieren, dass c herausfällt. Vor der Differenzbildung muss aber zuerst die Gleichung III verdoppelt werden. Die neue Gleichung nenne ich VI.

$$\begin{array}{rcllcl}
 V & 26a & +8b & +2c & = & -2 & \\
 III & 3a & +2b & +c & = & -9 & | \cdot 2 \\
 I & 18a & +2b & & = & 0 & \\
 \hline
 V & 26a & +8b & +2c & = & -2 & | \\
 III & 6a & +4b & +2c & = & -18 & | - \\
 I & 18a & +2b & & = & 0 & \\
 \hline
 VI & 20a & +4b & & = & 16 & \\
 I & 18a & +2b & & = & 0 &
 \end{array}$$

Wenn man die Gleichung I verdoppelt oder besser noch die Gleichung VI halbiert, dann kann die Differenz zwischen beiden gebildet werden, so dass der Parameter b herausfällt.

$$\begin{array}{rcllcl}
 VI & 20a & +4b & = & 16 & | : 2 \\
 I & 18a & +2b & = & 0 & \\
 \hline
 VI & 10a & +2b & = & 8 & | \\
 I & 18a & +2b & = & 0 & | - \\
 \hline
 & -8a & & = & 8 & | : (-8) \\
 & a & & = & -1 & (6)
 \end{array}$$

Das Ergebnis setzen wir in Gleichung I ein, um b zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcllcl}
 & 18a & +2b & = & 0 & \\
 & 18 \cdot (-1) & +2b & = & 0 & \\
 & -18 & +2b & = & 0 & | + 18 \\
 & & 2b & = & 18 & | : 2 \\
 & & b & = & 9 & (2)
 \end{array}$$

Die Ergebnisse für a und b setzen wir in Gleichung III ein, um c zu bestimmen.

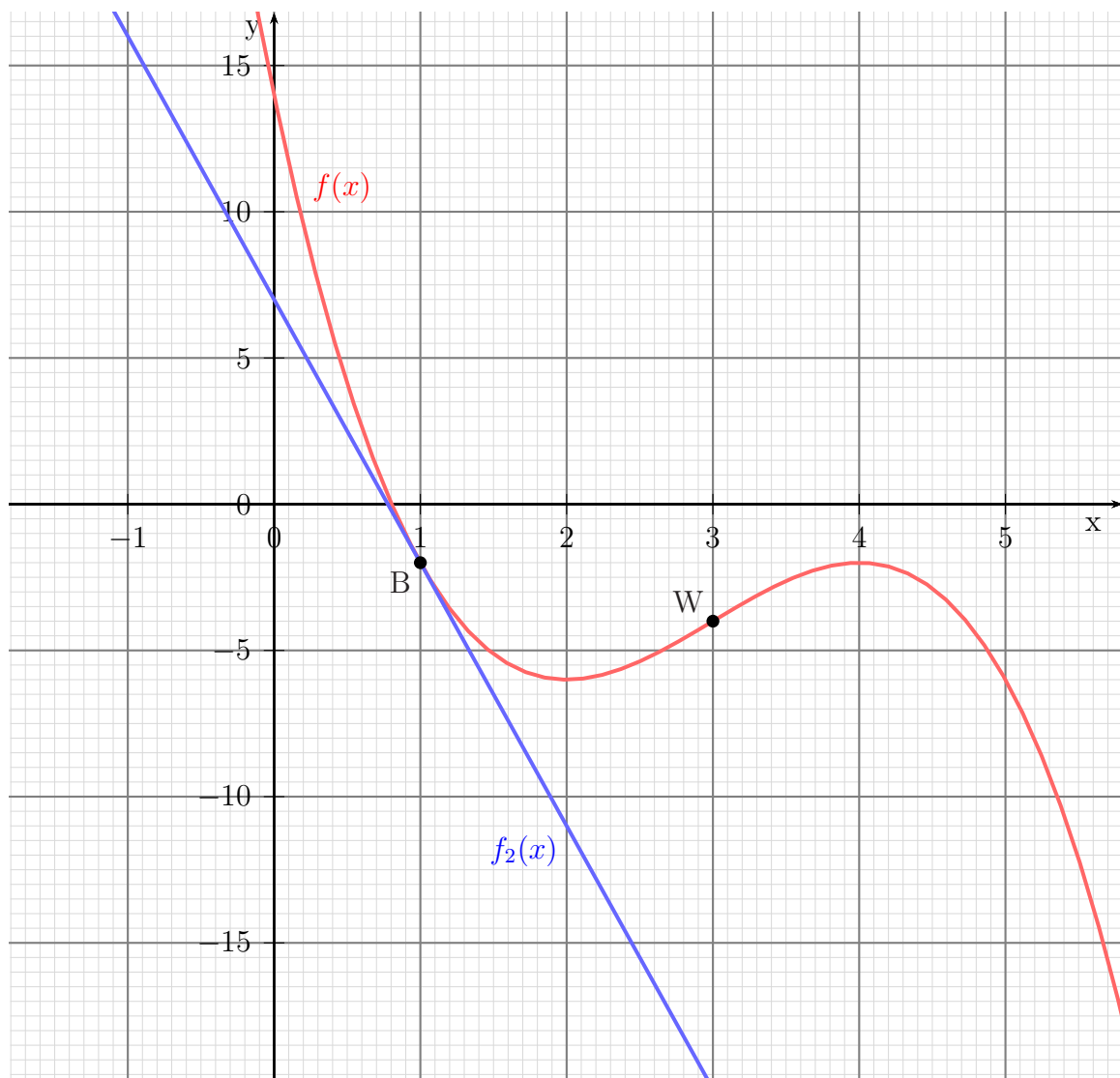
$$\begin{array}{rcllcl}
 & 3a & +2b & +c & = & -9 & \\
 & 3 \cdot (-1) & +2 \cdot 9 & +c & = & -9 & \\
 & -3 & +18 & +c & = & -9 & | - 15 \\
 & & & c & = & -24 & (2)
 \end{array}$$

Die Ergebnisse für a , b und c setzen wir in Gleichung III ein, um d zu bestimmen.

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= -2 \\ -1 + 9 - 24 + d &= -2 \\ -16 + d &= -2 \quad | +16 \\ d &= 14 \quad (1) \end{aligned}$$

Damit sind alle Parameter bestimmt, die Funktionsgleichung kann angegeben werden.

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 14 \quad (1)$$



5 FKTAUFS-05

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 2$ und einen Wendepunkt bei $W(1|2)$. Ein Hochpunkt liegt auf der y -Achse. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Um aus dem Text die Bedingungen für insgesamt 4 Gleichungen herauszuholen, gehen wir den Text schrittweise durch.

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 2 \dots$

Dass es sich um ein **Polynom 3. Grades** handelt, haben wir schon ausgenutzt, indem wir den Ansatz mit der Normalform gemacht haben. **Nullstelle** bedeutet, dass die Funktion dort Null ist:

$$f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir alles aus diesem Teil des Satzes verwendet. Es geht weiter:

\dots und einen Wendepunkt bei $W(1|2)$.

Im Wendepunkt stecken gleich zwei Informationen:

1. Der Funktionswert von 1 beträgt 2.
2. Die zweite Ableitung von 1 muss Null sein.

Das ergibt entsprechend zwei Bedingungen und zwei Gleichungen.

$$\begin{array}{lcl} f(1) & = & 2 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 2 \quad (2) \\ f''(1) & = & 0 \Rightarrow 6a \cdot 1 + 2b = 0 \quad (2) \end{array}$$

Drei Bedingungen haben wir schon, es fehlt also nur noch eine. Dazu lesen wir die Aufgabenstellung weiter durch:

Ein Hochpunkt liegt auf der y -Achse.

Da die x -Achse bei $x = 0$ liegt, ist die erste Ableitung von x bei $x = 0$ ebenfalls gleich 0.

$$f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + c = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir 4 Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter a bis d . Zusammengefasst und etwas vereinfacht sieht das Gleichungssystem 4. Grades dann so aus:

$$\begin{array}{rclcrcl} (1) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 0 \\ (2) & a & +b & +c & +d & = & 2 \\ (3) & 6a & +2b & & & = & 0 \\ (4) & & & c & & = & 0 \end{array}$$

Gleichung (4) gibt sofort den Wert für c an. Setzt man den Wert in die ersten Gleichungen ein, dann bleibt ein Gleichungssystem 3. Grades übrig:

$$\begin{array}{rclcrcl} (1) & 8a & +4b & +d & = & 0 \\ (2) & a & +b & +d & = & 2 \\ (3) & 6a & +2b & & = & 0 \end{array}$$

Hier bietet sich das Subtraktionsverfahren an. Man kann sofort Gleichung (2) von Gleichung (1) subtrahieren. Die sich ergebende Gleichung (5) bildet zusammen mit Gleichung (3) dann ein Gleichungssystem 2. Grades.

$$\begin{array}{rclcrcl} (1) & 8a & +4b & +d & = & 0 & | \\ (2) & a & +b & +d & = & 2 & | - \\ \hline (5) & 7a & +3b & & = & -2 \\ (3) & 6a & +2b & & = & 0 \end{array}$$

Für den letzten Reduktionsschritt verwende ich das Einsetzungsverfahren. Ich löse Gleichung (3) nach b auf und setze das Ergebnis in Gleichung (5) ein.

$$\begin{array}{rcl} 6a + 2b & = & 0 \quad | - 6a \\ 2b & = & -6a \quad | : 2 \\ b & = & -3a \end{array}$$

In (5) eingesetzt:

$$\begin{array}{rcl} 7a + 3b & = & -2 \\ 7a + 3 \cdot (-3a) & = & -2 \\ 7a - 9a & = & -2 \\ -2a & = & -2 \quad | : (-2) \\ a & = & 1 \end{array}$$

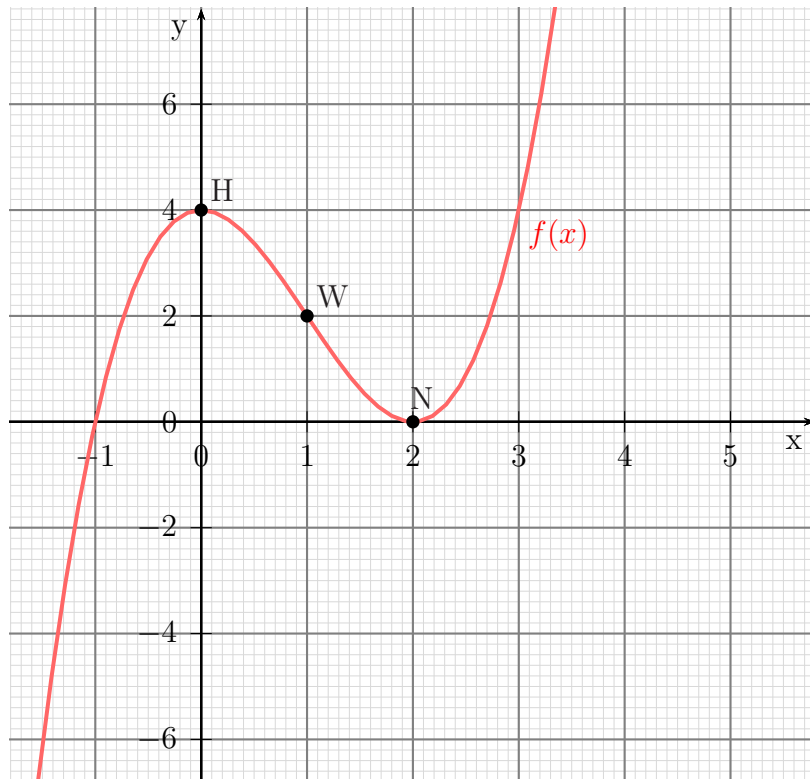
Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (3) eingesetzt:

$$b = -3a = -3 \cdot 1 = -3$$

Beide Ergebnisse werden in die vereinfachte Gleichung (2) eingesetzt:

$$\begin{array}{rcl} a + b + d & = & 2 \\ 1 - 3 + d & = & 2 \\ -2 + d & = & 2 \quad | + 2 \\ d & = & 4 \end{array}$$

Wir fassen zusammen: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$



6 FKTAUFS-06

Ein Polynom 3. Grades hat y -Achsenabschnitt bei $y_0 = -6$ und eine Nullstelle bei $x_0 = 3$. Bei $W(2|2)$ hat es einen Wendepunkt. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Um aus dem Text die Bedingungen für insgesamt 4 Gleichungen herauszuholen, gehen wir den Text schrittweise durch.

Ein Polynom 3. Grades hat einen y -Achsenabschnitt bei $y_0 = -6 \dots$

Dass es sich um ein **Polynom 3. Grades** handelt, haben wir schon ausgenutzt, indem wir den Ansatz mit der Normalform gemacht haben. **y-Achsenabschnitt** bedeutet, dass x dort Null ist:

$$f(0) = -6 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -6 \quad (2)$$

\dots und eine Nullstelle bei $x_0 = 3$.

Nullstelle bedeutet, dass die Funktion dort Null ist:

$$f(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir alles aus diesem Satz verwendet. Es geht weiter:

Bei $W(2|2)$ hat sie einen Wendepunkt.

Im Wendepunkt stecken gleich zwei Informationen:

1. Der Funktionswert von $x_w = 2$ beträgt 2.
2. Die zweite Ableitung von $x_w = 2$ muss Null sein.

Das ergibt entsprechend zwei Bedingungen und zwei Gleichungen.

$$\begin{aligned} f(2) = 2 & \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 2 \quad (2) \\ f''(2) = 0 & \Rightarrow 6a \cdot 2 + 2b = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Damit haben wir 4 Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter a bis d . Zusammengefasst und etwas vereinfacht sieht das Gleichungssystem 4. Grades dann so aus:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & & & d & = & -6 \\ (2) & 27a & +9b & +3c & +d & = & 0 \\ (3) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 2 \\ (4) & 12a & +2b & & & = & 0 \end{array}$$

Gleichung (1) gibt sofort den Wert für d an. Setzt man den Wert in die anderen Gleichungen ein, dann bleibt das Gleichungssystem 3. Grades übrig:

$$\begin{array}{rclcl} (2) & 27a & +9b & +3c & -6 & = & 0 \\ (3) & 8a & +4b & +2c & -6 & = & 2 \\ (4) & 12a & +2b & & & = & 0 \\ \hline (2) & 27a & +9b & +3c & & = & 6 \\ (3) & 8a & +4b & +2c & & = & 8 \\ (4) & 12a & +2b & & & = & 0 \end{array}$$

Vor dem Weiterrechnen vereinfache ich das Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rclcl} (2) & 27a & +9b & +3c & = & 6 & | :3 \\ (3) & 8a & +4b & +2c & = & 8 & | :2 \\ (4) & 12a & +2b & & = & 0 & | :2 \\ \hline (2) & 9a & +3b & +c & = & 2 \\ (3) & 4a & +2b & +c & = & 4 \\ (4) & 6a & +b & & = & 0 \end{array}$$

Es bietet sich an, Gleichung (3) von Gleichung (2) zu subtrahieren. Vom Ergebnis kann dann Gleichung (4) subtrahiert werden.

$$\begin{array}{rclcl} (2) - (3) & 5a & +b & & = & -2 & | - \\ (4) & 6a & +b & & = & 0 & | \\ \hline & a & & & = & 2 \end{array}$$

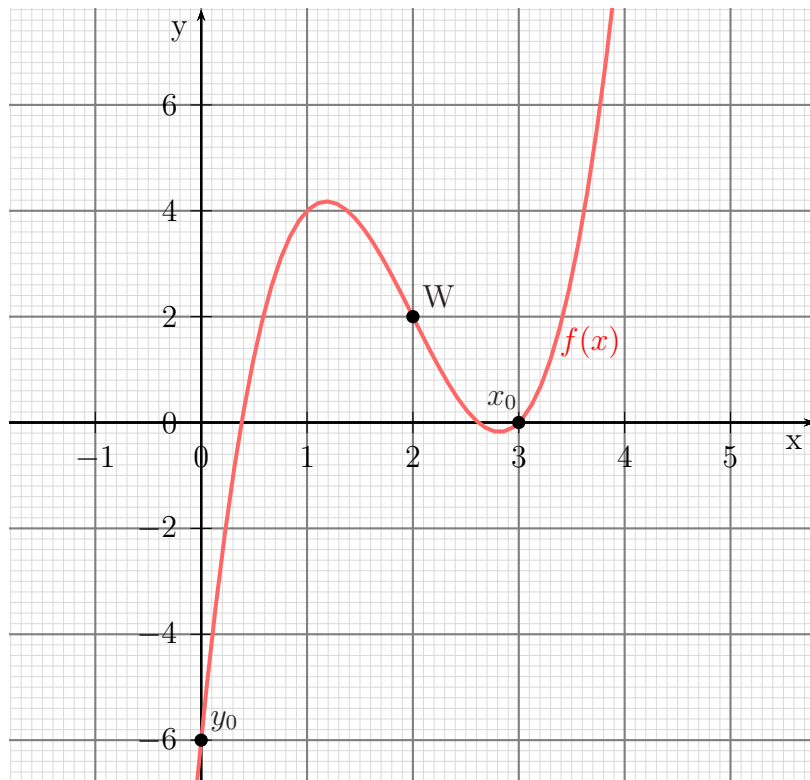
Das Ergebnis wird in (4) eingesetzt.

$$\begin{array}{rclcl} 6a + b & = & 0 \\ 6 \cdot 2 + b & = & 0 \\ 12 + b & = & 0 & | -12 \\ b & = & -12 \end{array}$$

Die Ergebnisse für a und b werden in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rclcl} 9a + 3b + c & = & 2 \\ 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-12) + c & = & 2 \\ 18 - 36 + c & = & 2 & | +18 \\ c & = & 20 \end{array}$$

Wir fassen zusammen: $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 20x - 6$



7 FKTAUFS-07

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(1|6)$ und einen Wendepunkt bei $(0|-2)$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung!

Lösung

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Aus dem Text ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\begin{array}{llll} (1) & f(1) & = & 6 \quad \Rightarrow \quad a + b + c + d = 6 & (2) \\ (2) & f'(1) & = & 0 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = 0 & (2) \\ (3) & f(0) & = & -2 \quad \Rightarrow \quad d = -2 & (2) \\ (4) & f''(0) & = & 0 \quad \Rightarrow \quad 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 & (2) \end{array}$$

Aus (3) und (4) erhalten wir sofort die ersten Parameter:

$$d = -2 \quad b = 0$$

Die Werte werden in (1) und (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} (1) & a + c - 2 & = 6 \\ (2) & 3a + c & = 0 \\ \hline (1) & a + c & = 8 \\ (2) & 3a + c & = 0 \quad (3) \end{array}$$

Die Gleichungen können voneinander subtrahiert werden, um c zu eliminieren.

$$\begin{array}{rcl} (1) & a + c & = 8 \quad | - \\ (2) & 3a + c & = 0 \quad | - \\ \hline & 2a & = -8 \quad | : 2 \\ & a & = -4 \quad (3) \end{array}$$

Jetzt fehlt nur noch c . Dazu kann Gleichung (1) verwendet werden.

$$\begin{array}{rcl} a + c & = & 8 \\ -4 + c & = & 8 \quad | + 4 \\ c & = & 12 \quad (3) \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet damit: $f(x) = -4x^3 + 12x - 2$ (1)

8 FKTAUFS-08

Ein Polynom 3. Grades hat einen Tiefpunkt bei $T(0|-4)$ und einen Wendepunkt bei $(1|2)$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung!

Lösung

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Aus dem Text ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\begin{array}{llcl} (1) & f(0) & = & -4 \Rightarrow d = -4 & (2) \\ (2) & f'(0) & = & 0 \Rightarrow c = 0 & (2) \\ (3) & f(1) & = & 2 \Rightarrow a + b + c + d = 2 & (2) \\ (4) & f''(1) & = & 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 & (2) \end{array}$$

Aus (1) und (2) erhalten wir sofort die ersten Parameter:

$$d = -4 \quad c = 0$$

Die Werte werden in (3) und (4) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} (3) & a + b - 4 & = 2 \quad | +4 \\ (4) & 6a + 2b & = 0 \quad | :2 \\ \hline (3) & a + b & = 6 \\ (4) & 3a + b & = 0 & (3) \end{array}$$

Gleichung (3) kann jetzt von Gleichung (4) subtrahiert werden.

$$\begin{array}{rcl} (3) & a + b & = 6 \quad | - \\ (4) & 3a + b & = 0 \quad | \\ \hline & 2a & = -6 \quad | :2 \\ & a & = -3 & (3) \end{array}$$

Jetzt fehlt nur noch b . Dies kann mit Gleichung (3) berechnet werden.

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 6 \\ -3 + b & = & 6 \quad | +3 \\ b & = & 9 & (3) \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet damit: $f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 4$ (1)

9 FKTAUFS-09

Ein Polynom vierten Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(0|0)$ und einen Hochpunkt bei $H(3|54)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung (25)

Zunächst wird das Polynom 4. Grades sowie seine ersten beiden Ableitungen in Normalform aufgestellt.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c\end{aligned}$$

Nun können die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umgesetzt werden. Der Sattelpunkt $S(0|0)$ führt zu folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}(1) \quad f(0) &= 0 \Rightarrow a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0 \Rightarrow e = 0 \\(2) \quad f'(0) &= 0 \Rightarrow 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0 \\(3) \quad f''(0) &= 0 \Rightarrow 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0 \Rightarrow c = 0\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse können sofort in die Funktion und die erste Ableitung eingesetzt werden. Mit der zweiten Ableitung ginge das zwar auch, das ist aber nicht erforderlich.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^4 + bx^3 \\f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2\end{aligned}$$

Der Hochpunkt bei $H(3|54)$ führt zu zwei weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned}(4) \quad f(3) &= 54 \Rightarrow a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 = 54 \\(5) \quad f'(3) &= 0 \Rightarrow 4a \cdot 3^3 + 3b \cdot 3^2 = 0\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man dieses Lineargleichungssystem:

(4)	$81a$	$+27b$	$= 54$
(5)	$108a$	$+27b$	$= 0$

Dieses Gleichungssystem kann am einfachsten mit dem Subtraktionsverfahren, aber auch mit jedem beliebigen anderen Verfahren gelöst werden.

$$\begin{array}{rcll}(4) & 81a & +27b & = 54 & | - \\(5) & 108a & +27b & = 0 & | \\ \hline & 27a & & = -54 & | : 27 \\ & a & & = -2 & \end{array}$$

Das Ergebnis kann in (4) oder (5) eingesetzt werden, um b zu bestimmen. Ich führe dies mit Gleichung (5) durch.

$$\begin{array}{rclcl} 108a + 27b & = & 0 & & \\ 108 \cdot (-2) + 27b & = & 0 & & \\ -216 + 27b & = & 0 & | + 216 & \\ 27b & = & 216 & | : 27 & \\ b & = & 8 & & \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet damit: $f(x) = -2x^4 + 8x^3$

10 FKTAUFS-10

Ein Polynom vierten Grades hat einen Sattelpunkt bei $S(3|20)$ und einen Tiefpunkt bei $T(0|-7)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung (25)

Zunächst wird das Polynom 4. Grades sowie seine ersten beiden Ableitungen in Normalform aufgestellt.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c\end{aligned}$$

Nun können die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umgesetzt werden. Der Sattelpunkt $S(3|20)$ führt zu folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}(1) \quad f(3) &= 20 \Rightarrow a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3 + e = 20 \\(2) \quad f'(3) &= 0 \Rightarrow 4a \cdot 3^3 + 3b \cdot 3^2 + 2c \cdot 3 + d = 0 \\(3) \quad f''(3) &= 0 \Rightarrow 12a \cdot 3^2 + 6b \cdot 3 + 2c = 0\end{aligned}$$

Der Tiefpunkt bei $T(0|-7)$ führt zu zwei weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned}(4) \quad f(0) &= -7 \Rightarrow a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = -7 \\(5) \quad f'(0) &= 0 \Rightarrow 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man dieses Lineargleichungssystem 5. Ordnung:

(1)	$81a$	$+27b$	$+9c$	$+3d$	$+e$	$= 20$
(2)	$108a$	$+27b$	$+6c$	$+d$		$= 0$
(3)	$108a$	$+18b$	$+2c$			$= 0$
(4)					e	$= -7$
(5)				d		$= 0$

Da die Gleichungen (4) und (5) direkt die Werte $d = 0$ und $e = -7$ liefern, können diese sofort in die Gleichungen (1) bis (3) eingesetzt werden. Das Gleichungssystem reduziert sich damit auf ein System 3. Ordnung:

(1)	$81a$	$+27b$	$+9c$	$= 27$
(2)	$108a$	$+27b$	$+6c$	$= 0$
(3)	$108a$	$+18b$	$+2c$	$= 0$

Man kann das Gleichungssystem noch etwas vereinfachen, indem man die erste Gleichung durch 9, die zweite durch 3 und die dritte durch 2 dividiert.

(1)	$9a$	$+3b$	$+c$	$= 3$
(2)	$36a$	$+9b$	$+2c$	$= 0$
(3)	$54a$	$+9b$	$+c$	$= 0$

Für die weitere Lösung kann jedes beliebige Lösungsverfahren verwendet werden. In der Musterlösung verwende ich die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 36 & 9 & 2 \\ 54 & 9 & 1 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{27 + 0 + 0 - 0 - 54 - 0}{81 + 324 + 324 - 486 - 162 - 108} \\
 &= \frac{-27}{-27} \\
 a &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 36 & 0 & 2 \\ 54 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 36 & 9 & 2 \\ 54 & 9 & 1 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{0 + 324 + 0 - 0 - 0 - 108}{-27} \\
 &= \frac{216}{-27} \\
 b &= -8
 \end{aligned}$$

Beide Werte werden eingesetzt in Gleichung (1).

$$\begin{aligned}
 9a + 3b + c &= 3 \\
 9 \cdot 1 + 3 \cdot (-8) + c &= 3 \\
 -15 + c &= 3 \quad | +15 \\
 c &= 18
 \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 7$

11 FKTAUFS-11

Ein zur y -Achse spiegelsymmetrisches Polynom 4. Grades hat bei $x_1 = 1$ eine Tangente mit der Funktionsgleichung: $f_1(x) = 4x - 1$. Außerdem verläuft der Funktionsgraph durch den Punkt $P(-2|18)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für $f(x)$!

Lösung (25)

Zunächst wird das Polynom 4. Grades sowie die erste Ableitung aufgestellt. Bei Spiegelsymmetrie treten nur die gradzahligen Exponenten auf.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^4 + cx^2 + e \\f'(x) &= 4ax^3 + 2cx\end{aligned}$$

Nun können die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umgesetzt werden. Die Angaben zur Tangente ergeben zwei Bedingungen. Eine dritte Bedingung ergibt sich aus dem angegebenen Punkt P .

$$\begin{aligned}(1) \quad f(1) &= f_1(1) \Rightarrow a \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 + e = 4 \cdot 1 - 1 \\(2) \quad f'(1) &= f'_1(1) \Rightarrow 4a \cdot 1^3 + 2c \cdot 1 = 4 \\(3) \quad f(-2) &= 18 \Rightarrow a \cdot (-2)^4 + c \cdot (-2)^2 + e = 18\end{aligned}$$

Alle Gleichungen werden vereinfacht. Wir erhalten dieses Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcll} (1) & a & +c & +e = 3 \\ (2) & 4a & +2c & = 4 \\ (3) & 16a & +4c & +e = 18 \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit **jedem** bekannten Verfahren gelöst werden. Es bietet sich an, die Gleichungen (1) und (3) voneinander zu subtrahieren, um e zu eliminieren. Daher mache ich mit dem Subtraktionsverfahren weiter.

$$\begin{array}{rcll} (1) & a & +c & +e = 3 & | - \\ (3) & 16a & +4c & +e = 18 & | \\ \hline (4) & 15a & +3c & = 15 \end{array}$$

Damit bleibt ein Gleichungssystem mit nur noch zweitem Grad übrig.

$$\begin{array}{rcll} (2) & 4a & +2c & = 4 \\ (4) & 15a & +3c & = 15 \end{array}$$

Auch für den zweiten Reduktionsschritt verwende ich das Additions-/Subtraktionsverfahren. Die Gleichungen werden so vorbereitet, dass beim Subtrahieren c wegfällt.

$$\begin{array}{rcll} (2) & 4a & +2c & = 4 & | : 2 \\ (4) & 15a & +3c & = 15 & | : 3 \\ \hline (2) & 2a & +c & = 2 & | - \\ (4) & 5a & +c & = 5 & | \\ \hline & 3a & & = 3 & | : 3 \\ & a & & = 1 \end{array}$$

Zur Berechnung von c verwende ich die umgestellte Gleichung (2).

$$\begin{array}{rcl} 2a + c & = & 2 \\ 2 \cdot 1 + c & = & 2 \quad | - 2 \\ c & = & 0 \end{array}$$

Mit Gleichung (1) berechne ich nun e .

$$\begin{array}{rcl} a + c + e & = & 3 \\ 1 + 0 + c & = & 3 \quad | - 1 \\ c & = & 2 \end{array}$$

Mit diesen Parametern lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = x^4 + 2$

12 FKTAUFS-12

Ein zur y -Achse spiegelsymmetrisches Polynom 4. Grades hat bei $x_1 = 1$ eine Tangente mit der Funktionsgleichung: $f_1(x) = -4x + 12$. Außerdem verläuft der Funktionsgraph durch den Punkt $P(-2 | -7)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für $f(x)$!

Lösung (25)

Zunächst wird das Polynom 4. Grades sowie die erste Ableitung aufgestellt. Bei Spiegelsymmetrie treten nur die gradzahligen Exponenten auf.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^4 + cx^2 + e \\f'(x) &= 4ax^3 + 2cx\end{aligned}$$

Nun können die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umgesetzt werden. Die Angaben zur Tangente ergeben zwei Bedingungen. Eine dritte Bedingung ergibt sich aus dem angegebenen Punkt P .

$$\begin{aligned}(1) \quad f(1) &= f_1(1) \Rightarrow a \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 + e = -4 \cdot 1 + 12 \\(2) \quad f'(1) &= f'_1(1) \Rightarrow 4a \cdot 1^3 + 2c \cdot 1 = -4 \\(3) \quad f(-2) &= -7 \Rightarrow a \cdot (-2)^4 + c \cdot (-2)^2 + e = -7\end{aligned}$$

Alle Gleichungen werden vereinfacht. Wir erhalten dieses Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} (1) & a & +c +e = 8 \\ (2) & 4a & +2c = -4 \\ (3) & 16a & +4c +e = -7 \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit **jedem** bekannten Verfahren gelöst werden. Es bietet sich an, die Gleichungen (1) und (3) voneinander zu subtrahieren, um e zu eliminieren. Daher mache ich mit dem Subtraktionsverfahren weiter.

$$\begin{array}{rcl} (1) & a & +c +e = 8 \quad | - \\ (3) & 16a & +4c +e = -7 \quad | - \\ \hline (4) & 15a & +3c = -15 \end{array}$$

Damit bleibt ein Gleichungssystem mit nur noch zweitem Grad übrig.

$$\begin{array}{rcl} (2) & 4a & +2c = -4 \\ (4) & 15a & +3c = -15 \end{array}$$

Auch für den zweiten Reduktionsschritt verwende ich das Additions-/Subtraktionsverfahren. Die Gleichungen werden so vorbereitet, dass beim Subtrahieren c wegfällt.

$$\begin{array}{rcl} (2) & 4a & +2c = -4 \quad | :2 \\ (4) & 15a & +3c = -15 \quad | :3 \\ \hline (2) & 2a & +c = -2 \quad | - \\ (4) & 5a & +c = -5 \quad | - \\ \hline & 3a & = -3 \quad | :3 \\ & a & = -1 \end{array}$$

Zur Berechnung von c verwende ich die umgestellte Gleichung (2).

$$\begin{array}{rcl} 2a + c & = & -2 \\ 2 \cdot (-1) + c & = & -2 \quad | + 2 \\ c & = & 0 \end{array}$$

Mit Gleichung (1) berechne ich nun e .

$$\begin{array}{rcl} a + c + e & = & 8 \\ -1 + 0 + c & = & 8 \quad | + 1 \\ c & = & 9 \end{array}$$

Mit diesen Parametern lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -x^4 + 9$

13 FKTAUFS-13

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = -1$ und einen Wendepunkt bei $W(1|4)$. Ein Hochpunkt liegt auf der y -Achse. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Um aus dem Text die Bedingungen für insgesamt 4 Gleichungen herauszuholen, gehen wir den Text schrittweise durch.

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = -1 \dots$

Dass es sich um ein **Polynom 3. Grades** handelt, haben wir schon ausgenutzt, indem wir den Ansatz mit der Normalform gemacht haben. **Nullstelle** bedeutet, dass die Funktion dort Null ist:

$$f(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir alles aus diesem Teil des Satzes verwendet. Es geht weiter:

\dots und einen Wendepunkt bei $W(1|4)$.

Im Wendepunkt stecken gleich zwei Informationen:

1. Der Funktionswert von 1 beträgt 4.
2. Die zweite Ableitung von 1 muss Null sein.

Das ergibt entsprechend zwei Bedingungen und zwei Gleichungen.

$$\begin{array}{lcl} f(1) & = & 4 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 4 \quad (2) \\ f''(1) & = & 0 \Rightarrow 6a \cdot 1 + 2b = 0 \quad (2) \end{array}$$

Drei Bedingungen haben wir schon, es fehlt also nur noch eine. Dazu lesen wir die Aufgabenstellung weiter durch:

Ein Hochpunkt liegt auf der y -Achse.

Da die y -Achse bei $x = 0$ liegt, ist die erste Ableitung von x bei $x = 0$ ebenfalls gleich 0.

$$f'(0) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + c = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir 4 Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter a bis d . Zusammengefasst und etwas vereinfacht sieht das Gleichungssystem 4. Grades dann so aus:

$$\begin{array}{rclclcl} (1) & -a & +b & -c & +d & = & 0 \\ (2) & a & +b & +c & +d & = & 4 \\ (3) & 6a & +2b & & & = & 0 \\ (4) & & & c & & = & 0 \end{array}$$

Gleichung (4) gibt sofort den Wert für c an. Setzt man den Wert in die ersten Gleichungen ein, dann bleibt ein Gleichungssystem 3. Grades übrig:

$$\begin{array}{rclclcl} (1) & -a & +b & +d & = & 0 \\ (2) & a & +b & +d & = & 4 \\ (3) & 6a & +2b & & = & 0 \end{array}$$

Hier bietet sich das Subtraktionsverfahren an. Man kann sofort Gleichung (1) von Gleichung (2) subtrahieren. Die sich ergebende Gleichung (5) bildet zusammen mit Gleichung (3) dann ein Gleichungssystem 2. Grades.

$$\begin{array}{rclclcl} (1) & -a & +b & +d & = & 0 & | - \\ (2) & a & +b & +d & = & 4 & | \\ \hline (5) & 2a & & & = & 4 & | : 2 \\ & a & & & = & 2 & \end{array}$$

Hier hatten wir Glück, nicht nur d ist – wie geplant – weggefallen, sondern auch b .

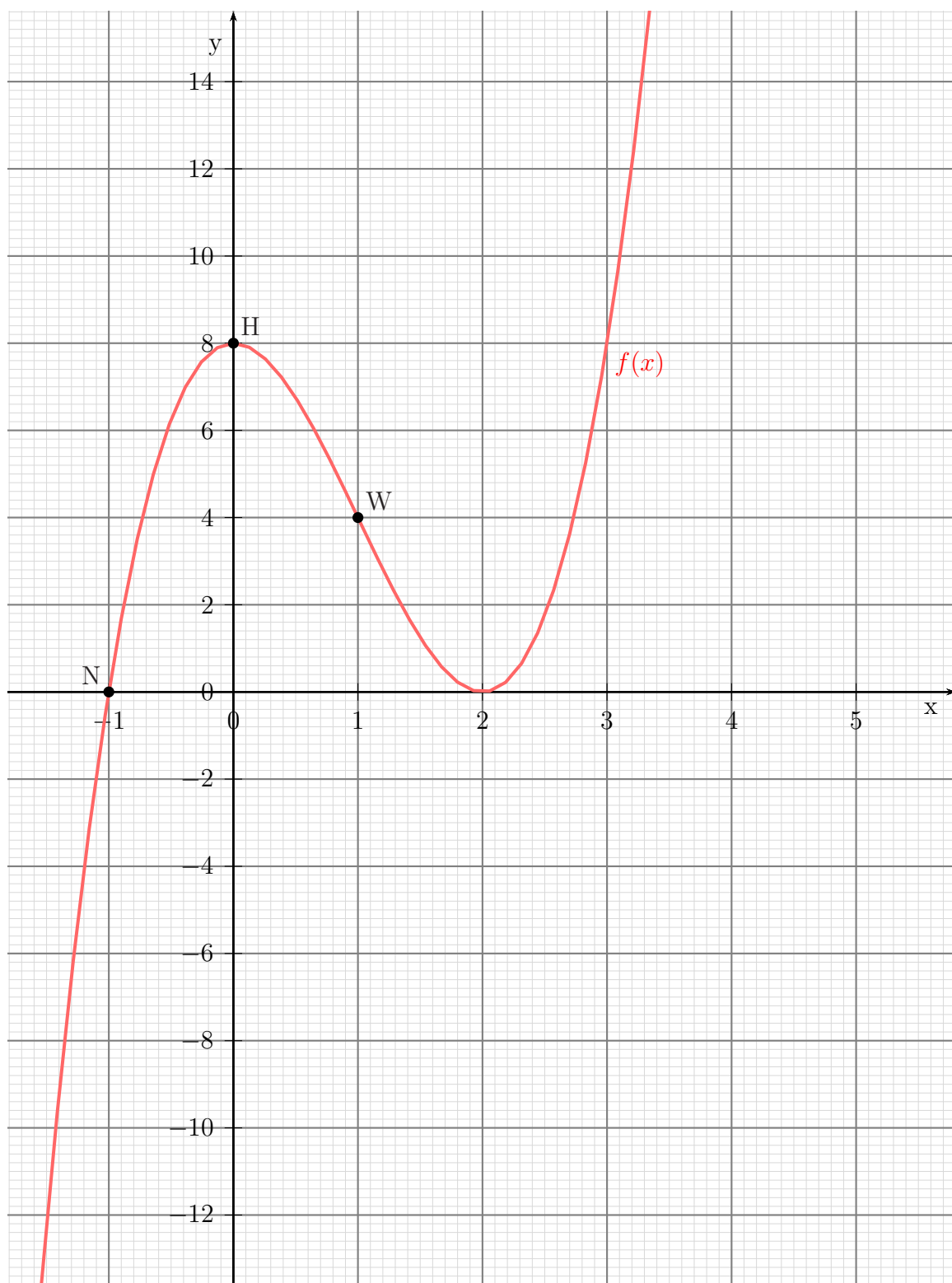
Dieses Ergebnis wird in Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{array}{rclclcl} 6a + 2b & = & 0 \\ 6 \cdot 2 + 2b & = & 0 \\ 12 + 2b & = & 0 & | - 12 \\ 2b & = & -12 & | : 2 \\ b & = & -6 & \end{array}$$

Diese Ergebnisse werden in (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rclclcl} a + b + d & = & 4 \\ 2 - 6 + d & = & 4 \\ -4 + d & = & 4 & | + 4 \\ d & = & 8 & \end{array}$$

Wir fassen zusammen: $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8$



14 FKTAUFS-14

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 1$ und einen Wendepunkt bei $W(-1|6)$. Ein Hochpunkt liegt auf der y -Achse. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Um aus dem Text die Bedingungen für insgesamt 4 Gleichungen herauszuholen, gehen wir den Text schrittweise durch.

Ein Polynom 3. Grades hat eine Nullstelle bei $x_0 = 1 \dots$

Dass es sich um ein **Polynom 3. Grades** handelt, haben wir schon ausgenutzt, indem wir den Ansatz mit der Normalform gemacht haben. **Nullstelle** bedeutet, dass die Funktion dort Null ist:

$$f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir alles aus diesem Teil des Satzes verwendet. Es geht weiter:

\dots und einen Wendepunkt bei $W(-1|6)$.

Im Wendepunkt stecken gleich zwei Informationen:

1. Der Funktionswert von -1 beträgt 6.
2. Die zweite Ableitung von -1 muss Null sein.

Das ergibt entsprechend zwei Bedingungen und zwei Gleichungen.

$$\begin{array}{lcl} f(-1) & = & 6 \Rightarrow a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 6 \quad (2) \\ f''(-1) & = & 0 \Rightarrow 6a \cdot (-1) + 2b = 0 \quad (2) \end{array}$$

Drei Bedingungen haben wir schon, es fehlt also nur noch eine. Dazu lesen wir die Aufgabenstellung weiter durch:

Ein Hochpunkt liegt auf der y -Achse.

Da die y -Achse bei $x = 0$ liegt, ist die erste Ableitung von x bei $x = 0$ ebenfalls gleich 0.

$$f'(0) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + c = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir 4 Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter a bis d . Zusammengefasst und etwas vereinfacht sieht das Gleichungssystem 4. Grades dann so aus:

(1)	a	$+b$	$+c$	$+d$	$= 0$
(2)	$-a$	$+b$	$-c$	$+d$	$= 6$
(3)	$-6a$	$+2b$			$= 0$
(4)				c	$= 0$

Gleichung (4) gibt sofort den Wert für c an. Setzt man den Wert in die ersten Gleichungen ein, dann bleibt ein Gleichungssystem 3. Grades übrig:

(1)	a	$+b$	$+d$	$= 0$	
(2)	$-a$	$+b$	$+d$	$= 6$	
(3)	$-6a$	$+2b$			$= 0$

Hier bietet sich das Subtraktionsverfahren an. Man kann sofort Gleichung (2) von Gleichung (1) subtrahieren. Die sich ergebende Gleichung (5) bildet zusammen mit Gleichung (3) dann ein Gleichungssystem 2. Grades.

(1)	a	$+b$	$+d$	$= 0$	$ $
(2)	$-a$	$+b$	$+d$	$= 6$	$ -$
(5)	$2a$			$= -6$	$: 2$
	a			$= -3$	

Hier hatten wir Glück, nicht nur d ist – wie geplant – weggefallen, sondern auch b .

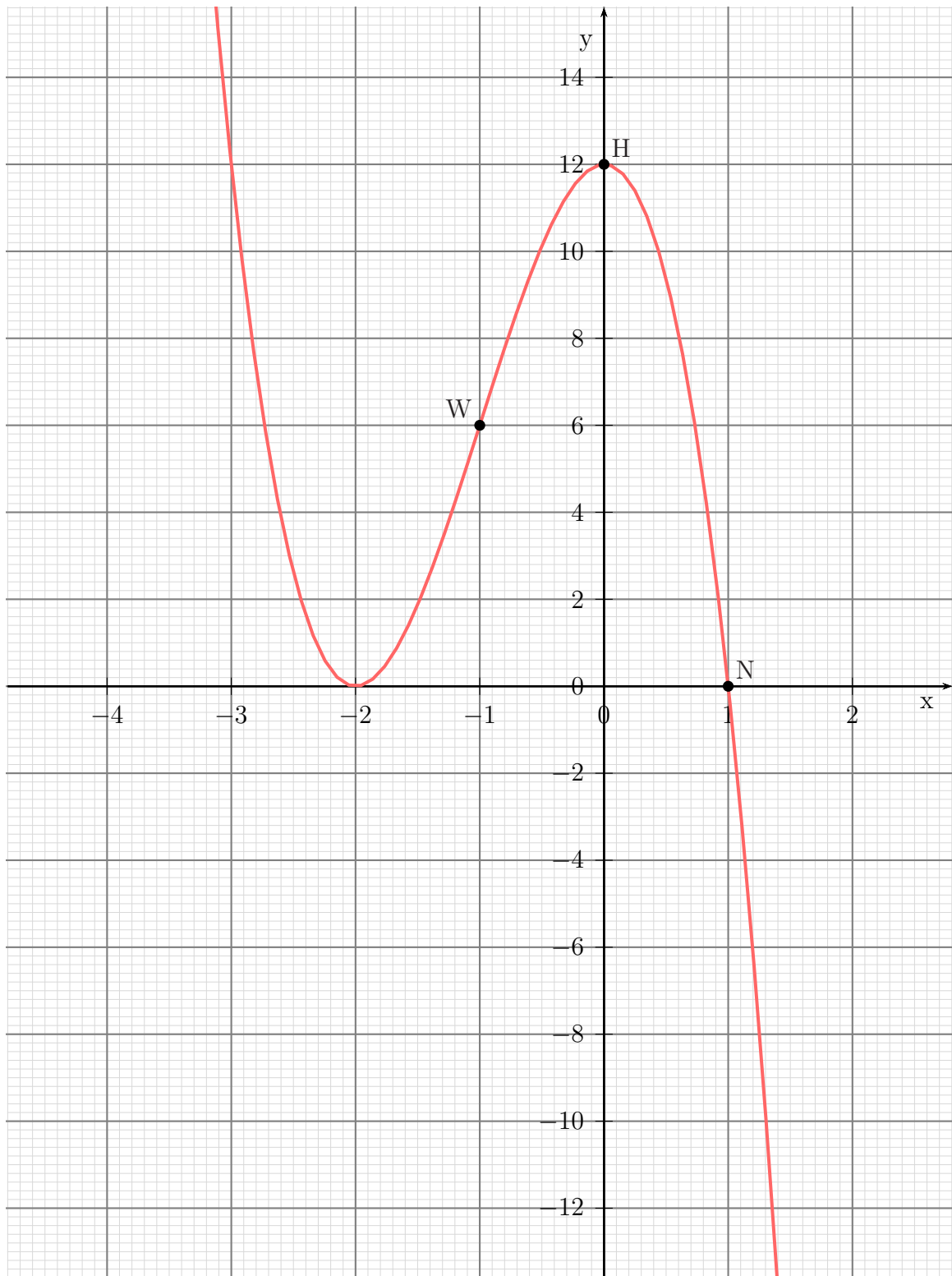
Dieses Ergebnis wird in Gleichung (3) eingesetzt.

$-6a + 2b$	$= 0$
$-6 \cdot (-3) + 2b$	$= 0$
$18 + 2b$	$= 0 \quad - 18$
$2b$	$= -18 \quad : 2$
b	$= -9$

Diese Ergebnisse werden in (1) eingesetzt.

$a + b + d$	$= 0$
$-3 - 9 + d$	$= 0$
$-12 + d$	$= 0 \quad + 12$
d	$= 12$

Wir fassen zusammen: $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 12$



15 FKTAUFS-15

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei $H(2|5)$ und einen Wendepunkt bei $(1|-3)$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung!

Lösung

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Aus dem Text ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\begin{array}{llcl} (1) & f(2) & = & 5 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 5 \quad (2) \\ (2) & f'(2) & = & 0 \quad \Rightarrow \quad 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \quad (2) \\ (3) & f(1) & = & -3 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -3 \quad (2) \\ (4) & f''(1) & = & 0 \quad \Rightarrow \quad 6a \cdot 1 + 2b = 0 \quad (2) \end{array}$$

Zusammengefasst ergibt sich folgendes Linargleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} (1) \quad 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ (2) \quad 12a + 4b + c = 0 \\ (3) \quad a + b + c + d = -3 \\ (4) \quad 6a + 2b = 0 \end{array}} \end{array}$$

Es bietet sich an, Gleichung (3) von Gleichung (1) zu subtrahieren.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 8a + 4b + 2c + d & = 5 \quad | \\ (3) & a + b + c + d & = -3 \quad | - \\ \hline (5) & 7a + 3b + c & = 8 \end{array}$$

Zusammen mit (2) und (4) haben wir jetzt ein Gleichungssystem von nur noch 3. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{l} (2) \quad 12a + 4b + c = 0 \\ (4) \quad 6a + 2b = 0 \\ (5) \quad 7a + 3b + c = 8 \end{array}}$$

Hier bietet es sich an, Gleichung (5) von Gleichung (2) zu subtrahieren.

$$\begin{array}{rcl} (2) & 12a + 4b + c & = 0 \quad | \\ (5) & 7a + 3b + c & = 8 \quad | - \\ \hline (6) & 5a + b & = -8 \end{array}$$

Gleichung (6) und (4) stellen jetzt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung dar.

$$\boxed{\begin{array}{l} (4) \quad 6a + 2b = 0 \\ (6) \quad 5a + b = -8 \end{array}}$$

Gleichung (4) kann durch 2 dividiert werden, damit die Gleichungen voneinander subtrahiert werden können.

$$\begin{array}{rclcl}
 (4) & 6a & +2b & = & 0 & | : 2 \\
 (6) & 5a & +b & = & -8 & \\
 \hline
 (4) & 3a & +b & = & 0 & | - \\
 (6) & 5a & +b & = & -8 & | \\
 \hline
 & 2a & & = & -8 & | : 2 \\
 & a & & = & -4 & (8)
 \end{array}$$

Das Ergebnis kann in die vereinfachte Gleichung (4) eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rclcl}
 & 3a + b & = & 0 \\
 & 3 \cdot (-4) + b & = & 0 \\
 & -12 + b & = & 0 & | + 12 \\
 & b & = & 12 & (2)
 \end{array}$$

Beide Ergebnisse werden in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rclcl}
 & 12a + 4b + c & = & 0 \\
 & 12 \cdot (-4) + 4 \cdot 12 + c & = & 0 \\
 & c & = & 0 & (2)
 \end{array}$$

Alle Ergebnisse werden in Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{array}{rclcl}
 & a + b + c + d & = & -3 \\
 & -4 + 12 + 0 + d & = & -3 & | - 8 \\
 & d & = & -11 & (2)
 \end{array}$$

Hiermit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 11$ (1)

16 FKTAUFS-16

Die Funktion $f_1(x)$ ist ein Polynom 3. Grades. Ihr Graph schneidet die x -Achse bei $x_0 = -1$. Der Wendepunkt liegt bei $x_W = 1$ mit der Wendetangente $f_2(x) = -x + 7$. Bestimmen Sie die Funktion $f_1(x)$!

Lösung:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f_1'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f_1''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x_0 = -1 &\Rightarrow f_1(-1) = 0 &\Rightarrow a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d &= 0 \\ (2) \quad x_W = 1 &\Rightarrow f_1'(1) = 0 &\Rightarrow 6a \cdot 1 + 2b \cdot 1 &= 0 \\ (3) \quad f_1(x_W) = f_2(x_W) &\Rightarrow f_1(1) = f_2(1) &\Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d &= -1 + 7 \\ (4) \quad f_1'(x_W) = f_2'(x_W) &\Rightarrow f_1'(1) = f_2'(1) &\Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c &= -1 \end{aligned}$$

Wir erhalten zusammengefasst das Lineargleichungssystem:

(1)	$-a$	$+b$	$-c$	$+d$	$= 0$
(2)	$6a$	$+2b$			$= 0$
(3)	a	$+b$	$+c$	$+d$	$= 6$
(4)	$3a$	$+2b$	$+c$		$= -1$

Viele unterschiedliche Lösungsverfahren sind möglich. Ich wähle zunächst das *Einsetzungsverfahren*. Ich löse (2) nach b auf und setze das Ergebnis in (1), (3) und (4) ein.

$$\begin{aligned} 6a + 2b &= 0 & | -6a \\ 2b &= -6a & | :2 \\ b &= -3a \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} (1) \quad -a - 3a - c + d &= 0 \\ (3) \quad a + (-3a) + c + d &= 6 \\ (4) \quad 3a + 2 \cdot (-3a) + c &= -1 \\ \hline (1) \quad -4a - c + d &= 0 \\ (3) \quad -2a + c + d &= 6 \\ (4) \quad -3a + c &= -1 \end{aligned}$$

Subtrahiert man (1) von (3), dann fällt d weg.

$$\begin{aligned} (1) \quad -4a \quad -c \quad +d &= 0 & | - \\ (3) \quad -2a \quad +c \quad +d &= 6 \\ \hline (5) \quad 2a \quad +2c &= 6 \end{aligned}$$

Gleichung (5) und (4) bleiben übrig.

$$\begin{aligned} (5) \quad 2a \quad +2c &= 6 \\ (4) \quad -3a \quad +c &= -1 \end{aligned}$$

Ich löse (4) nach c auf und setze in (5) ein.

$$\begin{array}{rcl} -3a + c & = & -1 \quad | + 3a \\ c & = & 3a - 1 \end{array}$$

In (5) einsetzen.

$$\begin{array}{rcl} 2a + 2c & = & 6 \\ 2a + 2 \cdot (3a - 1) & = & 6 \\ 2a + 6a - 2 & = & 6 \\ 8a - 2 & = & 6 \quad | + 2 \\ 8a & = & 8 \quad | : 8 \\ a & = & 1 \end{array}$$

Einsetzen in umgestellte (4):

$$c = 3a - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

Einsetzen in umgestellte (1):

$$\begin{array}{rcl} -4a - c + d & = & 0 \\ -4 \cdot 1 - 2 + d & = & 0 \\ -6 + d & = & 0 \quad | + 6 \\ d & = & 6 \end{array}$$

Einsetzen in umgestellte (2):

$$b = -3a = -3 \cdot 1 = -3$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$

