

Aufgaben zur Vektorrechnung

2. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Beträge	3
1.1	Aufgabe 1	3
2	Komplanarität/Lin. Abhängigkeit	3
2.1	Aufgabe 1	3
2.2	Aufgabe 2	4
2.3	Aufgabe 3	5
2.4	Aufgabe 4	6
2.5	Aufgabe 5	6
2.6	Aufgabe 6	7
2.7	Aufgabe 7	7
2.8	Aufgabe 8	9
2.9	Aufgabe 9	11
2.10	Aufgabe 10	12
2.11	Aufgabe 11	13
2.12	Aufgabe 12	13
2.13	Aufgabe 13	15
3	Orthogonalität	16
3.1	Aufgabe 1	16
3.2	Aufgabe 2	17
3.3	Aufgabe 3	19
3.4	Aufgabe 4	21
3.5	Aufgabe 5	23
3.6	Aufgabe 6	24
4	Flächen	25
4.1	Aufgabe 1	25
4.2	Aufgabe 2	26
4.3	Aufgabe 3	27

4.4	Aufgabe 4	28
4.5	Aufgabe 5	29
4.6	Aufgabe 6	30
5	Sonstiges	31
5.1	Aufgabe 1	31
5.2	Aufgabe 2	32
5.3	Aufgabe 3	33
5.4	Aufgabe 4	34
5.5	Aufgabe 5	35

1 Beträge

1.1 Aufgabe 1

Berechnen Sie die Beträge der Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\ a &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= \sqrt{(-21)^2 + (-28)^2} \\ b &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= \sqrt{(-12)^2 + 4^2 + (-3)^2} \\ c &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{d}| &= \sqrt{15^2 + (-16)^2 + 12^2} \\ d &= 25 \end{aligned}$$

2 Komplanarität/Lin. Abhängigkeit

2.1 Aufgabe 1

Sind die Vektoren **komplanar**? Weisen Sie Ihre Behauptung durch eine Rechnung nach!

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

a) Am einfachsten lässt sich das mit der Determinante aus den drei Vektoren prüfen.

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 0 & -6 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 36 - 36 - 12 - 0 + 12 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0\end{aligned}$$

Da die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ ist, sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} **komplanar**.

b) Am einfachsten lässt sich das auch hier mit der Determinante aus den drei Vektoren prüfen.

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -16 - 15 + 6 + 36 + 2 - 20 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= -7\end{aligned}$$

Da die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ ist, sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} **nicht komplanar**.

2.2 Aufgabe 2

Sind die Vektoren **komplanar**? Weisen Sie Ihre Behauptung durch eine Rechnung nach!

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

a) Am einfachsten lässt sich das mit der Determinante aus den drei Vektoren prüfen.

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -4 + 0 + 5 - 4 - 0 + 3 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0\end{aligned}$$

Da die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ ist, sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} **komplanar**.

b) Am einfachsten lässt sich das mit der Determinante aus den drei Vektoren prüfen.

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 5 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -24 - 32 + 40 + 96 - 8 + 40 \\ &= 112 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &\neq 0\end{aligned}$$

Da die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ ist, sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} **nicht komplanar**.

2.3 Aufgabe 3

Sind die Vektoren **komplanar**? Weisen Sie Ihre Behauptung durch eine Rechnung nach!

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

a) Am einfachsten lässt sich das mit der Determinante aus den drei Vektoren prüfen.

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 6 + 0 - 18 + 12 + 0 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= -12\end{aligned}$$

Da die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ ist, sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} **nicht komplanar**.

b) Am einfachsten lässt sich das mit der Determinante aus den drei Vektoren prüfen.

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -45 - 45 + 90 + 125 - 27 + 54 \\ &= 152 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &\neq 0\end{aligned}$$

Da die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ ist, sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} **nicht komplanar**.

2.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} x & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} &= 0 \\ 14x + 84 - 2 - 12 + 7x - 28 &= 0 \\ 21x + 42 &= 0 & | -42 \\ 21x &= -42 & | :21 \\ x &= -2\end{aligned}$$

2.5 Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} &= 0 \\ 84 - 2 - 4x - 4x - 12 - 14 &= 0 \\ -8x + 56 &= 0 & | -56 \\ -8x &= -56 & | : (-8) \\ x &= 7\end{aligned}$$

2.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \\ 1 + 24 + 4x + 3x - 8 + 4 &= 0 \\ 7x + 21 &= 0 & | -21 \\ 7x &= -21 & | : 7 \\ x &= -3\end{aligned}$$

2.7 Aufgabe 7

Prüfen Sie, ob die beiden Vektoren **Linear abhängig** sind!

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ -25 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ -56 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -28 \\ -14 \\ 49 \end{pmatrix}$$

Lösung a:

$$\begin{aligned}
 \lambda \cdot \vec{a} &= \vec{b} \\
 \lambda \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ -25 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \lambda \cdot (-15) \\ \lambda \cdot 20 \\ \lambda \cdot (-25) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -15\lambda \\ 20\lambda \\ -25\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Hieraus können nun drei **Komponentengleichungen** gemacht werden.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad -15\lambda &= -12 \\
 (2) \quad 20\lambda &= 16 \\
 (3) \quad -25\lambda &= 20
 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) bestimme ich λ und setze es in die anderen Gleichungen ein.

$$\begin{aligned}
 -15\lambda &= -12 \quad | :(-15) \\
 \lambda &= \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

$$\text{In (2):} \quad 20 \cdot \frac{4}{5} = 16 \quad (\text{passt})$$

$$\text{In (3):} \quad -25 \cdot \frac{4}{5} = -20 \quad (\text{passt nicht!})$$

Die Vektoren sind **nicht linear abhängig**.

Lösung b:

$$\begin{aligned}
 \lambda \cdot \vec{a} &= \vec{b} \\
 \lambda \cdot \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ -56 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -28 \\ -14 \\ 49 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \lambda \cdot 32 \\ \lambda \cdot 16 \\ \lambda \cdot (-56) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -28 \\ -14 \\ 49 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 32\lambda \\ 16\lambda \\ -56\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -28 \\ -14 \\ 49 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Hieraus können nun drei **Komponentengleichungen** gemacht werden.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 32\lambda &= -28 \\
 (2) \quad 16\lambda &= -14 \\
 (3) \quad -56\lambda &= 49
 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) bestimme ich λ und setze es in die anderen Gleichungen ein.

$$\begin{aligned} 32\lambda &= -28 \quad | : 32 \\ \lambda &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In (2):} \quad 16 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) &= -14 \quad (\text{passt}) \\ \text{In (3):} \quad -56 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) &= 49 \quad (\text{passt}) \end{aligned}$$

Die Vektoren sind **linear abhängig**.

2.8 Aufgabe 8

Prüfen Sie, ob die beiden Vektoren **Linear abhängig** sind!

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -28 \\ 42 \\ -35 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 52 \\ -78 \\ 65 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -49 \\ -77 \\ -91 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -35 \\ -55 \\ -64 \end{pmatrix}$$

Lösung a:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{a} &= \vec{b} \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -28 \\ 42 \\ -35 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 52 \\ -78 \\ 65 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda \cdot (-28) \\ \lambda \cdot 42 \\ \lambda \cdot (-35) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 52 \\ -78 \\ 65 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -28\lambda \\ 42\lambda \\ -35\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 52 \\ -78 \\ 65 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus können nun drei **Komponentengleichungen** gemacht werden.

$$\begin{aligned} (1) \quad -28\lambda &= 52 \\ (2) \quad 42\lambda &= -78 \\ (3) \quad -35\lambda &= 65 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) bestimme ich λ und setze es in die anderen Gleichungen ein.

$$-28\lambda = 52 \quad | : (-28)$$

$$\lambda = -\frac{13}{7}$$

$$\text{In (2): } 42 \cdot \left(-\frac{13}{7}\right) = -78 \quad (\text{passt})$$

$$\text{In (3): } -35 \cdot \left(-\frac{13}{7}\right) = 65 \quad (\text{passt})$$

Die Vektoren sind **linear abhängig**.

Lösung b:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{a} &= \vec{b} \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -49 \\ -77 \\ -91 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -35 \\ -55 \\ -64 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda \cdot (-49) \\ \lambda \cdot (-77) \\ \lambda \cdot (-91) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -35 \\ -55 \\ -64 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -49\lambda \\ -77\lambda \\ -91\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -35 \\ -55 \\ -64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus können nun drei **Komponentengleichungen** gemacht werden.

$$(1) \quad -49\lambda = -35$$

$$(2) \quad -77\lambda = -55$$

$$(3) \quad -91\lambda = -64$$

Aus Gleichung (1) bestimme ich λ und setze es in die anderen Gleichungen ein.

$$-49\lambda = -35 \quad | : (-49)$$

$$\lambda = \frac{5}{7}$$

$$\text{In (2): } -77 \cdot \frac{5}{7} = -55 \quad (\text{passt})$$

$$\text{In (3): } -91 \cdot \frac{5}{7} = -65 \neq -64 \quad (\text{passt nicht!})$$

Die Vektoren sind **nicht linear abhängig**.

2.9 Aufgabe 9

Prüfen Sie, ob die beiden Vektoren **Linear abhängig** sind!

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ 25 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -24 \\ -36 \\ 33 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Lösung a:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{a} &= \vec{b} \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ 25 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -24 \\ -36 \\ 33 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda \cdot (-20) \\ \lambda \cdot (-30) \\ \lambda \cdot 25 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -24 \\ -36 \\ 33 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -20\lambda \\ -30\lambda \\ 25\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -24 \\ -36 \\ 33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus können nun drei **Komponentengleichungen** gemacht werden.

$$\begin{aligned} (1) \quad -20\lambda &= -24 \\ (2) \quad -30\lambda &= -36 \\ (3) \quad 25\lambda &= 33 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) bestimme ich λ und setze es in die anderen Gleichungen ein.

$$\begin{aligned} -20\lambda &= -24 \quad | :(-20) \\ \lambda &= 1,2 \end{aligned}$$

$$\text{In (2): } -30 \cdot 1,2 = -36 \quad (\text{passt})$$

$$\text{In (3): } 25 \cdot 1,2 = 30 \neq 33 \quad (\text{passt nicht!})$$

Die Vektoren sind **nicht linear abhängig**.

Lösung b:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \vec{a} &= \vec{b} \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 21 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda \cdot 6 \\ \lambda \cdot (-12) \\ \lambda \cdot 21 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6\lambda \\ -12\lambda \\ 21\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hieraus können nun drei **Komponentengleichungen** gemacht werden.

$$\begin{aligned}(1) \quad 6\lambda &= 8 \\ (2) \quad -12\lambda &= -16 \\ (3) \quad 21\lambda &= 28\end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) bestimme ich λ und setze es in die anderen Gleichungen ein.

$$\begin{aligned}6\lambda &= 8 \quad | :6 \\ \lambda &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\text{In (2): } -12 \cdot \frac{4}{3} = -16 \quad (\text{passt})$$

$$\text{In (3): } 21 \cdot \frac{4}{3} = 28 \quad (\text{passt})$$

Die Vektoren sind **linear abhängig**.

2.10 Aufgabe 10

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} x & 2 & -4 \\ -9 & -3 & 1 \\ 10 & 5 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \\ 0 + 20 + 180 - 120 - 5x - 0 &= 0 \\ 80 - 5x &= 0 \quad | -80 \\ -5x &= -80 \quad | :(-5) \\ x &= 16\end{aligned}$$

2.11 Aufgabe 11

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} x & -5 & -3 \\ 11 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} &= 0 \\ -2x + 80 - 0 + 12 - 0 - 110 &= 0 \\ -2x - 18 &= 0 & | +18 \\ -2x &= 18 & | :(-2) \\ x &= -9 \end{aligned}$$

2.12 Aufgabe 12

Sind die Vektoren linear abhängig? Falls Sie dies ohne Rechnung erkennen, **begründen** Sie Ihre Antwort entsprechend anders!

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung a:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \vec{a} &= \vec{b} \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda \cdot 1 \\ \lambda \cdot 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hieraus können nun zwei **Komponentengleichungen** gemacht werden.

$$(1) \quad \lambda = 3$$

$$(2) \quad 2\lambda = 6$$

Aus Gleichung (1) kann sofort λ abgelesen werden. Ich setze diesen Wert in die andere Gleichung ein.

$$\text{In (2): } 2 \cdot 3 = 6 \quad (\text{passt})$$

Die Vektoren sind **linear abhängig**.

Lösung b:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \vec{a} &= \vec{b} \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda \cdot 5 \\ \lambda \cdot 10 \\ \lambda \cdot 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5\lambda \\ 10\lambda \\ 8\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hieraus können nun drei **Komponentengleichungen** gemacht werden.

$$(1) \quad 5\lambda = 1$$

$$(2) \quad 10\lambda = 2$$

$$(3) \quad 8\lambda = 3$$

Aus Gleichung (1) bestimme ich λ und setze es in die anderen Gleichungen ein.

$$5\lambda = 1 \quad | :5$$

$$\lambda = \frac{1}{5}$$

$$\text{In (2): } 10 \cdot \frac{1}{5} = 2 \quad (\text{passt})$$

$$\text{In (3): } 8 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5} \neq 3 \quad (\text{passt nicht})$$

Die Vektoren sind **nicht linear abhängig**.

2.13 Aufgabe 13

Sind die Vektoren **komplanar**? Weisen Sie Ihre Behauptung durch eine Rechnung nach!

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

a) Am einfachsten lässt sich das mit der Determinante aus den drei Vektoren prüfen.

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 0 + 3 - 0 - 12 - 0 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= -9 \end{aligned}$$

Da die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ ist, sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} **nicht komplanar**.

b) Am einfachsten lässt sich das mit der Determinante aus den drei Vektoren prüfen.

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \\ &= 0 \\ \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 0 \end{aligned}$$

Da die Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ ist, sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} **komplanar**.

Man hätte das auch daran sehen können, dass bei allen die dritte Komponente Null ist.

3 Orthogonalität

3.1 Aufgabe 1

Gegeben sind die drei untenstehenden Vektoren. Bestimmen Sie die Parameter x , y und z so, dass die Vektoren jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y - 5 = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 4 + z = 0 \\ (2) \quad \vec{b} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 4 + 2y - 5z = 0 \end{aligned}$$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung erhalten. Ich bringe das Gleichungssystem in Normalform:

$$\begin{array}{lcl} (1) & x & -2y & & = & 5 \\ (2) & 4x & & +z & = & 4 \\ (3) & & 2y & -5z & = & -4 \end{array}$$

Zur Lösung addiere ich Gleichung (1) und (3). Die neue Gleichung nenne ich (4).

$$\begin{array}{lcl} (1) & x & -2y & & = & 5 & | \\ (3) & & 2y & -5z & = & -4 & | + \\ \hline (4) & x & & -5z & = & 1 & \end{array}$$

Gleichung (2) und Gleichung (4) stellen nun ein Gleichungssystem 2. Ordnung dar:

$$\begin{array}{lcl} (2) & 4x & +z & = & 4 \\ (4) & x & -5z & = & 1 \end{array}$$

Ich stelle Gleichung (4) nach x um und setze das Ergebnis in (2) ein:

$$\begin{array}{lcl} & x - 5z & = & 1 & | + 5z \\ & x & = & 1 + 5z \\ \text{inges. in (2):} & 4 \cdot (1 + 5z) + z & = & 4 \\ & 4 + 20z + z & = & 4 & | - 4 \\ & 21z & = & 0 & | : 21 \\ & z & = & 0 \end{array}$$

Das Ergebnis kann in die umgestellte Gleichung (4) eingesetzt werden.

$$x = 1 + 5z = 1 + 5 \cdot 0 = 1$$

Zur Bestimmung von y verwende ich Gleichung (2).

$$\begin{aligned} 2y - 5z &= -4 \\ 2y - 5 \cdot 0 &= -4 \\ 2y &= -4 \quad | : 2 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Zusammengefasste Ergebnisse:

$$x = 1$$

$$y = -2$$

$$z = 0$$

3.2 Aufgabe 2

Gegeben sind die drei untenstehenden Vektoren. Bestimmen Sie die Parameter x , y und z so, dass die Vektoren jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 2 = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -5x + 6 + z = 0 \\ (3) \quad \vec{b} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -15 + 3y - 2z = 0 \end{aligned}$$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung erhalten. Ich bringe das Gleichungssystem in Normalform:

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x & +2y & & = & 2 \\ (2) & -5x & & +z & = & -6 \\ (3) & & 3y & -2z & = & 15 \end{array}$$

Es bietet sich an, Gleichung (2) mit 2 zu multiplizieren. Dann kann sie mit Gleichung (3) addiert werden, so dass z wegfällt.

$$\begin{array}{rcl} (2) & -5x & & +z & = & -6 & | \cdot 2 \\ (3) & & 3y & -2z & = & 15 \\ \hline (2) & -10x & & +2z & = & -12 & | \\ (3) & & 3y & -2z & = & 15 & | + \\ \hline (4) & -10x & +3y & & = & 3 \end{array}$$

Nun kann man Gleichung (1) mit 3 und Gleichung (4) mit 2 multiplizieren. Dann kann man sie voneinander subtrahieren, so dass y wegfällt.

$$\begin{array}{rcll}
 (1) & 3x & +2y & = 2 & | \cdot 3 \\
 (4) & -10x & +3y & = 3 & | \cdot 2 \\
 \hline
 (1) & 9x & +6y & = 6 & | \\
 (4) & -20x & +6y & = 6 & | - \\
 \hline
 & 29x & & = 0 & | : 29 \\
 & x & & = 0 &
 \end{array}$$

Eingesetzt in Gleichung (1) erhält man y .

$$\begin{array}{rcl}
 3x + 2y & = & 2 \\
 3 \cdot 0 + 2y & = & 2 \\
 2y & = & 2 & | : 2 \\
 y & = & 1
 \end{array}$$

Eingesetzt in Gleichung (2) erhält man z .

$$\begin{array}{rcl}
 -5x + z & = & -6 \\
 -5 \cdot 0 + z & = & -6 \\
 z & = & -6
 \end{array}$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $x = 0$ $y = 1$ $z = -6$

3.3 Aufgabe 3

Gegeben sind die drei untenstehenden Vektoren. Bestimmen Sie die Parameter x , y und z so, dass die Vektoren jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 5y + 3 = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - 15 + z = 0 \\ (3) \quad \vec{b} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + 3y + 3z = 0 \end{aligned}$$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung erhalten. Ich bringe das Gleichungssystem in Normalform:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 6x & -5y = -3 \\ (2) & x & +z = 15 \\ (3) & & 3y + 3z = -6 \end{array}$$

Es bietet sich an, Gleichung (3) durch 3 zu dividieren. Dann kann sie von Gleichung (2) subtrahiert werden, so dass z wegfällt.

$$\begin{array}{lcl} (2) & x & +z = 15 \quad | \\ (3) & & y + z = -2 \quad | - \\ \hline (4) & x & -y = 17 \end{array}$$

Mit den Gleichungen (1) und (4) bleibt nun ein Gleichungssystem mit nur noch zwei Variablen übrig.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 6x & -5y = -3 \\ (4) & x & -y = 17 \end{array}$$

Man könnte hier Gleichung (4) nach x auflösen und das Ergebnis in (1) einsetzen.

$$\begin{array}{lcl} x - y & = & 17 \quad | + y \\ x & = & 17 + y \end{array}$$

Einsetzen in (1):

$$\begin{array}{lcl} 6x - 5y & = & -3 \\ 6 \cdot (17 + y) - 5y & = & -3 \\ 102 + 6y - 5y & = & -3 \quad | - 102 \\ y & = & -105 \end{array}$$

Mit diesem Wert und der umgestellten Gleichung (4) kann sofort x bestimmt werden.

$$x = 17 + y = 17 - 105 = -88$$

Der noch fehlende Wert z kann nun z.B. mit Gleichung (2) bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcl} x + z & = & 15 \\ -88 + z & = & 15 \quad | + 88 \\ z & = & 103 \end{array}$$

Zusammengefasste Ergebnisse:

$$x = -88$$

$$y = -105$$

$$z = 103$$

3.4 Aufgabe 4

Gegeben sind die drei untenstehenden Vektoren. Bestimmen Sie die Parameter x , y und z so, dass die Vektoren jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -29 \\ y \\ 18 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -29 \\ y \\ 18 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -29x - y + 36 = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -6x - 8 + 2z = 0 \\ (3) \quad \vec{b} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -29 \\ y \\ 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 174 + 8y + 18z = 0 \end{aligned}$$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung erhalten. Ich bringe das Gleichungssystem in Normalform:

(1)	$-29x$	$-y$	$=$	-36
(2)	$-6x$		$+2z =$	8
(3)		$8y$	$+18z =$	-174

Jedes beliebige Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme ist hier anwendbar. Als Beispiel verwende ich das Additions-/Subtraktionsverfahren. Dazu multipliziere ich Gleichung (2) mit 9.

(2)	$-6x$		$+2z =$	8	$\quad \cdot 9$
(3)		$8y$	$+18z =$	-174	
<hr/>					
(2)	$-54x$		$+18z =$	72	$\quad -$
(3)		$8y$	$+18z =$	-174	$\quad $
<hr/>					
(4)	$54x$	$+8y$	$=$	-246	

Mit (1) und (4) bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

(1)	$-29x$	$-y =$	-36
(4)	$54x$	$+8y =$	-246

Auch hier kann das Additionsverfahren angewendet werden. Dazu multipliziere Ich (1) mit 8.

$$\begin{array}{rcll}
 (1) & -29x & -y & = -36 & | \cdot 8 \\
 (4) & 54x & +8y & = -246 & \\
 \hline
 (1) & -232x & -8y & = -288 & | \\
 (4) & 54x & +8y & = -246 & | + \\
 \hline
 & -178x & & = -534 & | : (-178) \\
 & x & & = 3 &
 \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (1) ein.

$$\begin{array}{rcll}
 & -29x - y & = & -36 \\
 & -29 \cdot 3 - y & = & -36 \\
 & -87 - y & = & -36 & | + 87 \\
 & -y & = & -51 & | \cdot (-1) \\
 & y & = & 51 &
 \end{array}$$

Das Ergebnis für x setze ich auch in (2) ein.

$$\begin{array}{rcll}
 & -6x + 2z & = & 8 \\
 & -6 \cdot 3 + 2z & = & 8 \\
 & -18 + 2z & = & 8 & | + 18 \\
 & 2z & = & 26 & | : 2 \\
 & z & = & 13 &
 \end{array}$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $x = 3$ $y = -51$ $z = 13$

3.5 Aufgabe 5

Gegeben sind die drei untenstehenden Vektoren. Bestimmen Sie die Parameter x , y und z so, dass die Vektoren jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -14 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 60 \\ 27 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -14 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - 4y + 14 = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 27 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 60x - 108 - z = 0 \\ (3) \quad \vec{b} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 27 \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 60 + 27y - 14z = 0 \end{aligned}$$

Wir haben ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung erhalten. Ich bringe das Gleichungssystem in Normalform:

(1)	x	$-4y$	$=$	-14
(2)	$60x$		$-z$	$= 108$
(3)		$27y$	$-14z$	$= -60$

Jedes beliebige Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme ist hier anwendbar. Als Beispiel verwende ich das Additions-/Subtraktionsverfahren. Dazu multipliziere ich Gleichung (1) mit 60.

(1)	x	$-4y$	$=$	-14	$ \cdot 60$	
(2)	$60x$		$-z$	$=$	108	
<hr/>						
(1)	$60x$	$-240y$	$=$	-840	$ -$	
(2)	$60x$		$-z$	$=$	108	$ $
<hr/>						
(4)		$240y$	$-z$	$=$	948	

Mit (3) und (4) bleibt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

(3)	$27y$	$-14z$	$=$	-60
(4)	$240y$	$-z$	$=$	948

Auch hier kann das Additionsverfahren angewendet werden. Dazu multipliziere ich (4) mit 14.

$$\begin{array}{rclcl}
 (3) & 27y & -14z & = & -60 \\
 (4) & 240y & -z & = & 948 & | \cdot 14 \\
 \hline
 (3) & 27y & -14z & = & -60 & | - \\
 (4) & 3\,360y & -14z & = & 13\,272 & | \\
 \hline
 & 3\,333y & & = & 13\,332 & | : 3\,333 \\
 & y & & = & 4
 \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (1) ein.

$$\begin{array}{rcl}
 x - 4y & = & -14 \\
 x - 4 \cdot 4 & = & -14 \\
 x - 16 & = & -14 & | + 16 \\
 x & = & 2
 \end{array}$$

Das Ergebnis für x setze ich in (2) ein.

$$\begin{array}{rcl}
 60x - z & = & 108 \\
 60 \cdot 2 - z & = & 108 \\
 120 - z & = & 108 & | - 120 \\
 -z & = & -12 & | \cdot (-1) \\
 z & = & 12
 \end{array}$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $x = 2$ $y = 4$ $z = 12$

3.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcl}
 \vec{a} \perp \vec{b} & \Leftrightarrow & \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\
 \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} & = & 0 \\
 x \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) & = & 0 \\
 3x + 10 - 4 & = & 0 & | - 6 \\
 3x & = & 6 & | : 3 \\
 x & = & 3
 \end{array}$$

Ergebnis: $x = 3$

4 Flächen

4.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Dreieck-Fläche zwischen den drei Punkten:

$$P_1(2|5) \quad P_2(7|3) \quad P_3(6|8)$$

Lösung: Ich bilde den Vektor \vec{a} von P_1 nach P_2 und den Vektor \vec{b} von P_1 nach P_3 .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Fläche eines Parallelogramms gebildet aus zwei Vektoren kann mit dem Betrag des Kreuzproduktes bestimmt werden. Das Dreieck wäre dann die Hälfte davon. Da das Kreuzprodukt aber nicht im \mathbb{R}^2 sondern nur im \mathbb{R}^3 existiert, muss eine dritte Vektorkomponente ergänzt werden. Wird diese z -Komponente jeweils auf Null gesetzt, bleibt man in der x - y -Ebene.

$$\vec{a}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt kann nun gebildet werden.

$$\begin{aligned} \vec{a}^* \times \vec{b}^* &= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 - 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 \end{pmatrix} \\ \vec{a}^* \times \vec{b}^* &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Betrag dieses Vektors gibt die Fläche des zugehörigen Parallelogramms an.

$$A_{Par} = \left| \vec{a}^* \times \vec{b}^* \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 23^2} = 23 \text{ FE}$$

Die gesuchte Dreiecksfläche ist die Hälfte davon.

$$A_{\Delta} = \frac{A_{Par}}{2} = \frac{23 \text{ FE}}{2} = 11,5 \text{ FE}$$

4.2 Aufgabe 2

Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Dreieck-Fläche zwischen den drei Punkten:

$$P_1(1|4) \quad P_2(7|1) \quad P_3(4|9)$$

Lösung: Ich bilde den Vektor \vec{a} von P_1 nach P_2 und den Vektor \vec{b} von P_1 nach P_3 .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Fläche eines Parallelogramms gebildet aus zwei Vektoren kann mit dem Betrag des Kreuzproduktes bestimmt werden. Das Dreieck wäre dann die Hälfte davon. Da das Kreuzprodukt aber nicht im \mathbb{R}^2 sondern nur im \mathbb{R}^3 existiert, muss eine dritte Vektorkomponente ergänzt werden. Wird diese z -Komponente jeweils auf Null gesetzt, bleibt man in der x - y -Ebene.

$$\vec{a}^* = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt kann nun gebildet werden.

$$\begin{aligned} \vec{a}^* \times \vec{b}^* &= \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \cdot 0 - 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 3 - 6 \cdot 0 \\ 6 \cdot 5 - (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} \\ \vec{a}^* \times \vec{b}^* &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Betrag dieses Vektors gibt die Fläche des zugehörigen Parallelogramms an.

$$A_{Par} = \left| \vec{a}^* \times \vec{b}^* \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 39^2} = 39 \text{ FE}$$

Die gesuchte Dreiecksfläche ist die Hälfte davon.

$$A_{\Delta} = \frac{A_{Par}}{2} = \frac{39 \text{ FE}}{2} = 19,5 \text{ FE}$$

4.3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Dreieck-Fläche zwischen den drei Punkten:

$$P_1(2|-4|1) \quad P_2(5|-4|2) \quad P_3(5|-2|3)$$

Lösung: Ich bilde den Vektor \vec{a} von P_1 nach P_2 und den Vektor \vec{b} von P_1 nach P_3 .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -4-(-4) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -2-(-4) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Fläche eines Parallelogramms gebildet aus zwei Vektoren kann mit dem Betrag des Kreuzproduktes bestimmt werden. Das Dreieck wäre dann die Hälfte davon. Das Kreuzprodukt kann nun gebildet werden.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Betrag dieses Vektors gibt die Fläche des zugehörigen Parallelogramms an.

$$A_{Par} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7 \text{ FE}$$

Die gesuchte Dreiecksfläche ist die Hälfte davon.

$$A_{\Delta} = \frac{A_{Par}}{2} = \frac{7 \text{ FE}}{2} = 3,5 \text{ FE}$$

4.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Dreieck-Fläche zwischen den drei Punkten:

$$P_1(-1|3|2) \quad P_2(5|-2|2) \quad P_3(-2|3|5)$$

Lösung: Ich bilde den Vektor \vec{a} von P_1 nach P_2 und den Vektor \vec{b} von P_1 nach P_3 .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ -2 - 3 \\ 2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 - (-1) \\ 0 - 3 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Fläche eines Parallelogramms gebildet aus zwei Vektoren kann mit dem Betrag des Kreuzproduktes bestimmt werden. Das Dreieck wäre dann die Hälfte davon. Das Kreuzprodukt kann nun gebildet werden.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 6 \cdot 3 \\ 6 \cdot 0 - (-5) \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} -15 \\ -18 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Betrag dieses Vektors gibt die Fläche des zugehörigen Parallelogramms an.

$$A_{Par} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-15)^2 + (-18)^2 + (-5)^2} \approx 23,958 \text{ FE}$$

Die gesuchte Dreiecksfläche ist die Hälfte davon.

$$A_{\Delta} = \frac{A_{Par}}{2} \approx \frac{23,958 \text{ FE}}{2} = 11,979 \text{ FE}$$

4.5 Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Dreieck-Fläche zwischen den drei Punkten:

$$P_1(-4|2|3) \quad P_2(3|-1|2) \quad P_3(-2|3|4)$$

Lösung: Ich bilde den Vektor \vec{a} von P_1 nach P_2 und den Vektor \vec{b} von P_1 nach P_3 .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) \\ -1 - 2 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 - (-4) \\ 3 - 2 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Fläche eines Parallelogramms gebildet aus zwei Vektoren kann mit dem Betrag des Kreuzproduktes bestimmt werden. Das Dreieck wäre dann die Hälfte davon. Das Kreuzprodukt kann nun gebildet werden.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \\ 7 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Betrag dieses Vektors gibt die Fläche des zugehörigen Parallelogramms an.

$$A_{Par} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-9)^2 + 13^2} = \sqrt{254} \approx 15,938 \text{ FE}$$

Die gesuchte Dreiecksfläche ist die Hälfte davon.

$$A_{\Delta} = \frac{A_{Par}}{2} = \frac{\sqrt{254}}{2} \approx 7,969 \text{ FE}$$

4.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Dreieck-Fläche zwischen den drei Punkten:

$$P_1(-5|2|4) \quad P_2(2|-1|3) \quad P_3(-1|3|5)$$

Lösung: Ich bilde den Vektor \vec{a} von P_1 nach P_2 und den Vektor \vec{b} von P_1 nach P_3 .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 - (-5) \\ -1 - 2 \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 - (-5) \\ 3 - 2 \\ 5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Fläche eines Parallelogramms gebildet aus zwei Vektoren kann mit dem Betrag des Kreuzproduktes bestimmt werden. Das Dreieck wäre dann die Hälfte davon. Das Kreuzprodukt kann nun gebildet werden.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 4 - 7 \cdot 1 \\ 7 \cdot 1 - (-3) \cdot 4 \end{pmatrix} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Betrag dieses Vektors gibt die Fläche des zugehörigen Parallelogramms an.

$$A_{Par} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2 + 19^2} = \sqrt{486} \approx 22,045 \text{ FE}$$

Die gesuchte Dreiecksfläche ist die Hälfte davon.

$$A_{\Delta} = \frac{A_{Par}}{2} = \frac{\sqrt{486}}{2} \approx 11,023 \text{ FE}$$

5 Sonstiges

5.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 36 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung: Vorab werden ein paar Hilfsgrößen bestimmt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 12^2} = 13$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{36^2 + (-9)^2 + 12^2} = 39$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} = -108 + 36 + 144 = 72$$

Hiermit kann der Winkel φ aus der Grundformel berechnet werden:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{72}{13 \cdot 39}$$

$$\varphi \approx 81,836^\circ$$

5.2 Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Lösung: Vorab werden ein paar Hilfsgrößen bestimmt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-24)^2 + 8^2} = 26$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2 + 36^2} = 39$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} = -54 + 288 + 288 = 522$$

Hiermit kann der Winkel φ aus der Grundformel berechnet werden:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{522}{26 \cdot 39}$$

$$\varphi \approx 59,016^\circ$$

5.3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ 28 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Lösung: Vorab werden ein paar Hilfsgrößen bestimmt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-9)^2 + 8^2} = 17$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-21)^2 + 28^2 + (-12)^2} = 37$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ 28 \\ -12 \end{pmatrix} = -252 - 252 - 96 = -600$$

Hiermit kann der Winkel φ aus der Grundformel berechnet werden:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{-600}{17 \cdot 37}$$

$$\varphi \approx 162,534^\circ$$

5.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 24 \\ -9 \\ 32 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -48 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Lösung: Vorab werden ein paar Hilfsgrößen bestimmt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{24^2 + (-9)^2 + 32^2} = 41$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-48)^2 + 16^2 + (-12)^2} = 52$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ -9 \\ 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -48 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} = -1\,152 - 144 - 384 = -1\,680$$

Hiermit kann der Winkel φ aus der Grundformel berechnet werden:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{-1\,680}{41 \cdot 52}$$

$$\varphi \approx 141,998^\circ$$

5.5 Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 25 \\ -72 \\ 60 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Lösung: Vorab werden ein paar Hilfsgrößen bestimmt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{25^2 + (-72)^2 + 60^2} = 97$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-18)^2 + 16^2 + 24^2} = 34$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 25 \\ -72 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix} = -450 - 1\,152 + 1\,440 = -162$$

Hiermit kann der Winkel φ aus der Grundformel berechnet werden:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\varphi = \arccos \frac{-162}{97 \cdot 34}$$

$$\varphi \approx 92,816^\circ$$