

Musterlösungen Unleichungen

Inhaltsverzeichnis

0.1	UNGLEICH-01	2
0.2	UNGLEICH-02	3
0.3	UNGLEICH-03	4
0.4	UNGLEICH-04	6
0.5	UNGLEICH-04b	7
0.6	UNGLEICH-05	8
0.7	UNGLEICH-06	10
0.8	UNGLEICH-07	12
0.9	UNGLEICH-08	13
0.10	UNGLEICH-09	14
0.11	UNGLEICH-10	16
0.12	UNGLEICH-11	18
0.13	UNGLEICH-12	19
0.14	UNGLEICH-13	20
0.15	UNGLEICH-14	22
0.16	UNGLEICH-15	24
0.17	UNGLEICH-16	26
0.18	UNGLEICH-17	28
0.19	UNGLEICH-18	29
0.20	UNGLEICH-19	30
0.21	UNGLEICH-20	31
0.22	UNGLEICH-21	32
0.23	UNGLEICH-22	34
0.24	UNGLEICH-23	36
0.25	UNGLEICH-24	37
0.26	UNGLEICH-25	38
0.27	UNGLEICH-26	40
0.28	UNGLEICH-27	42
0.29	UNGLEICH-28	44
0.30	UNGLEICH-29	46
0.31	UNGLEICH-30	47
0.32	UNGLEICH-31	48
0.33	UNGLEICH-32	49
0.34	UNGLEICH-33	50
0.35	UNGLEICH-34	51
0.36	UNGLEICH-35	52
0.37	UNGLEICH-36	53

0.1 UNGLEICH-01

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{3x^2}{5-x} \geq -3 \cdot (4+x)$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich den Nenner gleich Null.

$$5-x=0 \Rightarrow x=5$$

Hieraus ergibt sich die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

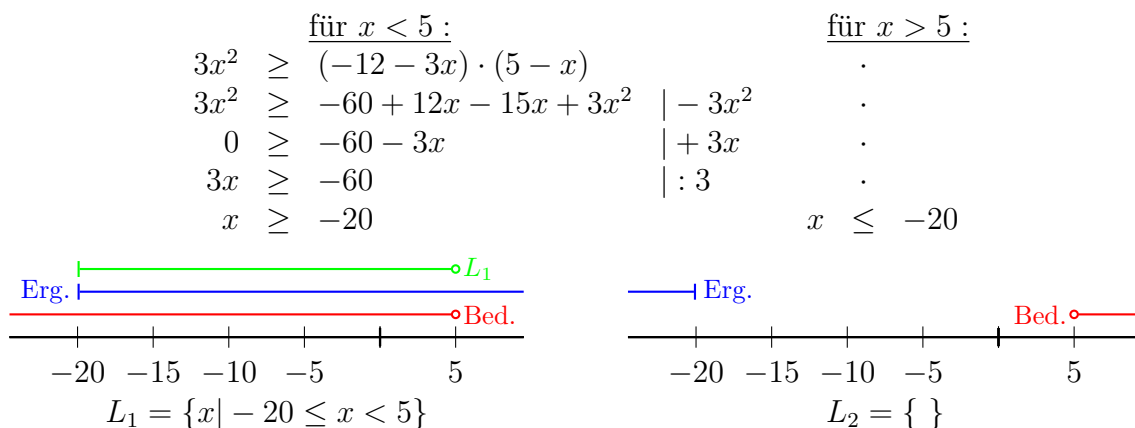
$$\begin{aligned} \frac{3x^2}{5-x} &\geq -3 \cdot (4+x) \\ \frac{3x^2}{5-x} &\geq -12-3x \quad | \cdot (5-x) \end{aligned}$$

Da mit einem Term multipliziert werden soll, der manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** notwendig. In einer Nebenrechnung bestimme ich, wo der Faktor $(5-x)$ positiv ist, denn in diesem Fall muss das Ungleichungszeichen **nicht** umgedreht werden.

$$\begin{aligned} 5-x &> 0 \quad | -5 \\ -x &> -5 \quad | \cdot (-1) \\ x &< 5 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$\frac{3x^2}{5-x} \geq -12-3x \quad | \cdot (5-x)$$



$$L = \{x \mid -20 \leq x < 5\}$$

0.2 UNGLEICH-02

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{3x-11}{x-3} \leq \frac{2x-8}{x-5} + 1$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3; 5\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der beiden Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

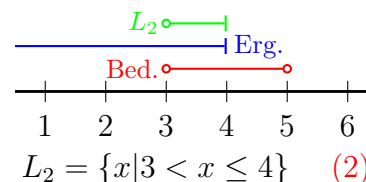
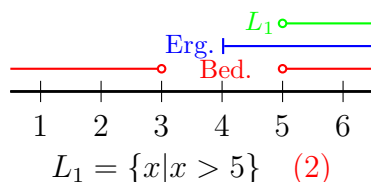
	3	5	
$(x-3)$	-	+	+
$(x-5)$	-	-	+
HN	+	-	+

(2)

Im Bereich unter 3 und über 5 ist demnach der Hauptnenner **positiv**, in dem Bereich dazwischen **negativ**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung:

$$\frac{3x-11}{x-3} \leq \frac{2x-8}{x-5} + 1 \quad | \cdot (x-3) \cdot (x-5)$$

<p>für $x < 3 \vee x > 5$: (2)</p> $\begin{aligned} (3x-11) \cdot (x-5) &\leq (2x-8) \cdot (x-3) + 1 \cdot (x-3) \cdot (x-5) & (2) \\ 3x^2 - 15x - 11x + 55 &\leq 2x^2 - 6x - 8x + 24 + x^2 - 5x - 3x + 15 \\ 3x^2 - 26x + 55 &\leq 3x^2 - 22x + 39 & - 3x^2 - 55 + 22x \\ -4x &\leq -16 & : (-4) \\ x &\geq 4 & (3) \end{aligned}$	<p>für $3 < x < 5$: (2)</p> $\begin{aligned} &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x &\leq 4 & (2) \end{aligned}$
--	--



$$L = \{x | 3 < x \leq 4 \vee x > 5\} \quad (1)$$

0.3 UNGLEICH-03

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-3} \geq \frac{5}{x-7}$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3; 7\}$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der drei Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

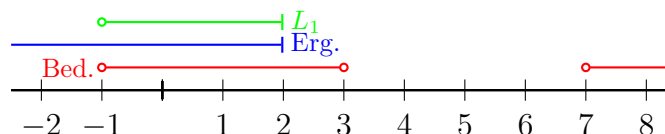
	-1	3	7
$(x+1)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
$(x-7)$	-	-	+
HN	-	+	-

Im Bereich zwischen -1 bis 3 sowie über 7 ist demnach der Hauptnenner **positiv**, in den anderen Bereichen **negativ**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung. Aus Platzgründen werden die beiden Fälle **untereinander** und nicht **nebeneinander** dargestellt.

$$\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-3} \geq \frac{5}{x-7} \quad | \cdot (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x-7)$$

$$\text{für } -1 < x < 3 \vee x > 7 :$$

$$\begin{aligned} 3(x-3)(x-7) + 2(x+1)(x-7) &\geq 5(x+1)(x-3) \\ 3x^2 - 21x - 9x + 63 + 2x^2 - 14x + 2x - 14 &\geq 5x^2 - 15x + 5x - 15 \\ 5x^2 - 42x + 49 &\geq 5x^2 - 10x - 15 \quad | -5x^2 + 15 + 10x \\ -32x &\geq -64 \quad | : (-32) \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

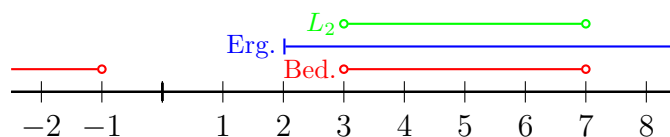


$$L_1 = \{x \mid -1 < x \leq 2\}$$

Es folgt der andere Fall:

$$\underline{\text{für } x < -1 \vee 3 < x < 7 :}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ x \geq 2 \end{array}$$



$$L_2 = \{x | 3 < x < 7\}$$

Zusammengefasste Lösungsmenge: $L = \{x | -1 < x \leq 2 \vee 3 < x < 7\}$

0.4 UNGLEICH-04

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betragsungleichung.

$$5 - |10 - 2x| < x$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

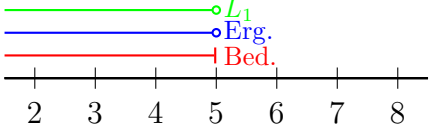
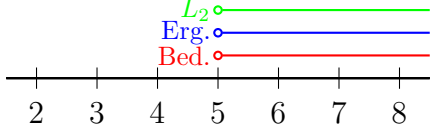
$$D = \mathbb{R}$$

Um den Betrag aufzulösen, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn wenn der **Betragsinhalt negativ** ist, dann muss beim Auflösen ein zusätzliches Minuszeichen davor gesetzt werden. Deshalb führe ich vorweg folgende **Nebenrechnung** durch, um den positiven Fall zu ermitteln.

$$\begin{aligned} 10 - 2x &\geq 0 & | -10 \\ -2x &\geq -10 & | : (-2) \\ x &\leq 5 \end{aligned}$$

Hiermit ergeben sich folgende unterschiedlichen zwei Fälle:

$$5 - |10 - 2x| < x$$

<p style="text-align: center;">für $x \leq 5$:</p> $\begin{aligned} 5 - (10 - 2x) &< x \\ 5 - 10 + 2x &< x \\ -5 + 2x &< x & + 5 - x \\ x &< 5 \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">für $x > 5$:</p> $\begin{aligned} 5 - (-(10 - 2x)) &< x \\ 5 + 10 - 2x &< x \\ 15 - 2x &< x & - 15 - x \\ -3x &< -15 & : (-3) \\ x &> 5 \end{aligned}$
 <p>$L_1 = \{x x < 5\}$</p>	 <p>$L_2 = \{x x > 5\}$</p>

Wie man leicht erkennen kann, sind alle Reellen Zahlen außer der 5 in der Gesamt-Lösungsmenge. Wir können also zusammenfassen: $L = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Anmerkung: Natürlich könnte man die Lösungsmenge auch in einer dieser beiden Formen schreiben: $L = \{x | x < 5 \vee x > 5\}$ oder $L = \{x | x \neq 5\}$

0.5 UNGLEICH-04b

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betragsgleichung.

$$5 - |10 - 2x| = x$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R}$$

Um den Betrag aufzulösen, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn wenn der **Betragsinhalt negativ** ist, dann muss beim Auflösen ein zusätzliches Minuszeichen davor gesetzt werden. Deshalb führe ich vorweg folgende **Nebenrechnung** durch, um den positiven Fall zu ermitteln.

$$\begin{aligned} 10 - 2x &\geq 0 & | -10 \\ -2x &\geq -10 & | : (-2) \\ x &\leq 5 \end{aligned}$$

Hiermit ergeben sich folgende unterschiedlichen zwei Fälle:

$$5 - |10 - 2x| = x$$

für $x \leq 5$:	für $x > 5$:
$5 - (10 - 2x) = x$	$5 - (-(10 - 2x)) = x$
$5 - 10 + 2x = x$	$5 + 10 - 2x = x$
$-5 + 2x = x \quad +5 - x$	$15 - 2x = x \quad -15 - x$
$x = 5$	$-3x = -15 \quad : (-3)$
$L_1 = \{5\}$	$x = 5$
	$L_2 = \{ \}$

Gesamtergebnis: $L = \{5\}$

0.6 UNGLEICH-05

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betragsgleichung.

$$1 + |3 - |6 - x|| = 3x$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R}$$

Hier haben wir **verschachtelte Beträge**, die sinnvollerweise **nacheinander** aufgelöst werden sollten. Dabei sind jedes mal zwei Fälle zu unterscheiden. Ich beginne mit der Auflösung des **inneren** Betrages. Das Vorzeichen bleibt bekanntlich erhalten, wenn der Inhalt größer oder gleich Null ist. Ich untersuche also vorweg in einer Nebenrechnung, wo das der Fall ist.

$$\begin{aligned} 6 - x &\geq 0 & | -6 \\ -x &\geq -6 & | : (-1) \\ x &\leq 6 \end{aligned}$$

Aus Platzgründen behandle ich die Fälle $x \leq 6$ und $x > 6$ nacheinander und nicht nebeneinander.

Untersuchung für $x \leq 6$:

$$\begin{aligned} 1 + |3 - |6 - x|| &= 3x \\ 1 + |3 - 6 + x| &= 3x \\ 1 + |-3 + x| &= 3x \end{aligned}$$

Es ist leicht erkennbar, dass der Inhalt des Betrages für $x \geq 3$ positiv und für $x < 3$ negativ ist. Diese beiden Fälle können nun nebeneinander untersucht werden.

<u>für $x \geq 3$:</u>	<u>für $x < 3$:</u>
$1 - 3 + x = 3x$	$1 + 3 - x = 3x$
$-2 + x = 3x \quad -3x + 2$	$4 - x = 3x \quad -4 - 3x$
$-2x = 2 \quad : (-2)$	$-4x = -4 \quad : (-4)$
$x = -1$	$x = 1$
$L_1 = \{ \}$	$L_2 = \{1\}$

Es folgt der zweite Fall aus der ersten Fallunterscheidung.

Untersuchung für $x > 6$:

$$\begin{aligned} 1 + |3 - |6 - x|| &= 3x \\ 1 + |3 + 6 - x| &= 3x \\ 1 + |9 - x| &= 3x \end{aligned}$$

Der Inhalt dieses Betrages ist positiv für $x \leq 9$ und negativ für $x > 9$. Diese beiden Fälle müssen jetzt einzeln untersucht werden.

<u>für $x \leq 9$:</u>	<u>für $x > 9$:</u>
$1 + 9 - x = 3x$	$1 - 9 + x = 3x$
$10 - x = 3x \quad -10 - 3x$	$-8 - x = 3x \quad +8 - 3x$
$-4x = -10 \quad : (-4)$	$-4x = 8 \quad : (-4)$
$x = 2,5$	$x = -2$
$L_3 = \{ \}$	$L_4 = \{ \}$

Drei von vier Teillösungsmengen sind leer, da die Ergebnisse nicht innerhalb der jeweils untersuchten Bereiche liegen. Die Gesamtlösungsmenge lautet also:

$$L = \{1\}$$

0.7 UNGLEICH-06

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betragsungleichung.

$$\frac{|2x + 2|}{x - 1} \leq 3$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich den Nenner gleich Null. Ohne schriftliche Rechnung ergibt sich die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge möchte ich zunächst den Bruch auflösen. Dabei ist eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem, ob der Nenner positiv oder negativ ist. Dies ist für $x > 1$ bzw. für $x < 1$ der Fall. Da später beim Auflösen des Betrages noch eine weitere Fallunterscheidung notwendig wird, führe ich die Untersuchung der beiden Fälle aus Platzgründen **nacheinander** durch.

Untersuchung für $x > 1$:

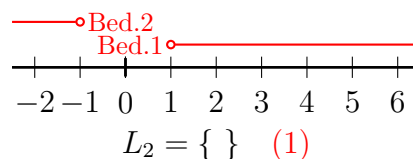
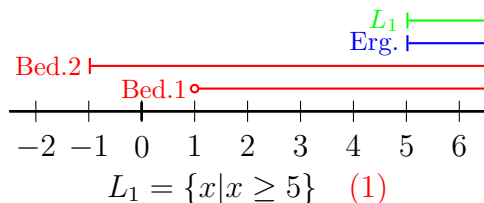
$$\begin{aligned} \frac{|2x + 2|}{x - 1} &\leq 3 \quad | \cdot (x - 1) \\ |2x + 2| &\leq 3 \cdot (x - 1) \\ |2x + 2| &\leq 3x - 3 \end{aligned}$$

Nun muss der Betrag aufgelöst werden. Dabei ist eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem, ob der Inhalt des Betrages größer/gleich oder kleiner als Null ist. Die Bestimmung des positiven Falls führe ich in einer Nebenrechnung durch.

$$\begin{aligned} 2x + 2 &\geq 0 \quad | -2 \\ 2x &\geq -2 \quad | :2 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für den negativen Fall: $x < -1$. Damit ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq -1 : & \text{für } x < -1 : \\ 2x + 2 \leq 3x - 3 \quad | -3x - 2 & (\text{entfällt}) \\ -x \leq -5 \quad | : (-1) & \\ x \geq 5 & \end{array}$$



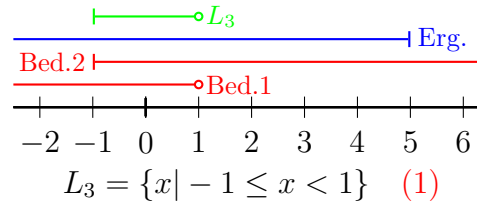
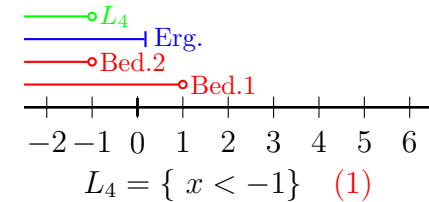
Der rechte Fall entfällt, da sich die Bedingungen schon gegenseitig ausschließen.

Für den anderen Fall aus der ersten Fallunterscheidung ergibt sich:

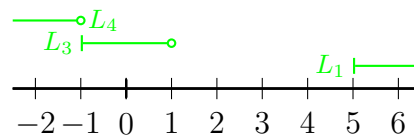
Untersuchung für $x < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{|2x+2|}{x-1} &\leq 3 \quad | \cdot (x-1) \\ |2x+2| &\geq 3 \cdot (x-1) \\ |2x+2| &\geq 3x-3\end{aligned}$$

Nun muss der Betrag aufgelöst werden. Dabei ist eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem, ob der Inhalt des Betrages größer/gleich oder kleiner als Null ist. Für die Bestimmung der beiden Fälle gilt die Nebenrechnung von oben.

<p style="text-align: center; margin: 0;"><u>für $x \geq -1$:</u></p> $\begin{aligned}2x+2 &\geq 3x-3 \quad -3x-2 \\ -x &\geq -5 \quad : (-1) \\ x &\leq 5 \\ L_2 &= \{x -1 \leq x < 1\}\end{aligned}$	<p style="text-align: center; margin: 0;"><u>für $x < -1$:</u></p> $\begin{aligned}-2x-2 &\geq 3x-3 \quad +2-3x \\ -5x &\geq -1 \quad : (-5) \\ x &\leq 0,2 \\ L_3 &= \{x x < -1\}\end{aligned}$
 <p style="margin: 0;">$L_3 = \{x -1 \leq x < 1\} \quad (1)$</p>	 <p style="margin: 0;">$L_4 = \{x < -1\} \quad (1)$</p>

Die Teillösungsmengen werden zusammen dargestellt.



Die Lösungsmengen L_3 und L_4 stoßen bündig aneinander. Damit lautet die Gesamtlösungsmenge:

$$L = \{x | x < 1 \vee x \geq 5\}$$

0.8 UNGLEICH-07

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{3x-7}{5-x} \geq 5$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich den Nenner gleich Null.

$$5-x=0 \Rightarrow x=5$$

Hieraus ergibt sich die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ (3)

$$\frac{3x-7}{5-x} \geq 5 \quad | \cdot (5-x)$$

Da mit einem Term multipliziert werden soll, der manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** notwendig. In einer Nebenrechnung bestimme ich, wo der Faktor $(5-x)$ positiv ist, denn in diesem Fall muss das Ungleichungszeichen **nicht** umgedreht werden.

$$\begin{aligned} 5-x &> 0 & | -5 \\ -x &> -5 & | \cdot (-1) \\ x &< 5 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Fallunterscheidung: (5)

$$\frac{3x-7}{5-x} \geq 5 \quad | \cdot (5-x)$$

für $x < 5$:	für $x > 5$:
$3x-7 \geq 5 \cdot (5-x)$ (2)	.
$3x-7 \geq 25-5x \quad +5x+7$.
$8x \geq 32 \quad :8$.
$x \geq 4$ (3)	$x \leq 4$ (2)

<p>$L_1 = \{x 4 \leq x < 5\}$ (2)</p>	<p>$L_2 = \{ \}$ (2)</p>
---	-------------------------------------

Zusammengefasst ergibt sich: $L = \{x | 4 \leq x < 5\}$ (1)

0.9 UNGLEICH-08

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{4x-3}{6-x} \geq 3$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich den Nenner gleich Null.

$$6-x=0 \Rightarrow x=6$$

Hieraus ergibt sich die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$ (3)

$$\frac{4x-3}{6-x} \geq 3 \quad | \cdot (6-x)$$

Da mit einem Term multipliziert werden soll, der manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** notwendig. In einer Nebenrechnung bestimme ich, wo der Faktor $(6-x)$ positiv ist, denn in diesem Fall muss das Ungleichungszeichen **nicht** umgedreht werden.

$$\begin{aligned} 6-x &> 0 & | -6 \\ -x &> -6 & | \cdot (-1) \\ x &< 6 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Fallunterscheidung: (5)

$$\frac{4x-3}{6-x} \geq 3 \quad | \cdot (6-x)$$

<p style="text-align: center; margin: 0;"><u>für $x < 6$:</u></p> $\begin{aligned} 4x-3 &\geq 3 \cdot (6-x) & (2) \\ 4x-3 &\geq 18-3x & +3x+3 \\ 7x &\geq 21 & :7 \\ x &\geq 3 & (3) \end{aligned}$	<p style="text-align: center; margin: 0;"><u>für $x > 6$:</u></p> $\begin{aligned} &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x &\leq 3 & (2) \end{aligned}$
<p style="margin: 5px 0;">$L_1 = \{x 3 \leq x < 6\}$ (2)</p>	<p style="margin: 5px 0;">$L_2 = \{ \}$ (2)</p>

Zusammengefasst ergibt sich: $L = \{x | 3 \leq x < 6\}$ (1)

0.10 UNGLEICH-09

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{2x-4}{x-1} - \frac{x+3}{x+2} - 1 \geq 0$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1; -2\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der beiden Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

	-2	1	
$(x-1)$	-	-	+
$(x+2)$	-	+	+
HN	+	-	+

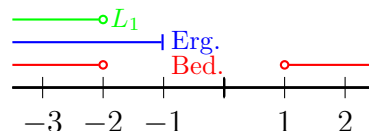
(2)

Im Bereich unter -2 und über 1 ist demnach der Hauptnenner **positiv**, in dem Bereich dazwischen **negativ**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung. Aus Platzgründen bearbeite ich beide Fälle nicht nebeneinander, sondern untereinander.

$$\frac{2x-4}{x-1} - \frac{x+3}{x+2} - 1 \geq 0 \quad | \cdot (x-1) \cdot (x+2)$$

$$\text{für } x < -2 \vee x > 1 : \quad (2)$$

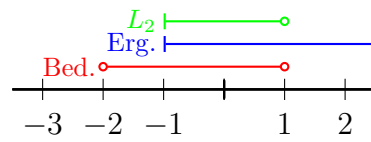
$$\begin{aligned} (2x-4) \cdot (x+2) - (x+3) \cdot (x-1) - (x-1) \cdot (x+2) &\geq 0 & (2) \\ 2x^2 + 4x - 4x - 8 - (x^2 - x + 3x - 3) - (x^2 + 2x - x - 2) &\geq 0 \\ 2x^2 + 4x - 4x - 8 - x^2 + x - 3x + 3 - x^2 - 2x + x + 2 &\geq 0 \\ -3x - 3 &\geq 0 & | + 3 \\ -3x &\geq 3 & | : (-3) \\ x &\leq -1 & (3) \end{aligned}$$



$$L_1 = \{x | x < -2\} \quad (2)$$

$$\underline{\text{für } -2 < x < 1:} \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ x \leq -1 \end{array} \quad (2)$$



$$L_2 = \{x \mid -1 \leq x < 1\} \quad (2)$$

Zusammengefasst ergibt sich: $L = \{x \mid x < -2 \vee -1 \leq x < 1\}$ (1)

0.11 UNGLEICH-10

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{2x+4}{x+1} - \frac{x-3}{x-2} - 1 \leq 0$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der beiden Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

	-1	2
$(x+1)$	-	+
$(x-2)$	-	+
HN	+	+

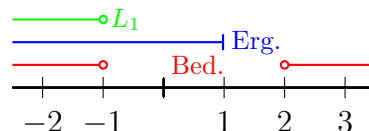
(2)

Im Bereich unter -1 und über 2 ist demnach der Hauptnenner **positiv**, in dem Bereich dazwischen **negativ**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung. Aus Platzgründen bearbeite ich beide Fälle nicht nebeneinander, sondern untereinander.

$$\frac{2x+4}{x+1} - \frac{x-3}{x-2} - 1 \leq 0 \quad | \cdot (x-1) \cdot (x+2)$$

$$\text{für } x < -1 \vee x > 2 : \quad (2)$$

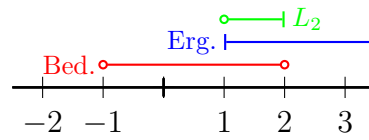
$$\begin{aligned} (2x+4) \cdot (x-2) - (x-3) \cdot (x+1) - (x+1) \cdot (x-2) &\leq 0 & (2) \\ 2x^2 - 4x + 4x - 8 - (x^2 + x - 3x - 3) - (x^2 - 2x + x - 2) &\leq 0 \\ 2x^2 - 4x + 4x - 8 - x^2 - x + 3x + 3 - x^2 + 2x - x + 2 &\leq 0 \\ 3x - 3 &\leq 0 & | + 3 \\ 3x &\leq 3 & | : 3 \\ x &\leq 1 & (3) \end{aligned}$$



$$L_1 = \{x | x < -1\} \quad (2)$$

$$\underline{\text{für } -1 < x < 2:} \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ x \geq 1 \end{array} \quad (2)$$



$$L_2 = \{x | 1 \leq x < 2\} \quad (2)$$

Zusammengefasst ergibt sich: $L = \{x | x < -1 \vee 1 \leq x < 2\}$ (1)

0.12 UNGLEICH-11

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$3x - |12 - 4x| > x$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Um den Betrag aufzulösen, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn wenn der **Betragsinhalt negativ** ist, dann muss beim Auflösen ein zusätzliches Minuszeichen davor gesetzt werden. Deshalb führe ich vorweg folgende **Nebenrechnung** durch, um den positiven Fall zu ermitteln.

$$\begin{aligned} 12 - 4x &\geq 0 & -12 \\ -4x &\leq -12 & | : (-4) \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$

Hiermit ergeben sich folgende unterschiedlichen zwei Fälle:

$\begin{aligned} &\text{für } x \leq 3 : \quad (2) \\ 3x - (12 - 4)x &> x \quad (2) \\ 3x - 12 + 4x &> x \\ 7x - 12 &> x & +12 - x \\ 6x &> 12 & : 6 \\ x &> 2 \quad (3) \\ L_1 &= \{x 2 < x \leq 3\} \quad (2) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\text{für } x > 3 : \quad (2) \\ 3x + (12 - 4)x &> x \quad (2) \\ 3x + 12 - 4x &> x \\ -x + 12 &> x & -12 - x \\ -2x &> -12 & : (-2) \\ x &< 6 \quad (3) \\ L_2 &= \{x 3 < x < 6\} \quad (2) \end{aligned}$
--	---

Wie man leicht erkennen kann, stoßen die beiden Teillösungsmengenbereiche „bündig“ aneinander. Sie können also zu einer einzigen Lösungsmenge zusammengefasst werden:

$$L = \{x | 2 < x < 6\} \quad (1)$$

0.13 UNGLEICH-12

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$x \leq 4x - |27 - 6x|$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Um den Betrag aufzulösen, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn wenn der **Betragsinhalt negativ** ist, dann muss beim Auflösen ein zusätzliches Minuszeichen davor gesetzt werden. Deshalb führe ich vorweg folgende **Nebenrechnung** durch, um den positiven Fall zu ermitteln.

$$\begin{aligned} 27 - 6x &\geq 0 & | -27 \\ -6x &\geq -27 & | : (-6) \\ x &\leq 4,5 \end{aligned}$$

Hiermit ergeben sich folgende unterschiedlichen zwei Fälle:

für $x \leq 4,5$:	(2)	für $x > 4,5$:	(2)
$x \leq 4x - (27 - 6x)$	(2)	$x \leq 4x + (27 - 6x)$	(2)
$x \leq 4x - 27 + 6x$		$x \leq 4x + 27 - 6x$	
$x \leq 10x - 27$	$ -10x$	$x \leq -2x + 27$	$ +2x$
$-9x \leq -27$	$: (-9)$	$3x \leq 27$	$: 3$
$x \geq 3$	(3)	$x \leq 9$	(3)
$L_1 = \{x 3 \leq x \leq 4,5\}$	(2)	$L_2 = \{x 4,5 < x \leq 9\}$	(2)

Wie man leicht erkennen kann, stoßen die beiden Teillösungsmengenbereiche „bündig“ aneinander. Sie können also zu einer einzigen Lösungsmenge zusammengefasst werden:

$$L = \{x | 3 \leq x \leq 9\} \quad (1)$$

0.14 UNGLEICH-13

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$9 - |2x - 10| - x < |3x - 9|$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Um den Betrag aufzulösen, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn wenn der **Betragsinhalt negativ** ist, dann muss beim Auflösen ein zusätzliches Minuszeichen davor gesetzt werden. Ich beginne mit dem Auflösen des linken Betrages. Im weiteren Verlauf der Rechnung muss dann beim Auflösen des zweiten Betrages eine weitere Fallunterscheidung durchgeführt werden. Aus Platzgründen bearbeite ich die beiden Fälle nacheinander.

Positiv ist der Inhalt des ersten Betrages für $x \geq 5$, negativ für $x < 5$.

Untersuchung für $x \geq 5$: (1)

$$\begin{aligned} 9 - |2x - 10| - x &< |3x - 9| \\ 9 - (2x - 10) - x &< |3x - 9| \\ 9 - 2x + 10 - x &< |3x - 9| \\ -3x + 19 &< |3x - 9| \quad (1) \end{aligned}$$

Jetzt muss auch der zweite Betrag aufgelöst werden. Sein Inhalt ist positiv für $x \geq 3$ und negativ für $x < 3$.

für $x \geq 3$: (1)

für $x < 3$: (1)

$$\begin{aligned} -3x + 19 &< |3x - 9| \quad (1) & (\text{entfällt}) \quad (1) \\ -3x + 19 &< 3x - 9 \quad | -3x - 19 \\ -6x &< -28 \quad | : (-6) \\ x &> \frac{14}{3} \approx 4,33 \quad (1) \\ L_1 &= \{x | x \geq 5\} \quad (1) \end{aligned}$$

Es folgt die Untersuchung für den zweiten Fall aus der Auflösung des linken Betrages.

Untersuchung für $x < 5$: (1)

$$\begin{aligned} 9 - |2x - 10| - x &< |3x - 9| \\ 9 + (2x - 10) - x &< |3x - 9| \\ 9 + 2x - 10 - x &< |3x - 9| \\ x - 1 &< |3x - 9| \quad (1) \end{aligned}$$

Jetzt muss auch der zweite Betrag aufgelöst werden. Sein Inhalt ist positiv für $x \geq 3$ und negativ für $x < 3$.

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq 3 : & (1) \\ x - 1 < \overline{3x - 9} \mid - 3x + 1 & (1) \\ -2x < -8 \mid : (-2) & \\ x > 4 & (1) \\ L_2 = \{x \mid 4 < x < 5\} & (1) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{für } x < 3 : & (1) \\ x - 1 < \overline{-3x + 9} \mid + 3x + 1 & (1) \\ 4x < 10 \mid : 4 & \\ x < 2,5 & (1) \\ L_3 = \{x \mid x < 2,5\} & (1) \end{array}$$

Da die Lösungsmengen L_1 und L_2 „bündig“ aneinanderstoßen, kann die Gesamtlösungsmenge wie folgt zusammengefasst werden:

$$L = \{x \mid x < 2,5 \vee x > 4\} \quad (1)$$

0.15 UNGLEICH-14

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$8 - x - |3x - 6| < |2x - 8|$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Um den Betrag aufzulösen, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn wenn der **Betragsinhalt negativ** ist, dann muss beim Auflösen ein zusätzliches Minuszeichen davor gesetzt werden. Ich beginne mit dem Auflösen des linken Betrages. Im weiteren Verlauf der Rechnung muss dann beim Auflösen des zweiten Betrages eine weitere Fallunterscheidung durchgeführt werden. Aus Platzgründen bearbeite ich die beiden Fälle nacheinander.

Positiv ist der Inhalt des ersten Betrages für $x \geq 2$, negativ für $x < 2$.

Untersuchung für $x \geq 2$: (1)

$$\begin{aligned} 8 - x - |3x - 6| &< |2x - 8| \\ 8 - x - (3x - 6) &< |2x - 8| \\ 8 - x - 3x + 6 &< |2x - 8| \\ -4x + 14 &< |2x - 8| \quad (1) \end{aligned}$$

Jetzt muss auch der zweite Betrag aufgelöst werden. Sein Inhalt ist positiv für $x \geq 4$ und negativ für $x < 4$.

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq 4: & (1) \\ -4x + 14 < 2x - 8 & | + 2x - 14 \quad (1) \\ -6x < -22 & | : (-6) \\ x > \frac{11}{3} \approx 3,67 & (1) \\ L_1 = \{x | x \geq 4\} & (1) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{für } x < 4: & (1) \\ -4x + 14 < -2x + 8 & | + 2x - 14 \quad (1) \\ -2x < -6 & | : (-2) \\ x > 3 & (1) \\ L_2 = \{x | 3 < x < 4\} & (1) \end{array}$$

Es folgt die Untersuchung für den zweiten Fall aus der Auflösung des linken Betrages.

Untersuchung für $x < 2$: (1)

$$\begin{aligned} 8 - x - |3x - 6| &< |2x - 8| \\ 8 - x + (3x - 6) &< |2x - 8| \\ 8 - x + 3x - 6 &< |2x - 8| \\ 2x + 2 &< |2x - 8| \quad (1) \end{aligned}$$

Jetzt muss auch der zweite Betrag aufgelöst werden. Sein Inhalt ist positiv für $x \geq 4$ und negativ für $x < 4$.

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq 4: & (1) \\ \text{(entfällt)} & (1) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{für } x < 4: & (1) \\ 2x + 2 < -2x + 8 & | + 2x - 2 \quad (1) \\ 4x < 6 & | : 4 \\ x > 1,5 & (1) \\ L_3 = \{x | x < 1,5\} & (1) \end{array}$$

Da die Lösungsmengen L_1 und L_2 „bündig“ aneinanderstoßen, kann die Gesamtlösungsmenge wie folgt zusammengefasst werden:

$$L = \{x | x < 1,5 \vee x > 3\} \quad (1)$$

0.16 UNGLEICH-15

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$\frac{|3x + 3|}{x - 1} \leq 4$$

Lösung

Einschränkungen im Definitionsbereich gibt es dort, wo der Nenner Null wird. Das ist hier für $x = 1$ der Fall. Damit ergibt sich folgende Definitionsmenge:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad (1)$$

Ob man nun zunächst den Betrag oder den Bruch auflöst, ist im Prinzip gleichgültig. Ich löse zuerst den Bruch auf. Weil ich dazu mit dem Nenner $(x - 1)$ multiplizieren muss, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn falls der Nenner **negativ** ist, muss ich das Ungleichungszeichen **umdrehen**.

Der positive Fall ergibt sich für $x > 1$, der negative für $x < 1$. Da sich später beim Auflösen des Betrages eine weitere Fallunterscheidung ergibt, bearbeite ich hier die Fälle nacheinander.

$$\text{für } x > 1: \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{|3x + 3|}{x - 1} &\leq 4 \quad | \cdot (x - 1) \\ |3x + 3| &\leq 4 \cdot (x - 1) \\ |3x + 3| &\leq 4x - 4 \quad (1) \end{aligned}$$

Um den Betrag aufzulösen ist jetzt eine weitere Fallunterscheidung notwendig. Der Betragsinhalt ist **positiv** für $x \geq -1$ und **negativ** für $x < -1$.

$$\begin{aligned} 3x + 3 &\leq \frac{\text{für } x \geq -1: \quad (1)}{4x - 4} \quad | -4x - 3 \quad (1) & \frac{\text{für } x < -1: \quad (1)}{(\text{entfällt})} \quad (1) \\ -x &\leq -7 \quad | : (-1) \\ x &\geq 7 \quad (1) \\ L_1 &= \{x | x \geq 7\} \quad (1) \end{aligned}$$

Es folgt der andere Fall aus der ersten Fallunterscheidung.

$$\underline{\text{für } x < 1 :} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{|3x+3|}{x-1} &\leq 4 \quad | \cdot (x-1) \\ |3x+3| &\geq 4 \cdot (x-1) \\ |3x+3| &\geq 4x-4 \quad (1) \end{aligned}$$

Um den Betrag aufzulösen ist jetzt eine weitere Fallunterscheidung notwendig. Der Betragsinhalt ist **positiv** für $x \geq -1$ und **negativ** für $x < -1$.

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq -1 : \quad (1) & \text{für } x < -1 : \quad (1) \\ 3x+3 \geq 4x-4 \quad | -4x-3 \quad (1) & -3x-3 \geq 4x-4 \quad | -4x+3 \quad (1) \\ -x \geq -7 \quad | : (-1) & -7x \geq -1 \quad | : (-7) \\ x \leq 7 \quad (1) & x \leq \frac{1}{7} \quad (1) \\ L_2 = \{x | -1 \leq x < 1\} \quad (1) & L_3 = \{x | x < -1\} \quad (1) \end{array}$$

Da die Lösungsmengen L_2 und L_3 „bündig“ aneinanderstoßen, kann die Gesamtlösungsmenge wie folgt zusammengefasst werden:

$$L = \{x | x < 1 \vee x \geq 7\} \quad (1)$$

0.17 UNGLEICH-16

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$\frac{|5x + 5|}{x - 1} \leq 6$$

Lösung

Einschränkungen im Definitionsbereich gibt es dort, wo der Nenner Null wird. Das ist hier für $x = 1$ der Fall. Damit ergibt sich folgende Definitionsmenge:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad (1)$$

Ob man nun zunächst den Betrag oder den Bruch auflöst, ist im Prinzip gleichgültig. Ich löse zuerst den Bruch auf. Weil ich dazu mit dem Nenner $(x - 1)$ multiplizieren muss, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn falls der Nenner **negativ** ist, muss ich das Ungleichungszeichen **umdrehen**.

Der positive Fall ergibt sich für $x > 1$, der negative für $x < 1$. Da sich später beim Auflösen des Betrages eine weitere Fallunterscheidung ergibt, bearbeite ich hier die Fälle nacheinander.

$$\text{für } x > 1: \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{|5x + 5|}{x - 1} &\leq 6 \quad | \cdot (x - 1) \\ |5x + 5| &\leq 6 \cdot (x - 1) \\ |5x + 5| &\leq 6x - 6 \quad (1) \end{aligned}$$

Um den Betrag aufzulösen ist jetzt eine weitere Fallunterscheidung notwendig. Der Betragsinhalt ist **positiv** für $x \geq -1$ und **negativ** für $x < -1$.

$$\begin{aligned} \text{für } x \geq -1: \quad (1) \quad & \text{für } x < -1: \quad (1) \\ 5x + 5 &\leq 6x - 6 \quad | -6x - 5 \quad (1) & \text{(entfällt)} \quad (1) \\ -x &\leq -11 \quad | : (-1) \\ x &\geq 11 \quad (1) \\ L_1 &= \{x | x \geq 11\} \quad (1) \end{aligned}$$

Es folgt der andere Fall aus der ersten Fallunterscheidung.

$$\underline{\text{für } x < 1 :} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{|5x+5|}{x-1} &\leq 6 \quad | \cdot (x-1) \\ |5x+5| &\geq 6 \cdot (x-1) \\ |5x+5| &\geq 6x-6 \quad (1) \end{aligned}$$

Um den Betrag aufzulösen ist jetzt eine weitere Fallunterscheidung notwendig. Der Betragsinhalt ist **positiv** für $x \geq -1$ und **negativ** für $x < -1$.

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq -1 : \quad (1) & \text{für } x < -1 : \quad (1) \\ 5x+5 \geq 6x-6 \quad | -6x-5 \quad (1) & -5x-5 \geq 6x-6 \quad | -6x+5 \quad (1) \\ -x \geq -11 \quad | : (-1) & -11x \geq -1 \quad | : (-7) \\ x \leq 11 \quad (1) & x \leq \frac{1}{11} \quad (1) \\ L_2 = \{x | -1 \leq x < 1\} \quad (1) & L_3 = \{x | x < -1\} \quad (1) \end{array}$$

Da die Lösungsmengen L_2 und L_3 „bündig“ aneinanderstoßen, kann die Gesamtlösungsmenge wie folgt zusammengefasst werden:

$$L = \{x | x < 1 \vee x \geq 11\} \quad (1)$$

0.18 UNGLEICH-17

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$2x - \frac{2x+3}{3-x} - 11 \geq 2x$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich den Nenner gleich Null.

$$3 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Hieraus ergibt sich die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ (2)

$$\begin{aligned} 2x - \frac{2x+3}{3-x} - 11 &\geq 2x \quad | -2x + 11 \\ -\frac{2x+3}{3-x} &\geq 11 \quad | \cdot (3-x) \quad (2) \end{aligned}$$

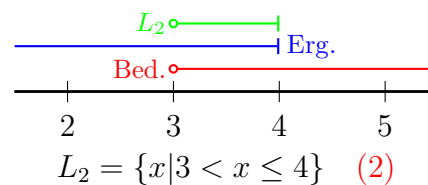
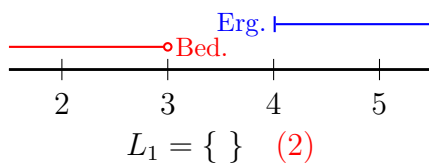
Da mit einem Term multipliziert werden soll, der manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** notwendig. In einer Nebenrechnung bestimme ich, wo der Faktor $(3-x)$ positiv ist, denn in diesem Fall muss das Ungleichungszeichen **nicht** umgedreht werden.

$$\begin{aligned} 3 - x &> 0 \quad | -3 \\ -x &> -3 \quad | \cdot (-1) \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$-\frac{2x+3}{3-x} \geq 11 \quad | \cdot (3-x)$$

$\begin{aligned} &\text{für } x < 3: \\ -(2x+3) &\geq 33 - 11x \quad +3 + 3x \quad (2) \\ -2x - 3 &\geq 33 - 11x \quad +3 + 11x \\ 9x &\geq 36 \quad : 9 \\ x &\geq 4 \quad (3) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\text{für } x > 3: \quad (4) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x &\leq 4 \quad (2) \end{aligned}$
--	--



$$L = \{x | 3 < x \leq 4\} \quad (1)$$

0.19 UNGLEICH-18

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$3x \geq 3x - \frac{2x+3}{2-x} - 9$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich den Nenner gleich Null.

$$2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Hieraus ergibt sich die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (2)

$$\begin{aligned} 3x &\geq 3x - \frac{2x+3}{2-x} - 9 \quad | -3x + 9 \\ 9 &\geq -\frac{2x+3}{2-x} \quad | \cdot (2-x) \quad (2) \end{aligned}$$

Da mit einem Term multipliziert werden soll, der manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, ist eine **Fallunterscheidung** notwendig. In einer Nebenrechnung bestimme ich, wo der Faktor $(2-x)$ positiv ist, denn in diesem Fall muss das Ungleichungszeichen **nicht** umgedreht werden.

$$\begin{aligned} 2 - x &> 0 \quad | -2 \\ -x &> -2 \quad | \cdot (-1) \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{ll} 9 \geq -\frac{2x+3}{2-x} \quad | \cdot (2-x) & \end{array}$$

<u>für $x < 2$:</u>	<u>für $x > 2$:</u> (4)
$9 \cdot (2-x) \geq -(2x+3) \quad (2)$.
$18 - 9x \geq -2x - 3 \quad -18 + 2x$.
$-7x \geq -21 \quad : 20$.
$x \leq 3 \quad (3)$	$x \geq 3 \quad (2)$

$L_1 = \{x | x < 2\} \quad (2)$

$L_2 = \{x | x \geq 3\} \quad (2)$

$$L = \{x | x < 2 \vee x \geq 3\} \quad (1)$$

0.20 UNGLEICH-19

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{x+1}{x-3} - \frac{x-1}{5-x} \geq 2$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3; 5\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

	3	5	
$(x-3)$	–	+	+
$(5-x)$	+	+	–
HN	–	+	–

(2)

Im Bereich zwischen 3 und 5 ist demnach der Hauptnenner **positiv**, in den Bereichen darunter und darüber **negativ**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung.

$$\frac{x+1}{x-3} - \frac{x-1}{5-x} \geq 2 \quad | \cdot (x-3) \cdot (5-x)$$

$$\text{für } 3 < x < 5 : \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (x+1)(5-x) - (x-1)(x-3) &\geq 2(x-3)(5-x) & (2) \\ 5x - x^2 + 5 - x - (x^2 - 3x - x + 3) &\geq 2(5x - x^2 - 15 + 3x) \\ -x^2 + 4x + 5 - x^2 + 4x - 3 &\geq 10x - 2x^2 - 30 + 6x \\ -2x^2 + 8x + 2 &\geq -2x^2 + 16x - 30 \quad | + 2x^2 \\ 8x + 2 &\geq 16x - 30 \quad | - 2 - 16x \\ -8x &\geq -32 \quad | : (-8) \\ x &\leq 4 & (3) \\ L_1 &= \{x | 3 < x \leq 4\} & (2) \end{aligned}$$

$$\text{für } x < 3 \vee x > 5 : \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ x &\geq 4 & (2) \\ L_2 &= \{x | x > 5\} & (2) \end{aligned}$$

Zusammengefasste Lösungsmenge: $L = \{x | 3 < x \leq 4 \vee x > 5\} \quad (1)$

0.21 UNGLEICH-20

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{x+1}{x-4} - \frac{x-1}{6-x} \geq 2$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{4; 6\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

	4	6	
$(x-4)$	–	+	+
$(6-x)$	+	+	–
HN	–	+	–

(2)

Im Bereich zwischen 4 und 6 ist demnach der Hauptnenner **positiv**, in den Bereichen darunter und darüber **negativ**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung.

$$\frac{x+1}{x-4} - \frac{x-1}{6-x} \geq 2 \quad | \cdot (x-4) \cdot (6-x)$$

$$\text{für } 4 < x < 6 : \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (x+1)(6-x) - (x-1)(x-4) &\geq 2(6-x)(x-4) & (2) \\ 6x - x^2 + 6 - x - (x^2 - 4x - x + 4) &\geq 2(6x - 24 - x^2 + 4x) \\ -x^2 + 5x + 6 - x^2 + 5x - 4 &\geq 12x - 48 - 2x^2 + 8x \\ -2x^2 + 10x + 2 &\geq -2x^2 + 20x - 48 \quad | + 2x^2 \\ 10x + 2 &\geq 20x - 48 \quad | - 2 - 20x \\ -10x &\geq -50 \quad | : (-10) \\ x &\leq 5 & (3) \\ L_1 &= \{x | 4 < x \leq 5\} & (2) \end{aligned}$$

$$\text{für } x < 4 \vee x > 6 : \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ x &\geq 5 & (2) \\ L_2 &= \{x | x > 6\} & (2) \end{aligned}$$

Zusammengefasste Lösungsmenge: $L = \{x | 4 < x \leq 5 \vee x > 6\} \quad (1)$

0.22 UNGLEICH-21

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+1} \leq \frac{5}{x-7}$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3; 7\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der drei Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

	-1	3	7	
$(x-3)$	-	-	+	+
$(x+1)$	-	+	+	+
$(x-7)$	-	-	-	+
HN	-	+	-	+

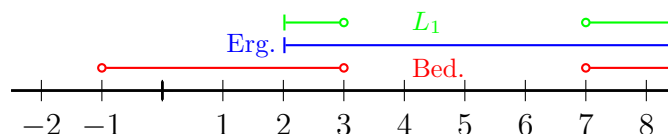
(2)

Im Bereich zwischen -1 bis 3 sowie über 7 ist demnach der Hauptnenner **positiv**, in den anderen Bereichen **negativ**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung. Aus Platzgründen werden die beiden Fälle **untereinander** und nicht **nebeneinander** dargestellt.

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+1} \leq \frac{5}{x-7} \quad | \cdot (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x-7)$$

$$\text{für } -1 < x < 3 \vee x > 7: \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 2(x+1)(x-7) + 3(x-3)(x-7) &\leq 5(x+1)(x-3) & (2) \\ 2x^2 - 14x + 2x - 14 + 3x^2 - 21x - 9x + 63 &\leq 5x^2 - 15x + 5x - 15 \\ 5x^2 - 42x + 49 &\leq 5x^2 - 10x - 15 & | -5x^2 + 15 + 10x \\ -32x &\leq -64 & | : (-32) \\ x &\geq 2 & (3) \end{aligned}$$

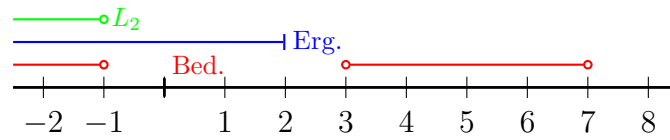


$$L_1 = \{x | 2 \leq x < 3 \vee x > 7\} \quad (2)$$

Es folgt der andere Fall:

$$\underline{\text{für } x < -1 \vee 3 < x < 7:} \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ x \leq 2 \end{array} \quad (2)$$



$$L_2 = \{x | x < -1\} \quad (2)$$

Zusammengefasste Lösungsmenge: $L = \{x | x < -1 \vee 2 \leq x < 3 \vee x > 7\}$ (1)

0.23 UNGLEICH-22

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{4}{x-2} + \frac{3}{x-4} \leq \frac{7}{x+4}$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 2; 4\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der drei Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

	-4	2	4	
$(x-2)$	-	-	+	+
$(x-4)$	-	-	-	+
$(x+4)$	-	+	+	+
HN	-	+	-	+

(2)

Im Bereich zwischen -4 bis 2 sowie über 4 ist demnach der Hauptnenner **positiv**, in den anderen Bereichen **negativ**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung. Aus Platzgründen werden die beiden Fälle **untereinander** und nicht **nebeneinander** dargestellt.

$$\frac{4}{x-2} + \frac{3}{x-4} \leq \frac{7}{x+4} \quad | \cdot (x-2) \cdot (x-4) \cdot (x+4)$$

$$\text{für } -4 < x < 2 \vee x > 4 : \quad (2)$$

$$4(x-4)(x+4) + 3(x-2)(x+4) \leq 7(x-4)(x-2) \quad (2)$$

$$(4x-16)(x+4) + (3x-6)(x+4) \leq (7x-28)(x-2)$$

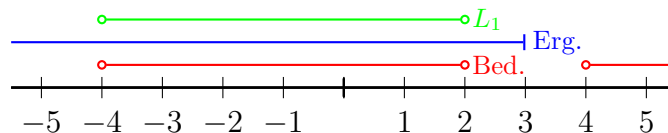
$$4x^2 + 16x - 16x - 64 + 3x^2 + 12x - 6x - 24 \leq 7x^2 - 14x - 28x + 56$$

$$7x^2 + 6x - 88 \leq 7x^2 - 42x + 56 \quad | -7x^2$$

$$6x - 88 \leq -42x + 56 \quad | +88 + 42x$$

$$48x \leq 144 \quad | : 48$$

$$x \leq 3 \quad (3)$$

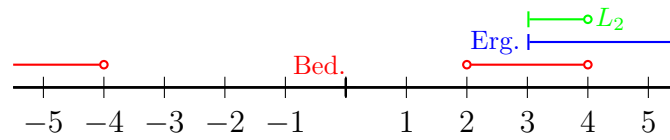


$$L_1 = \{x \mid -4 < x < 2\} \quad (2)$$

Es folgt der andere Fall:

$$\underline{\text{für } x < -4 \vee 2 < x < 4:} \quad (2)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ x \geq 3 \end{array} \quad (2)$$



$$L_2 = \{x | 3 \leq x < 4\} \quad (2)$$

Zusammengefasste Lösungsmenge: $L = \{x | -4 < x < 2 \vee 3 \leq x < 4\}$ (1)

0.24 UNGLEICH-23

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$x - |2x - 6| \geq -3$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Um den Betrag aufzulösen, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn wenn der **Betragsinhalt negativ** ist, dann muss beim Auflösen ein zusätzliches Minuszeichen davor gesetzt werden. Deshalb führe ich vorweg folgende **Nebenrechnung** durch, um den positiven Fall zu ermitteln.

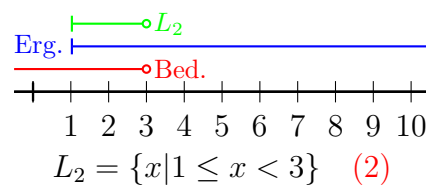
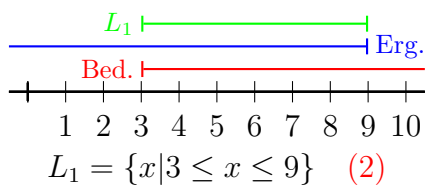
$$\begin{array}{rcl} 2x - 6 & \geq & 0 \quad | + 6 \\ 2x & \geq & 6 \quad | : 2 \\ x & \geq & 3 \end{array}$$

Hiermit ergeben sich folgende unterschiedlichen zwei Fälle:

$$x - |2x - 6| \geq -3$$

$$\begin{array}{rcl} \text{für } x \geq 3: & (3) & \\ x - 2x + 6 & \geq & -3 \quad (3) \\ -x + 6 & \geq & -3 \quad | - 6 \\ -x & \geq & -9 \quad | : (-1) \\ x & \leq & 9 \quad (2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{für } x < 3: & (3) & \\ x + 2x - 6 & \geq & -3 \quad (3) \\ 3x - 6 & \geq & -3 \quad | + 6 \\ 3x & \geq & 3 \quad | : 3 \\ x & \geq & 1 \quad (2) \end{array}$$



Wie man leicht erkennen kann, stoßen die beiden Lösungs-Bereiche bei $x = 3$ „bündig“ aneinander. Wir können sie also zur Gesamtlösungsmenge zusammenfassen:

$$L = \{x | 1 \leq x \leq 9\} \quad (1)$$

0.25 UNGLEICH-24

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$x - |3x - 6| \geq -2$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Um den Betrag aufzulösen, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn wenn der **Betragsinhalt negativ** ist, dann muss beim Auflösen ein zusätzliches Minuszeichen davor gesetzt werden. Deshalb führe ich vorweg folgende **Nebenrechnung** durch, um den positiven Fall zu ermitteln.

$$\begin{aligned} 3x - 6 &\geq 0 & | +6 \\ 3x &\geq 6 & | :3 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

Hiermit ergeben sich folgende unterschiedlichen zwei Fälle:

$$x - |3x - 6| \geq -2$$

$\begin{aligned} &\text{für } x \geq 2 : \quad (3) \\ x - 3x + 6 &\geq -2 \quad (3) \\ -2x + 6 &\geq -2 & -6 \\ -2x &\geq -8 & : (-2) \\ x &\leq 4 \quad (2) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\text{für } x < 2 : \quad (3) \\ x + 3x - 6 &\geq -2 \quad (3) \\ 4x - 6 &\geq -2 & +6 \\ 4x &\geq 4 & : 4 \\ x &\geq 1 \quad (2) \end{aligned}$
<p style="margin-top: 10px;">$L_1 = \{x 2 \leq x \leq 4\} \quad (2)$</p>	<p style="margin-top: 10px;">$L_2 = \{x 1 \leq x < 2\} \quad (2)$</p>

Wie man leicht erkennen kann, stoßen die beiden Lösungs-Bereiche bei $x = 2$ „bündig“ aneinander. Wir können sie also zu einer Gesamtlösung zusammenfassen:

$$L = \{x | 1 \leq x \leq 4\} \quad (1)$$

0.26 UNGLEICH-25

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$\left| 7 - |14 - 2x| \right| \leq x$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Hier haben wir **verschachtelte Beträge**, die sinnvollerweise **nacheinander** aufgelöst werden sollten. Dabei sind jedes mal zwei Fälle zu unterscheiden. Ich beginne mit der Auflösung des **inneren** Betrages. Das Vorzeichen bleibt bekanntlich erhalten, wenn der Inhalt größer oder gleich Null ist. Ich untersuche also vorweg in einer Nebenrechnung, wo das der Fall ist.

$$\begin{aligned} 14 - 2x &\geq 0 & | -14 \\ -2x &\geq -14 & | : (-2) \\ x &\leq 7 \end{aligned}$$

Aus Platzgründen behandle ich die Fälle $x \leq 7$ und $x > 7$ nacheinander und nicht nebeneinander.

$$\left| 7 - |14 - 2x| \right| \leq x$$

Untersuchung für $x \leq 7$: (1)

$$\begin{aligned} |7 - (14 - 2x)| &\leq x & (1) \\ |7 - 14 + 2x| &\leq x \\ |-7 + 2x| &\leq x & (1) \end{aligned}$$

Es ist leicht erkennbar, dass der Inhalt des Betrages für $x \geq 3,5$ positiv und für $x < 3,5$ negativ ist. Diese beiden Fälle können nun nebeneinander untersucht werden.

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq 3,5 : & (1) \\ -7 + 2x \leq x & | +7 - x \\ x \leq 7 & (1) \\ L_1 = \{x | 3,5 \leq x \leq 7\} & (1) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{für } x < 3,5 : & (1) \\ 7 - 2x \leq x & | -7 - x \\ -3x \leq -7 & | : (-3) \\ x \geq \frac{7}{3} \approx 2,33 & (1) \\ L_2 = \{x | \frac{7}{3} \leq x < 3,5\} & (1) \end{array}$$

Es folgt der zweite Fall aus der ersten Fallunterscheidung.

Untersuchung für $x > 7$: (1)

$$|7 + (14 - 2x)| \leq x \quad (1)$$

$$|7 + 14 - 2x| \leq x$$

$$|21 - 2x| \leq x \quad (1)$$

Der Inhalt dieses Betrages ist positiv für $x \leq 10,5$ und negativ für $x > 10,5$. Diese beiden Fälle müssen jetzt einzeln untersucht werden.

für $x \leq 10,5$: (1)

$$21 - 2x \leq x \quad | -x - 21$$

$$-3x \leq -21 \quad | : (-3)$$

$$x \geq 7 \quad (1)$$

$$L_3 = \{x | 7 < x \leq 10,5\} \quad (1)$$

für $x > 10,5$: (1)

$$-21 + 2x \leq x \quad | -x + 21$$

$$x \leq 21 \quad (1)$$

$$L_4 = \{x | 10,5 < x \leq 21\} \quad (1)$$

Die vier Teillösungsmengen stoßen in der Reihenfolge $L_2 - L_1 - L_3 - L_4$ jeweils „bündig“ aneinander an. Die Gesamtlösungsmenge lautet damit:

$$L = \{x | \frac{7}{3} \leq x \leq 21\} \quad (1)$$

0.27 UNGLEICH-26

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$\left| 8 - |16 - 2x| \right| \leq x$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Hier haben wir **verschachtelte Beträge**, die sinnvollerweise **nacheinander** aufgelöst werden sollten. Dabei sind jedes mal zwei Fälle zu unterscheiden. Ich beginne mit der Auflösung des **inneren** Betrages. Das Vorzeichen bleibt bekanntlich erhalten, wenn der Inhalt größer oder gleich Null ist. Ich untersuche also vorweg in einer Nebenrechnung, wo das der Fall ist.

$$\begin{aligned} 16 - 2x &\geq 0 & | -16 \\ -2x &\geq -16 & | : (-2) \\ x &\leq 8 \end{aligned}$$

Aus Platzgründen behandle ich die Fälle $x \leq 8$ und $x > 8$ nacheinander und nicht nebeneinander.

$$\left| 8 - |16 - 2x| \right| \leq x$$

Untersuchung für $x \leq 8$: (1)

$$\begin{aligned} |8 - (16 - 2x)| &\leq x & (1) \\ |8 - 16 + 2x| &\leq x \\ |-8 + 2x| &\leq x & (1) \end{aligned}$$

Es ist leicht erkennbar, dass der Inhalt des Betrages für $x \geq 4$ positiv und für $x < 4$ negativ ist. Diese beiden Fälle können nun nebeneinander untersucht werden.

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq 4 : & (1) \\ -8 + 2x \leq x & | +8 - x \\ x \leq 8 & (1) \\ L_1 = \{x | 4 \leq x \leq 8\} & (1) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{für } x < 4 : & (1) \\ 8 - 2x \leq x & | -8 - x \\ -3x \leq -8 & | : (-3) \\ x \geq \frac{8}{3} \approx 2,67 & (1) \\ L_2 = \{x | \frac{8}{3} \leq x < 4\} & (1) \end{array}$$

Es folgt der zweite Fall aus der ersten Fallunterscheidung.

Untersuchung für $x > 8$: (1)

$$|8 + (16 - 2x)| \leq x \quad (1)$$

$$|8 + 16 - 2x| \leq x$$

$$|24 - 2x| \leq x \quad (1)$$

Der Inhalt dieses Betrages ist positiv für $x \leq 12$ und negativ für $x > 12$. Diese beiden Fälle müssen jetzt einzeln untersucht werden.

$$\text{für } x \leq 12 : \quad (1)$$

$$24 - 2x \leq x \quad | -x - 24$$

$$-3x \leq -24 \quad | : (-3)$$

$$x \geq 8 \quad (1)$$

$$L_3 = \{x | 8 < x \leq 12\} \quad (1)$$

$$\text{für } x > 12 : \quad (1)$$

$$-24 + 2x \leq x \quad | -x + 24$$

$$x \leq 24 \quad (1)$$

$$L_4 = \{x | 12 < x \leq 24\} \quad (1)$$

Die vier Teillösungsmengen stoßen in der Reihenfolge $L_2 - L_1 - L_3 - L_4$ jeweils „bündig“ aneinander an. Die Gesamtlösungsmenge lautet damit:

$$L = \{x | \frac{8}{3} \leq x \leq 24\} \quad (1)$$

0.28 UNGLEICH-27

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$\frac{|x+3|}{x-1} \geq 2$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich den Nenner gleich Null. Ohne schriftliche Rechnung ergibt sich die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (1)

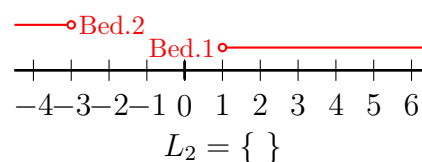
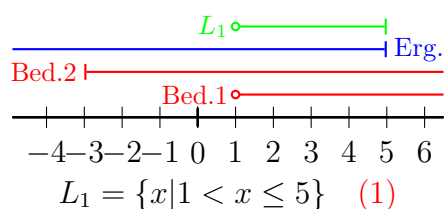
Zur Bestimmung der Lösungsmenge möchte ich zunächst den Bruch auflösen. Dabei ist eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem, ob der Nenner positiv oder negativ ist. Dies ist für $x > 1$ bzw. für $x < 1$ der Fall. Da später beim Auflösen des Betrages noch eine weitere Fallunterscheidung notwendig wird, führe ich die Untersuchung der beiden Fälle aus Platzgründen **nacheinander** durch.

Untersuchung für $x > 1$: (1)

$$\begin{aligned} \frac{|x+3|}{x-1} &\geq 2 \quad | \cdot (x-1) \\ |x+3| &\geq 2 \cdot (x-1) \\ |x+3| &\geq 2x-2 \quad (1) \end{aligned}$$

Nun muss der Betrag aufgelöst werden. Dabei ist eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem, ob der Inhalt des Betrages größer/gleich oder kleiner als Null ist. Auch ohne Nebenrechnung ist wohl erkennbar, dass der Betragsinhalt positiv ist für $x \geq -3$ und negativ für $x < -3$. Damit ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq -3 : & (1) \quad \text{für } x < -3 : & (1) \\ x+3 \geq 2x-2 & | -2x-3 & (1) \quad \text{(entfällt)} & (1) \\ -x \geq -5 & | : (-1) & \\ x \leq 5 & (1) & \end{array}$$



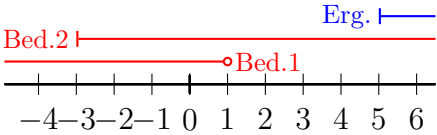
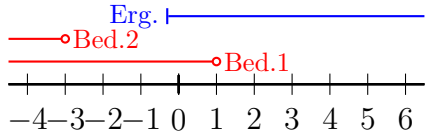
Der rechte Fall entfällt, da keine Zahl gleichzeitig größer als 1 und kleiner als -3 sein kann.

Für den anderen Fall aus der ersten Fallunterscheidung ergibt sich:

Untersuchung für $x < 1$: (1)

$$\begin{aligned}\frac{|x+3|}{x-1} &\geq 2 \quad | \cdot (x-1) \\ |x+3| &\leq 2 \cdot (x-1) \\ |x+3| &\leq 2x-2 \quad (1)\end{aligned}$$

Nun muss der Betrag aufgelöst werden. Dabei ist eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem, ob der Inhalt des Betrages größer/gleich oder kleiner als Null ist. Für die Bestimmung der beiden Fälle gilt die Überlegung von oben.

$\begin{aligned} &\text{für } x \geq -3 : \quad (1) \\ x+3 &\leq 2x-2 \quad -2x-3 \quad (1) \\ -x &\leq -5 \quad : (-1) \\ x &\geq 5 \quad (1) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\text{für } x < -3 : \quad (1) \\ -x-3 &\leq 2x-2 \quad +3-2x \quad (1) \\ -3x &\leq 1 \quad : (-5) \\ x &\geq -\frac{1}{3} \quad (1) \end{aligned}$
 <p style="text-align: center;">$L_3 = \{ \} \quad (1)$</p>	 <p style="text-align: center;">$L_4 = \{ \} \quad (1)$</p>

Diese beiden Teillösungsmengen sind leer. Damit lautet die Gesamtlösungsmenge:

$L = L_1 = \{x | 1 < x \leq 5\}$

(1)

0.29 UNGLEICH-28

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Ungleichung.

$$\frac{|x+5|}{x-2} \geq 8$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich den Nenner gleich Null. Ohne schriftliche Rechnung ergibt sich die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (1)

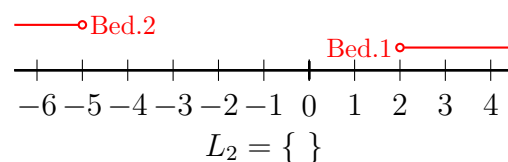
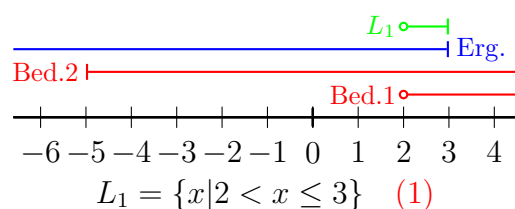
Zur Bestimmung der Lösungsmenge möchte ich zunächst den Bruch auflösen. Dabei ist eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem, ob der Nenner positiv oder negativ ist. Dies ist für $x > 2$ bzw. für $x < 2$ der Fall. Da später beim Auflösen des Betrages noch eine weitere Fallunterscheidung notwendig wird, führe ich die Untersuchung der beiden Fälle aus Platzgründen **nacheinander** durch.

Untersuchung für $x > 2$: (1)

$$\begin{aligned} \frac{|x+5|}{x-2} &\geq 8 \quad | \cdot (x-2) \\ |x+5| &\geq 8 \cdot (x-2) \\ |x+5| &\geq 8x-16 \quad (1) \end{aligned}$$

Nun muss der Betrag aufgelöst werden. Dabei ist eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem, ob der Inhalt des Betrages größer/gleich oder kleiner als Null ist. Auch ohne Nebenrechnung ist wohl erkennbar, dass der Betragsinhalt positiv ist für $x \geq -5$ und negativ für $x < -5$. Damit ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{ll} \text{für } x \geq -5 : & (1) \quad \text{für } x < -5 : & (1) \\ x+5 \geq 8x-16 & | -8x-5 & (1) \quad \text{(entfällt)} & (1) \\ -7x \geq -21 & | : (-7) & \\ x \leq 3 & (1) & \end{array}$$



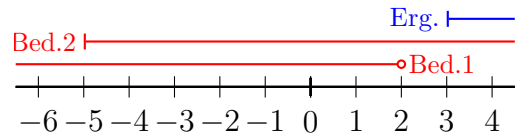
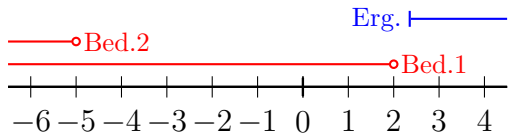
Der rechte Fall entfällt, da keine Zahl gleichzeitig größer als 2 und kleiner als -5 sein kann.

Für den anderen Fall aus der ersten Fallunterscheidung ergibt sich:

Untersuchung für $x < 2$: (1)

$$\begin{aligned}\frac{|x+5|}{x-2} &\geq 8 \quad | \cdot (x-2) \\ |x+5| &\leq 8 \cdot (x-2) \\ |x+5| &\leq 8x-16 \quad (1)\end{aligned}$$

Nun muss der Betrag aufgelöst werden. Dabei ist eine Fallunterscheidung notwendig, je nachdem, ob der Inhalt des Betrages größer/gleich oder kleiner als Null ist. Für die Bestimmung der beiden Fälle gilt die Überlegung von oben.

$\begin{aligned} &\text{für } x \geq -5 : \quad (1) \\ x+5 &\leq \frac{8x-16}{x-2} \quad -8x-5 \quad (1) \\ -7x &\leq -21 \quad : (-7) \\ x &\geq 3 \quad (1) \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\text{für } x < -5 : \quad (1) \\ -x-5 &\leq \frac{8x-16}{x-2} \quad +5-8x \quad (1) \\ -9x &\leq -11 \quad : (-9) \\ x &\geq \frac{11}{9} \approx 1,22 \quad (1) \end{aligned}$
 <p style="text-align: center;">$L_3 = \{ \} \quad (1)$</p>	 <p style="text-align: center;">$L_4 = \{ \} \quad (1)$</p>

Diese beiden Teillösungsmengen sind leer. Damit lässt sich die Gesamtlösungsmenge wie folgt darstellen:

$L = L_1 = \{x | 2 < x \leq 3\}$

(1)

0.30 UNGLEICH-29

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{6-4x}{x+1} \leq \frac{2x+1}{2-x} - \frac{2x+2}{x+1}$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$$

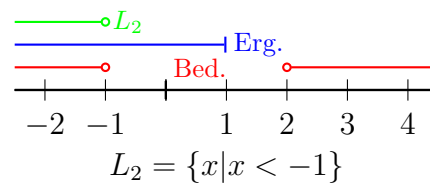
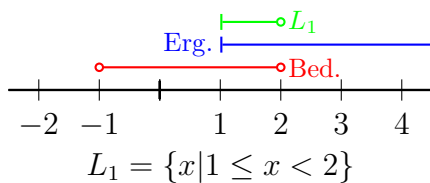
Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der beiden verschiedenen Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

	-1	2
$(x+1)$	-	+
$(2-x)$	+	-
HN	-	-

Im Bereich unter -1 und über 2 ist demnach der Hauptnenner **negativ**, in dem Bereich dazwischen **positiv**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung:

$$\frac{6-4x}{x+1} \leq \frac{2x+1}{2-x} - \frac{2x+2}{x+1} \quad | \cdot (x+1) \cdot (2-x)$$

für $-1 < x < 2$:	für $x < -1 \vee x > 2$:
$(6-4x)(2-x) \leq (2x+1)(x+1) - (2x+2)(2-x)$.
$12-6x-8x+4x^2 \leq 2x^2+2x+x+1 - (4x-2x^2+4-2x)$.
$12-14x+4x^2 \leq 2x^2+3x+1-4x+2x^2-4+2x$.
$12-14x+4x^2 \leq 4x^2+x-3 \quad -4x^2-12-x$.
$-15x \leq -15 \quad : (-15)$.
$x \geq 1$	$x \leq -1$



$$L = \{x | x < -1 \vee 1 \leq x < 2\}$$

0.31 UNGLEICH-30

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{7-2x}{3-x} \leq \frac{2x-9}{x-5}$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3; 5\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der beiden verschiedenen Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

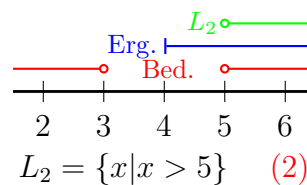
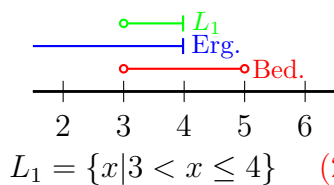
	3	5	
$(3-x)$	+	-	-
$(x-5)$	-	-	+
HN	-	+	-

(2)

Im Bereich unter 3 und über 5 ist demnach der Hauptnenner **negativ**, in dem Bereich dazwischen **positiv**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung:

$$\frac{7-2x}{3-x} \leq \frac{2x-9}{x-5} \quad | \cdot (3-x) \cdot (x-5)$$

<p style="text-align: center;">für $3 < x < 5$:</p> $\begin{aligned} (7-2x) \cdot (x-5) &\leq (2x-9) \cdot (3-x) & (2) \\ 7x - 35 - 2x^2 + 10x &\leq 6x - 2x^2 - 27 + 9x & + 2x^2 \\ 17x - 35 &\leq 15x - 27 & + 35 - 15x \\ 2x &\leq 8 & : 2 \\ x &\leq 4 & (3) \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">für $x < 3 \vee x > 5$:</p> $\begin{aligned} &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x &\geq 4 & (2) \end{aligned} \quad (4)$
--	---



$$L = \{x | 3 < x \leq 4 \vee x > 5\} \quad (1)$$

0.32 UNGLEICH-31

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung.

$$\frac{3x - 11}{x - 3} \leq \frac{13 - 3x}{5 - x}$$

Lösung

Zur Bestimmung der Definitionsmenge setze ich die Nenner gleich Null. Jeder liefert eine Zahl, die aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden muss. Das geht auch ohne schriftliche Rechnung im Kopf.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3; 5\} \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Lösungsmenge soll die Ungleichung mit dem Hauptnenner – hier das Produkt der beiden verschiedenen Nenner – multipliziert werden. Da der Hauptnenner manchmal positiv und manchmal negativ sein kann, stelle ich die entsprechenden Bereiche mit Hilfe einer **Vorzeichentabelle** fest.

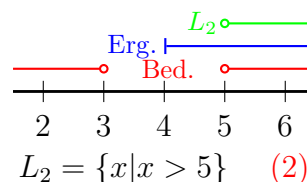
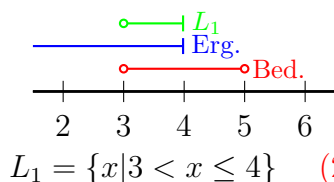
	3	5	
$(x - 3)$	−	+	+
$(5 - x)$	+	+	−
HN	−	+	−

(2)

Im Bereich unter 3 und über 5 ist demnach der Hauptnenner **negativ**, in dem Bereich dazwischen **positiv**. Das ergibt nachfolgende Fallunterscheidung:

$$\frac{3x - 11}{x - 3} \leq \frac{13 - 3x}{5 - x} \quad | \cdot (x - 3) \cdot (5 - x)$$

<p style="text-align: center;"><u>für $3 < x < 5$:</u></p> $ \begin{aligned} (3x - 11) \cdot (5 - x) &\leq (13 - 3x) \cdot (x - 3) & (2) \\ 15x - 3x^2 - 55 + 11x &\leq 13x - 39 - 3x^2 + 9x & + 3x^2 \\ 26x - 55 &\leq 22x - 39 & + 55 - 22x \\ 4x &\leq 16 & : 4 \\ x &\leq 4 & (3) \end{aligned} $	<p style="text-align: center;"><u>für $x < 3 \vee x > 5$:</u> (4)</p> $ \begin{aligned} &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x &\geq 4 & (2) \end{aligned} $
---	---



$$L = \{x | 3 < x \leq 4 \vee x > 5\} \quad (1)$$

0.33 UNGLEICH-32

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Gleichung:

$$3x - |x - 2| = 2$$

Lösung

Da keine Brüche vorkommen ist: $D = \mathbb{R}$ (1)

Um den Betrag aufzulösen, ist eine Fallunterscheidung erforderlich, je nachdem, ob der **Betragsinhalt** positiv oder negativ ist.

$$3x - |x - 2| = 2$$

$\begin{array}{lcl} \text{für } x \geq 2: & & \\ 3x - (x - 2) & = & 2 \quad (3) \\ 3x - x + 2 & = & 2 \quad - 2 \\ 2x & = & 0 \quad : 2 \\ x & = & 0 \quad (\text{nicht im Bereich!}) \quad (2) \\ L_1 & = & \{ \} \quad (2) \end{array}$	$\begin{array}{lcl} \text{für } x < 2: & (4) & \\ 3x + (x - 2) & = & 2 \quad (3) \\ 3x + x - 2 & = & 2 \quad + 2 \\ 4x & = & 4 \quad : 4 \\ x & = & 1 \quad (2) \\ L_2 & = & \{1\} \quad (2) \end{array}$
---	---

$$L = L_2 = \{1\} \quad (1)$$

0.34 UNGLEICH-33

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Gleichung:

$$3x - |x - 4| = 4$$

Lösung

Da keine Brüche vorkommen ist: $D = \mathbb{R}$ (1)

Um den Betrag aufzulösen, ist eine Fallunterscheidung erforderlich, je nachdem, ob der **Betragsinhalt** positiv oder negativ ist.

$$3x - |x - 4| = 4$$

für $x \geq 4$:	für $x < 4$:
$3x - (x - 4) = 4$ (3)	$3x + (x - 4) = 4$ (3)
$3x - x + 4 = 4 \quad -4$	$3x + x - 4 = 4 \quad +4$
$2x = 0 \quad :2$	$4x = 8 \quad :4$
$x = 0$ (nicht im Bereich!) (2)	$x = 2$ (2)
$L_1 = \{ \}$ (2)	$L_2 = \{2\}$ (2)

$$L = L_2 = \{2\} \quad (1)$$

0.35 UNGLEICH-34

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Gleichung:

$$|3x - 6| = |x - 4|$$

Lösung

Da keine Brüche vorkommen ist: $D = \mathbb{R}$ (1)

Zwei unterschiedliche Beträge müssen aufgelöst werden. Das geht nicht gleichzeitig. Um den ersten Betrag aufzulösen, ist eine Fallunterscheidung erforderlich, je nachdem, ob der **Betragsinhalt** positiv oder negativ ist. Da für den zweiten Betrag eine weitere Fallunterscheidung erforderlich wird, werden aus Platzgründen die ersten Fälle nicht nebeneinander, sondern untereinander dargestellt.

$$11|3x - 6| = |x - 4|$$

$$\text{für } x \geq 2: \quad (1)$$

$$3x - 6 = |x - 4| \quad (1)$$

Jetzt ist zur Auflösung des rechten Betrages eine weitere Fallunterscheidung erforderlich.

$\begin{array}{lcl} \text{für } x \geq 4: & (1) & \\ 3x - 6 & = & x - 4 \quad +6 - x \quad (1) \\ 2x & = & 2 \quad :2 \\ x & = & 1 \quad (\text{nicht im Bereich!}) \quad (1) \\ L_1 & = & \{ \} \quad (1) \end{array}$	$\begin{array}{lcl} \text{für } x < 4: & (1) & \\ 3x - 6 & = & -x + 4 \quad +6 + x \quad (1) \\ 4x & = & 10 \quad :4 \\ x & = & 2,5 \quad (1) \\ L_2 & = & \{2, 5\} \quad (1) \end{array}$
---	--

$$\text{für } x < 2: \quad (1)$$

$$-3x + 6 = |x - 4| \quad (1)$$

Zur Auflösung des rechten Betrages ist auch hier ggf. eine weitere Fallunterscheidung erforderlich.

$\begin{array}{lcl} \text{für } x \geq 4: & (1) & \\ (\text{entfällt}) & & \\ L_3 & = & \{ \} \quad (1) \end{array}$	$\begin{array}{lcl} \text{für } x < 4: & (1) & \\ -3x + 6 & = & -x + 4 \quad -6 + x \quad (1) \\ -2x & = & -2 \quad :(-2) \\ x & = & 1 \quad (1) \\ L_4 & = & \{1\} \quad (1) \end{array}$
--	--

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 = \{1; 2, 5\} \quad (1)$$

0.36 UNGLEICH-35

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betrags-Gleichung:

$$|3x - 9| = |x - 9|$$

Lösung

Da keine Brüche vorkommen ist: $D = \mathbb{R}$ (1)

Zwei unterschiedliche Beträge müssen aufgelöst werden. Das geht nicht gleichzeitig. Um den ersten Betrag aufzulösen, ist eine Fallunterscheidung erforderlich, je nachdem, ob der **Betragsinhalt** positiv oder negativ ist. Da für den zweiten Betrag eine weitere Fallunterscheidung erforderlich wird, werden aus Platzgründen die ersten Fälle nicht nebeneinander, sondern untereinander dargestellt.

$$|3x - 9| = |x - 9|$$

$$\text{für } x \geq 3 : \quad (1)$$

$$3x - 9 = |x - 9| \quad (1)$$

Jetzt ist zur Auflösung des rechten Betrages eine weitere Fallunterscheidung erforderlich.

$\begin{array}{lcl} \text{für } x \geq 9 : & (1) & \\ 3x - 9 & = & x - 9 \quad + 9 - x \quad (1) \\ 2x & = & 0 \quad : 2 \\ x & = & 0 \quad (\text{nicht im Bereich!}) \quad (1) \\ L_1 & = & \{ \} \quad (1) \end{array}$	$\begin{array}{lcl} \text{für } x < 9 : & (1) & \\ 3x - 9 & = & -x + 9 \quad + 9 + x \quad (1) \\ 4x & = & 18 \quad : 4 \\ x & = & 4,5 \quad (1) \\ L_2 & = & \{4,5\} \quad (1) \end{array}$
--	--

$$\text{für } x < 3 : \quad (1)$$

$$-3x + 9 = |x - 9| \quad (1)$$

Zur Auflösung des rechten Betrages ist auch hier ggf. eine weitere Fallunterscheidung erforderlich.

$\begin{array}{lcl} \text{für } x \geq 9 : & (1) & \\ (\text{entfällt}) & & \\ L_3 & = & \{ \} \quad (1) \end{array}$	$\begin{array}{lcl} \text{für } x < 9 : & (1) & \\ -3x + 9 & = & -x + 9 \quad - 9 + x \quad (1) \\ -2x & = & 0 \quad : (-2) \\ x & = & 0 \quad (1) \\ L_4 & = & \{0\} \quad (1) \end{array}$
---	--

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 = \{0; 4, 5\} \quad (1)$$

0.37 UNGLEICH-36

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge der Betragsungleichung.

$$x \leq 4x - |27 - 6x|$$

Lösung

Da es keinerlei Rechenoperationen gibt, die den Definitionsbereich einschränken könnten (Brüche, Wurzeln o.ä.), ist der Definitionsbereich einfach:

$$D = \mathbb{R}$$

Um den Betrag aufzulösen, ist eine **Fallunterscheidung** erforderlich, denn wenn der **Betragsinhalt negativ** ist, dann muss beim Auflösen ein zusätzliches Minuszeichen davor gesetzt werden. Deshalb führe ich vorweg folgende **Nebenrechnung** durch, um den positiven Fall zu ermitteln.

$$\begin{aligned} 27 - 6x &\geq 0 & | -27 \\ -6x &\geq -27 & | : (-6) \\ x &\leq 4,5 \end{aligned}$$

Hiermit ergeben sich folgende unterschiedlichen zwei Fälle:

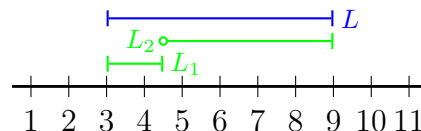
$$x \leq 4x - |27 - 6x|$$

für $x \leq 4,5$:	für $x > 4,5$:
$\begin{aligned} x &\leq 4x - (27 - 6x) \\ x &\leq 4x - 27 + 6x \\ x &\leq 10x - 27 & -10x \\ -9x &\leq -27 & : (-9) \\ x &\geq 3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x &\leq 4x + (27 - 6x) \\ x &\leq 4x + 27 - 6x \\ x &\leq -2x + 27 & +2x \\ 3x &\leq 27 & : 3 \\ x &\leq 9 \end{aligned}$

$L_1 = \{x | 3 \leq x \leq 4,5\}$

$L_2 = \{x | 4,5 < x \leq 9\}$

Beide Teillösungsmengen stoßen bei $x = 4,5$ aneinander und können daher zu einer Gesamtlösungsmenge zusammengefasst werden:



$$L = \{x | 3 \leq x \leq 9\}$$