

Musterlösungen der Aufgaben unter TRIGON.WT

Inhaltsverzeichnis

0.1	TRIGON-01	2
0.2	TRIGON-02	3
0.3	TRIGON-03	4
0.4	TRIGON-04	5
0.5	TRIGON-05	6
0.6	TRIGON-12	7
0.7	TRIGON-13	8
0.8	TRIGON-14	9
0.9	TRIGON-16	10
0.10	TRIGON-17	11
0.11	TRIGON-21	12
0.12	TRIGON-22	13
0.13	TRIGON-23	14
0.14	TRIGON-24	15
0.15	TRIGON-25	17
0.16	TRIGON-28	19
0.17	TRIGON-29	21
0.18	TRIGON-31	23
0.19	TRIGON-32	25

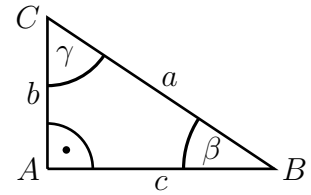
0.1 TRIGON-01

In nebenstehenden Rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel α als rechtem Winkel ist bekannt:

$$\beta = 36,9^\circ$$

$$c = 15 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Seiten a und b des Dreiecks!



Lösung:

$$\cos \beta = \frac{c}{a} \quad | \cdot \frac{a}{\cos \beta}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{c}{\cos \beta} \\ &= \frac{15 \text{ cm}}{\cos 36,9^\circ} \\ a &\approx 18,76 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} &= \tan \beta \quad | \cdot c \\ b &= c \cdot \tan \beta \\ &= 15 \text{ cm} \cdot \tan 36,9^\circ \\ b &\approx 11,26 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ergebnisse:

$$a \approx 18,76 \text{ cm}$$

$$b \approx 11,26 \text{ cm}$$

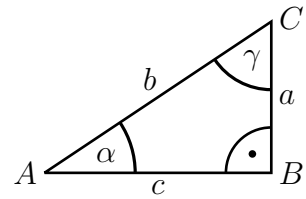
0.2 TRIGON-02

In nebenstehenden Rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel β als rechtem Winkel ist bekannt:

$$a = 11 \text{ cm}$$

$$b = 61 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Winkel α und γ sowie die Seite c des Dreiecks!



Lösung:

$$\sin \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \arcsin \frac{a}{b} \\ &= \arcsin \frac{11 \text{ cm}}{61 \text{ cm}} \\ \alpha &\approx 10,39^\circ\end{aligned}$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha \approx 180^\circ - 10,39^\circ = 169,61^\circ$$

$$\begin{aligned}a^2 + c^2 &= b^2 && | - a^2 \\ c^2 &= b^2 - a^2 && | \sqrt{} \\ c &= \sqrt{b^2 - a^2} \\ &= \sqrt{(61 \text{ cm})^2 - (11 \text{ cm})^2} \\ c &= 60 \text{ cm}\end{aligned}$$

Ergebnisse:

$$\alpha \approx 10,39^\circ$$

$$\gamma \approx 169,61^\circ$$

$$c = 60 \text{ cm}$$

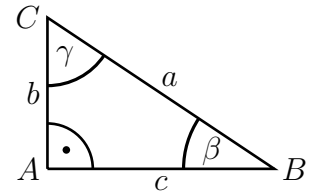
0.3 TRIGON-03

In nebenstehenden Rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel α als rechtem Winkel ist bekannt:

$$\beta = 36,9^\circ$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Seiten b und c des Dreiecks!



Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \sin \beta && | \cdot a \\ b &= a \cdot \sin \beta \\ &= 5 \text{ cm} \cdot \sin 36,9^\circ \\ b &= 3 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b^2 + c^2 &= a^2 && | - b^2 \\ c^2 &= a^2 - b^2 && | \sqrt{} \\ c &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ &= \sqrt{(5 \text{ cm})^2 - (3 \text{ cm})^2} \\ c &= 4 \text{ cm}\end{aligned}$$

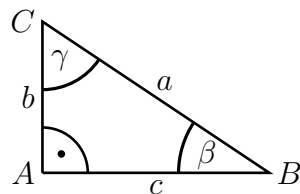
0.4 TRIGON-04

In nebenstehenden Rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel α als rechtem Winkel ist bekannt:

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$c = 4 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Seite b und die Winkel β und γ des Dreiecks!



Lösung: Die Seite b kann am einfachsten mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a^2 && | -c^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 && | \sqrt{} \\ b &= \sqrt{a^2 - c^2} \\ b &= \sqrt{(5 \text{ cm})^2 - (4 \text{ cm})^2} \\ b &= 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

Der Winkel γ kann über eine beliebige Winkelfunktion bestimmt werden, beispielsweise mit dem Sinus:

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{c}{a} && | \arcsin \dots \\ \gamma &= \arcsin \frac{c}{a} \\ \gamma &= \arcsin \frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \\ \gamma &\approx 53,13^\circ \end{aligned}$$

$$\beta = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 53,13^\circ = 36,87^\circ$$

Ergebnisse:

$$b = 3 \text{ cm}$$

$$\gamma \approx 53,13^\circ$$

$$\beta \approx 36,87^\circ$$

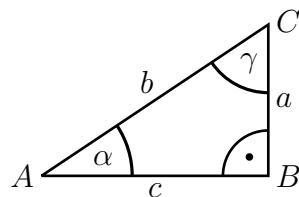
0.5 TRIGON-05

In nebenstehenden Rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel β als rechtem Winkel ist bekannt:

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$b = 13 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Seite c sowie die Winkel α und γ des Dreiecks!



Lösung: Die Seite c kann am einfachsten mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= b^2 && | -c^2 \\ c^2 &= b^2 - a^2 && | \sqrt{} \\ c &= \sqrt{b^2 - a^2} \\ c &= \sqrt{(13 \text{ cm})^2 - (5 \text{ cm})^2} \\ c &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

Der Winkel α kann über eine beliebige Winkelfunktion bestimmt werden, beispielsweise mit dem Sinus:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{b} && | \arcsin \dots \\ \alpha &= \arcsin \frac{a}{b} \\ \alpha &= \arcsin \frac{5 \text{ cm}}{13 \text{ cm}} \\ \alpha &\approx 22,62^\circ \end{aligned}$$

$$\gamma = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 22,62^\circ = 67,38^\circ$$

Ergebnisse:

$$c = 12 \text{ cm}$$

$$\alpha \approx 22,62^\circ$$

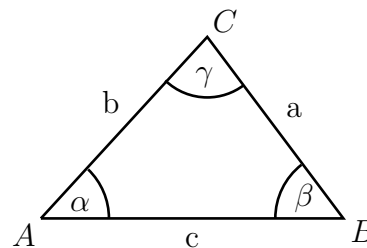
$$\gamma \approx 67,38^\circ$$

0.6 TRIGON-12

In dem allgemeinen Dreieck sind bekannt:

$$\begin{aligned}\beta &= 17,95^\circ \\ a &= 5,7 \text{ cm} \\ c &= 18,5 \text{ cm}\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die fehlende Dreiecksseite b und die Winkel α und γ !



Lösung: Da der Winkel β keiner der bekannten Seiten a und c gegenüberliegt, kann hier nur der **Kosinussatz** verwendet werden.

$$\begin{aligned}b^2 &= a^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \beta \\ b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \beta} \\ &= \sqrt{(5,7 \text{ cm})^2 + (18,5 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 5,7 \text{ cm} \cdot 18,5 \text{ cm} \cdot \cos 17,95^\circ} \\ b &\approx 13,19 \text{ cm}\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Winkels α kann der Sinussatz verwendet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{a}{b} & | \cdot \sin \beta \\ \sin \alpha &= \frac{a \cdot \sin \beta}{b} \\ \alpha &= \arcsin \frac{a \cdot \sin \beta}{b} \\ \alpha &\approx \arcsin \frac{5,7 \text{ cm} \cdot \sin 17,95^\circ}{13,19 \text{ cm}} \\ \alpha_1 &\approx 7,65^\circ\end{aligned}$$

Zu beachten ist hier, dass auch der Winkel $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 172,35^\circ$ den gleichen Sinuswert hat, als Lösung also in Frage kommt. Welcher Winkel ist nun der richtige?

An dieser Stelle kann eine einfache Überlegung helfen. Da $\beta = 17,95^\circ$ schon bekannt ist, wäre mit $\alpha_2 + \beta = 190,3^\circ$ zusammen bereits die Winkelsumme eines Dreieckes von 180° überschritten, für γ bliebe weniger als nichts übrig. Daher muss $\alpha_1 = 7,65^\circ$ der richtige Winkel sein. Alternativ kann α natürlich auch mit dem Kosinussatz bestimmt werden. Dann ist die Lösung eindeutig.

Der Winkel γ kann über die Winkelsumme im Dreieck bestimmt werden:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 17,95^\circ - 7,65^\circ = 154,4^\circ$$

Ergebnisse:

$$b \approx 13,19 \text{ cm}$$

$$\alpha \approx 7,65^\circ$$

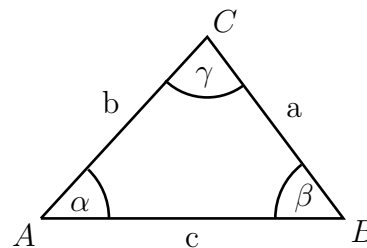
$$\gamma \approx 154,4^\circ$$

0.7 TRIGON-13

In dem allgemeinen Dreieck sind bekannt:

$$\begin{aligned}\beta &= 27,5^\circ \\ a &= 7,7 \text{ cm} \\ b &= 12,5 \text{ cm}\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die fehlende Dreiecksseite c sowie die Winkel α und γ !



Lösung: Man kann zunächst den Winkel α mit Hilfe des Sinussatzes bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{a}{b} && | \cdot \sin \beta \\ \sin \alpha &= \frac{a \cdot \sin \beta}{b} && | \arcsin \dots \\ \alpha &= \arcsin \frac{a \cdot \sin \beta}{b} \\ \alpha &= \arcsin \frac{7,7 \text{ cm} \cdot \sin 27,5^\circ}{12,5 \text{ cm}} \\ \alpha_1 &\approx 16,525^\circ\end{aligned}$$

Achtung! Da der gleiche Sinuswert auch zu einem Winkel von $\alpha_2 \approx 163,475^\circ$ gehört, kommt dieser Winkel zunächst auch als Lösung in Frage. Dann wäre die Summe aus α und β mit $190,975^\circ$ aber bereits größer, als die Winkelsumme im Dreieck von 180° . Daher kommt α_2 **nicht** als Lösung in Betracht.

Mit dem Lehrsatz zur Winkelsumme im Dreieck kann der Winkel γ bestimmt werden:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 180^\circ - 16,525^\circ - 27,5^\circ = 135,975^\circ$$

Die Seite c kann beispielsweise mit dem Sinussatz bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\frac{c}{b} &= \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} && | \cdot b \\ c &= \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} \\ c &\approx \frac{12,5 \text{ cm} \cdot \sin 135,975^\circ}{\sin 27,5^\circ} \\ c &\approx 18,813 \text{ cm}\end{aligned}$$

Ergebnisse:

$$\alpha \approx 16,525^\circ$$

$$\gamma \approx 135,975^\circ$$

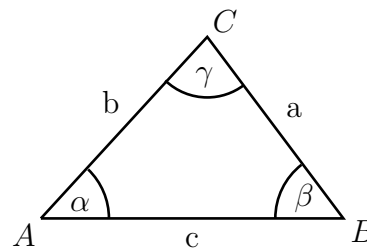
$$c \approx 18,813 \text{ cm}$$

0.8 TRIGON-14

In dem allgemeinen Dreieck sind bekannt:

$$\begin{aligned}\alpha &= 47,5^\circ \\ a &= 9,7 \text{ cm} \\ c &= 8,5 \text{ cm}\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die fehlende Dreiecksseite b sowie die Winkel β und γ !



Lösung: Man kann zunächst den Winkel γ mit Hilfe des Sinussatzes bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} &= \frac{c}{a} && | \cdot \sin \alpha \\ \sin \gamma &= \frac{c \cdot \sin \alpha}{a} && | \arcsin \dots \\ \gamma &= \arcsin \frac{c \cdot \sin \alpha}{a} \\ \gamma &= \arcsin \frac{8,5 \text{ cm} \cdot \sin 47,5^\circ}{9,7 \text{ cm}} \\ \gamma_1 &\approx 40,25^\circ\end{aligned}$$

Achtung! Da der gleiche Sinuswert auch zu einem Winkel von $\gamma_2 \approx 139,75^\circ$ gehört, kommt dieser Winkel zunächst auch als Lösung in Frage. Dann wäre die Summe aus α und γ mit $187,25^\circ$ aber bereits größer, als die Winkelsumme im Dreieck von 180° . Daher kommt γ_2 **nicht** als Lösung in Betracht.

Mit dem Lehrsatz zur Winkelsumme im Dreieck kann der Winkel β bestimmt werden:

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 180^\circ - 47,5^\circ - 40,25^\circ = 92,25^\circ$$

Die Seite b kann beispielsweise mit dem Sinussatz bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} && | \cdot a \\ b &= \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} \\ b &\approx \frac{9,7 \text{ cm} \cdot \sin 92,25^\circ}{\sin 47,5^\circ} \\ b &\approx 13,15 \text{ cm}\end{aligned}$$

Ergebnisse:

$$\beta \approx 92,25^\circ$$

$$\gamma \approx 40,25^\circ$$

$$b \approx 13,15 \text{ cm}$$

0.9 TRIGON-16

Ein symmetrischer Graben von 85 cm Tiefe ist unten 70 cm und oben 1,30 m breit. Um wieviel Grad weichen die Grabenwände von der Senkrechten ab? Fertigen Sie eine Skizze mit geeigneten Bezeichnungen an!

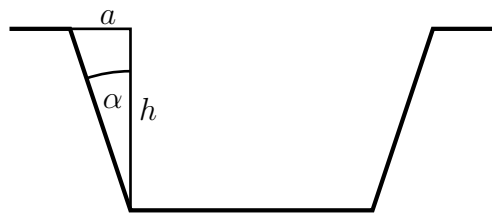


Lösung: Eingezeichnet in die nebenstehende Skizze ist der gesuchte Winkel α , die Grabentiefe $h = 85$ cm und die halbe Grabenbreitendifferenz a . Diese kann berechnet werden:

$$a = \frac{1}{2} \cdot (130 \text{ cm} - 70 \text{ cm}) = 30 \text{ cm}$$

Nun kann der Winkel α bestimmt werden:

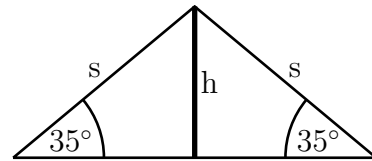
$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{a}{h} \\ \alpha &= \arctan \frac{a}{h} \\ \alpha &= \arctan \frac{30 \text{ cm}}{85 \text{ cm}} \\ \alpha &= 19,44^\circ\end{aligned}$$



Ergebnis: Die Grabenwände weichen um $19,44^\circ$ von der Senkrechten ab.

0.10 TRIGON-17

Ein Satteldach hat eine Neigung von 35° (gegenüber der Horizontalen gemessen). Wie lang sind die Dachschrägen s , wenn die Dachhöhe $h = 4,50 \text{ m}$ beträgt?



Lösung: Das gesamte Dach lässt sich in zwei Hälften mit je einem Rechtwinkligen Dreieck mit der Höhe h und der Dachschräge s aufteilen. Ein 35° -Winkel kommt in jedem dieser Dreiecke vor. In einem beliebigen Teildreieck kann man die Sinusfunktion aufstellen, mit deren Hilfe s berechnet werden kann.

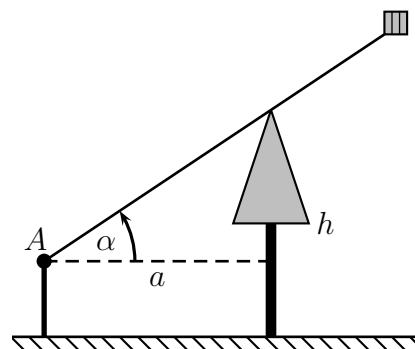
$$\begin{aligned}\sin 35^\circ &= \frac{h}{s} & | \cdot \frac{s}{\sin 35^\circ} \\ s &= \frac{h}{\sin 35^\circ} \\ &= \frac{4,50 \text{ m}}{\sin 35^\circ} \\ s &\approx 7,85 \text{ m}\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Dachschrägen sind etwa 7,85 m lang.

0.11 TRIGON-21

Ein Fernsehsatellit steht in einem Winkel von $\alpha = 19^\circ$ über dem Horizont. Wie hoch darf ein Baum sein, der in 35 m Entfernung vom Aufstellpunkt A der Satellitenantenne (**auf einem Rohrmast 1 Meter über dem Erdboden**) im Wege steht?

Um wieviel Meter müsste der Abstand vom Aufstellpunkt der Antenne zum Baum vergrößert werden, wenn der Baum noch um 2 Meter wächst?



Lösung Teil 1: Zur Lösung benenne ich zunächst den Abstand zwischen Antenne und Baum mit a und die Gesamt-Höhe des Baumes mit h . In dem sich ergebenden rechtwinkligen Dreieck ist jedoch nicht die Gesamthöhe des Baumes wirksam, sondern nur $h - 1$ m. Jetzt kann die Definition des Tangens angewendet werden:

$$\begin{aligned} \frac{h - 1 \text{ m}}{a} &= \tan \alpha & | \cdot a \\ h - 1 \text{ m} &= a \cdot \tan \alpha & | + 1 \text{ m} \\ h &= a \cdot \tan \alpha + 1 \text{ m} \\ &= 35 \text{ m} \cdot \tan 19^\circ + 1 \text{ m} \\ h &\approx 13,05 \text{ m} \end{aligned}$$

Ergebnis: **Der Baum darf (maximal) 13,05 m hoch sein.**

Lösung Teil 2: Neue Höhe des Baumes:

$$h^* = h + 2 \text{ m} \approx 13,05 \text{ m} + 2 \text{ m} = 15,05 \text{ m}$$

Mit dieser Höhe h^* und dem unveränderten Winkel $\alpha = 19^\circ$ kann der neue Abstand a^* über die Definition des Tangens von α bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{h^* - 1 \text{ m}}{a^*} & | \cdot \frac{a^*}{\tan \alpha} \\ a^* &= \frac{h^* - 1 \text{ m}}{\tan \alpha} \\ a^* &\approx \frac{15,05 \text{ m} - 1 \text{ m}}{\tan 19^\circ} \\ a^* &\approx 40,80 \text{ m} \end{aligned}$$

Die **Vergrößerung** der Entfernung ist die Differenz aus der neuen und der alten Entfernung:

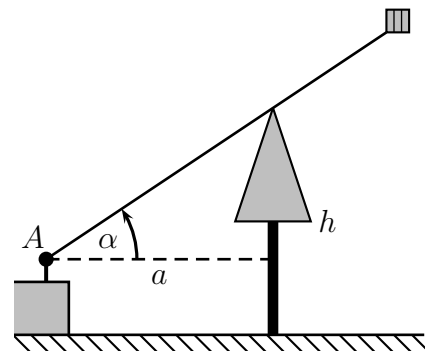
$$\Delta a = a^* - a \approx 40,80 \text{ m} - 35 \text{ m} = 5,80 \text{ m}$$

Ergebnis: **Der Abstand muss um (mindestens) 5,80 m vergrößert werden.**

0.12 TRIGON-22

Ein Fernsehsatellit steht in einem Winkel von $\alpha = 17^\circ$ über dem Horizont. Wie hoch darf ein Baum sein, der in 25 m Entfernung vom Aufstellpunkt A der Satellitenantenne (**auf einem Garagendach in 3 Meter Höhe dem Erdboden**) im Wege steht?

Um wieviel Meter müsste der Abstand vom Aufstellpunkt der Antenne zum Baum vergrößert werden, wenn der Baum noch um 2,5 Meter wächst?



Lösung Teil 1: Zur Lösung benenne ich zunächst den Abstand zwischen Antenne und Baum mit a und die Gesamt-Höhe des Baumes mit h . In dem sich ergebenden rechtwinkligen Dreieck ist jedoch nicht die Gesamthöhe des Baumes wirksam, sondern nur $h - 3$ m. Jetzt kann die Definition des Tangens angewendet werden:

$$\begin{aligned} \frac{h - 3 \text{ m}}{a} &= \tan \alpha & | \cdot a \\ h - 3 \text{ m} &= a \cdot \tan \alpha & | + 3 \text{ m} \\ h &= a \cdot \tan \alpha + 3 \text{ m} \\ &= 25 \text{ m} \cdot \tan 17^\circ + 3 \text{ m} \\ h &\approx 10,64 \text{ m} \end{aligned}$$

Ergebnis: **Der Baum darf (maximal) 10,64 m hoch sein.**

Lösung Teil 2: Neue Höhe des Baumes:

$$h^* = h + 2,5 \text{ m} \approx 10,64 \text{ m} + 2,5 \text{ m} = 13,14 \text{ m}$$

Mit dieser Höhe h^* und dem unveränderten Winkel $\alpha = 17^\circ$ kann der neue Abstand a^* über die Definition des Tangens von α bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{h^* - 3 \text{ m}}{a^*} & | \cdot \frac{a^*}{\tan \alpha} \\ a^* &= \frac{h^* - 3 \text{ m}}{\tan \alpha} \\ a^* &\approx \frac{13,14 \text{ m} - 3 \text{ m}}{\tan 17^\circ} \\ a^* &\approx 33,17 \text{ m} \end{aligned}$$

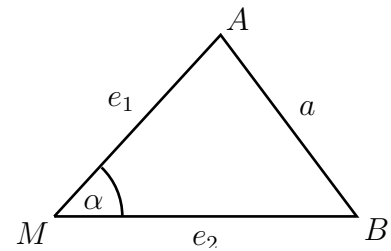
Die **Vergrößerung** der Entfernung ist die Differenz aus der neuen und der alten Entfernung:

$$\Delta a = a^* - a \approx 33,17 \text{ m} - 25 \text{ m} = 8,17 \text{ m}$$

Ergebnis: **Der Abstand muss um (mindestens) 8,17 m vergrößert werden.**

0.13 TRIGON-23

An den Punkten A und B stehen zwei Freileitungsmasten. Deren Abstand a soll bestimmt werden. Dazu wird von einem Messpunkt M aus der Winkel $\alpha = 38,3^\circ$ zwischen den Blickrichtungen zu A und B gemessen. Außerdem wird mit einem Lasergerät die Entfernung $e_1 = 85,2\text{ m}$ und $e_2 = 188\text{ m}$ zu den Masten A und B gemessen. Wie groß ist der Abstand a zwischen den Masten?



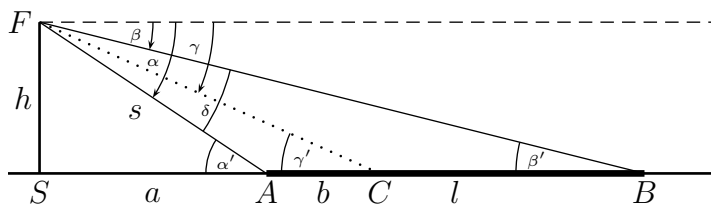
Lösung: Hier kommt der **Kosinussatz** zum Einsatz, da der bekannte Winkel **nicht** gegenüber einer bekannten Seite liegt.

$$\begin{aligned} a^2 &= e_1^2 + e_2^2 - 2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \cos \alpha && |\sqrt{} \\ a &= \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - 2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \cos \alpha} \\ a &= \sqrt{(85,2\text{ m})^2 + (188\text{ m})^2 - 2 \cdot 85,2\text{ m} \cdot 188\text{ m} \cdot \cos 38,3^\circ} \\ a &\approx 132,15\text{ m} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Masten haben voneinander einen Abstand von etwa 132,15 m.

0.14 TRIGON-24

Von einem Flugzeug F im Landeanflug erscheint der Anfang A einer 4 Kilometer langen Landebahn unter einem Neigungswinkel von $\alpha = 3,8^\circ$ und das Ende E der Landebahn unter einem Neigungswinkel von $\beta = 2,3^\circ$. (Der Neigungswinkel wird gegen die Horizontale gemessen.



- Welche Flugstrecke s („echte“ Flugstrecke, nicht deren Projektion auf den Boden) muss das Flugzeug noch zurücklegen, wenn es vom Punkt F gradlinig zum Anfangspunkt A der Landebahn weiterfliegt?
- Welche Höhe h hat das Flugzeug über dem Erdboden, wenn es sich noch im Punkt F befindet?
- Unter welchem Winkel γ muss das Flugzeug weiterfliegen, damit ihm nach dem Aufsetzen noch (mindestens) ein Bremsweg von 2800 m auf der Landebahn zur Verfügung steht?

Lösung: Zunächst werden noch vier wichtige Hilfswinkel (α' , δ , β' und γ') sowie die Länge l der Landebahn in der Skizze markiert.

zu a) Ich beginne im Dreieck $\triangle AFB$. Eine Seite ist bekannt, die Winkel δ und β' können bestimmt werden.

Da β und β' Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen darstellen, sind sie gleich:

$$\beta' = \beta = 2,3^\circ$$

$$\delta = \alpha - \beta = 3,8^\circ - 2,3^\circ = 1,5^\circ$$

Zur Bestimmung von s kann der **Sinussatz** angewendet werden:

$$\begin{aligned} \frac{s}{l} &= \frac{\sin \beta'}{\sin \delta} & | \cdot l \\ s &= \frac{l \cdot \sin \beta'}{\sin \delta} \\ &= \frac{4\,000 \text{ m} \cdot \sin 2,3^\circ}{\sin 1,5^\circ} \\ s &\approx 6\,132 \text{ m} \end{aligned}$$

Die gradlinige Flugstrecke bis zum Anfang der Landebahn beträgt: $s = 6\,132 \text{ m}$

zu b) Zur Bestimmung der Höhe h verwende ich das Dreieck $\triangle ASF$. Da dieses Dreieck **rechtwinklig** ist, kann sofort mit der Definition des Sinus von Winkel α' gearbeitet werden. Weil α und α' **Wechselwinkel** an geschnittenen Parallelen darstellen, gilt:

$$\alpha' = \alpha = 3,8^\circ$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{s} &= \sin \alpha' && | \cdot s \\ h &= s \cdot \sin \alpha' \\ h &\approx 6\,132 \text{ m} \cdot \sin 3,8^\circ \\ h &\approx 406,4 \text{ m} \end{aligned}$$

Die Höhe des Flugzeuges im Punkt F über dem Boden beträgt: $s \approx 406,4 \text{ m}$

zu c) Als Hilfsgröße wird zunächst die Strecke \overline{SA} bestimmt, die ich a nenne. Dafür verwende ich im Rechtwinkligen Dreieck $\triangle ASF$ den Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} a^2 + h^2 &= s^2 && | - h^2 \\ a^2 &= s^2 - h^2 && | \sqrt{} \\ a &= \sqrt{s^2 - h^2} \\ a &\approx \sqrt{(6\,132 \text{ m})^2 - (406,4 \text{ m})^2} \\ a &\approx 6\,119 \text{ m} \end{aligned}$$

Benötigt wird die Strecke $\overline{SC} = a + b$. Weil $b = 4\,000 \text{ m} - 2\,800 \text{ m} = 1\,200 \text{ m}$ ist, erhalten wir für die Strecke \overline{SC} :

$$a + b \approx 6\,119 \text{ m} + 1\,200 \text{ m} = 7\,319 \text{ m}$$

Zur weiteren Lösung verwende ich das Rechtwinklige Dreieck $\triangle CSF$. Da γ und γ' Wechselwinkel darstellen, sind sie gleich groß. Mit der Definition des Tangens kann γ' in diesem Dreieck bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \tan \gamma' &= \frac{h}{a + b} \\ \gamma' &= \arctan \frac{h}{a + b} \\ \gamma' &\approx \arctan \frac{406,4 \text{ m}}{7\,319 \text{ m}} \\ \gamma' &\approx 3,178^\circ \end{aligned}$$

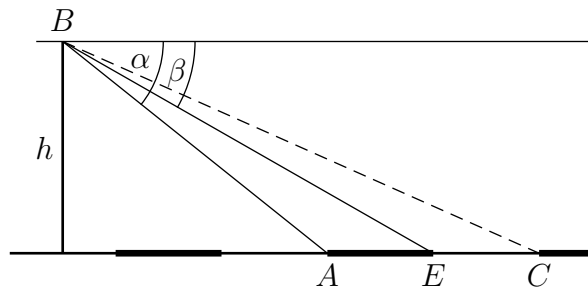
Damit nach dem Aufsetzen noch mindestens $2\,800 \text{ m}$ Bremsweg bleiben, beträgt der Landewinkel: $\gamma \approx 3,178^\circ$

0.15 TRIGON-25

Von einer Brücke über eine Autobahn werden Anfang A und Ende E eines 9 m langen Teilstriches der gestrichelten Fahrbahnmarkierung unter den Winkeln $\beta = 13,41^\circ$ und $\alpha = 15,87^\circ$ gegenüber der Horizontalen gemessen.

a) Wie hoch ist der Standort des Beobachters B über der Fahrbahn? (Höhe h)

b) Wie groß ist die gradlinige Entfernung zwischen dem Beobachter B und dem Anfang C des nächsten Striches, wenn auch die Abstände zwischen den Strichen 9 m betragen? (Länge der gestrichelten Linie)



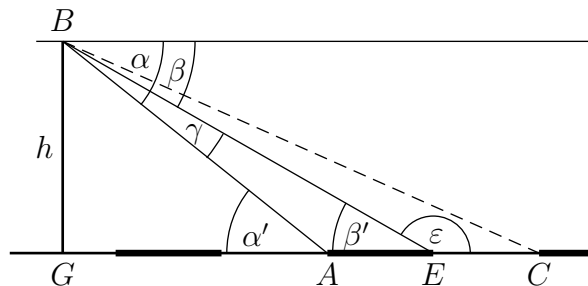
Lösung:

a) Zunächst werden zusätzlich einige Winkel bezeichnet. Es gilt:

$$\alpha' = \alpha \text{ und } \beta' = \beta$$

In beiden Fällen handelt es sich um Wechselwinkel. Weiterhin kann der Winkel γ berechnet werden:

$$\gamma = \alpha - \beta = 15,87^\circ - 13,41^\circ = 2,46^\circ$$



Damit sind im $\triangle ABE$ die Seite \overline{AE} sowie die Winkel γ und β' bekannt. Mithilfe des Sinussatzes kann die Seite \overline{AB} berechnet werden.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} &= \frac{\sin \beta'}{\sin \gamma} & | \cdot \overline{AE} \\ \overline{AB} &= \frac{\overline{AE} \cdot \sin \beta'}{\sin \gamma} \\ &= \frac{9 \text{ m} \cdot \sin 13,41^\circ}{\sin 2,46^\circ} \\ \overline{AB} &\approx 48,616 \text{ m} \end{aligned}$$

Hiermit kann im $\triangle ABG$ die Höhe h berechnet werden.

$$\begin{aligned} \frac{h}{\overline{AB}} &= \sin \alpha' & | \cdot \overline{AB} \\ h &= \overline{AB} \cdot \sin \alpha' \\ h &\approx 48,616 \text{ m} \cdot \sin 15,87^\circ \\ h &\approx 13,294 \text{ m} \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Beobachter B steht etwa 13,294 m über der Autobahn.

b) Wir benötigen die Strecke \overline{BE} . Damit kann dann im Dreieck $\triangle BEC$ die Strecke \overline{BC} bestimmt werden. Die Strecke \overline{BE} können wir im Dreieck $\triangle ABE$ bestimmen. Dazu kann man entweder zunächst den Winkel $\angle BAE$ bestimmen und dann mit dem Sinussatz die Strecke \overline{BE} . Man kann auch sofort mit den bekannten Größen die Strecke \overline{BE} mit dem Kosinussatz bestimmen. Hier ergibt sich jedoch eine Doppeldeutigkeit, weil der Winkel der **kleineren** Seite gegenüber liegt. Daher verwende ich erste Methode. Den Winkel $\angle BAE$ nenne ich δ .

$$\delta = 180^\circ - \alpha' = 180^\circ - 15,87^\circ = 164,13^\circ$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} &= \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} \quad | \cdot \overline{AE} \\ \overline{BE} &= \frac{\overline{AE} \cdot \sin \delta}{\sin \gamma} \\ \overline{BE} &= \frac{9 \text{ m} \cdot \sin 164,13^\circ}{\sin 2,46^\circ} \\ \overline{BE} &\approx 57,339 \text{ m} \end{aligned}$$

Der Winkel $\angle BEC$ – nennen wir ihn ε – ist der Ergänzungswinkel zu β' .

$$\varepsilon = 180^\circ - \beta' = 180^\circ - 13,41^\circ = 166,59^\circ$$

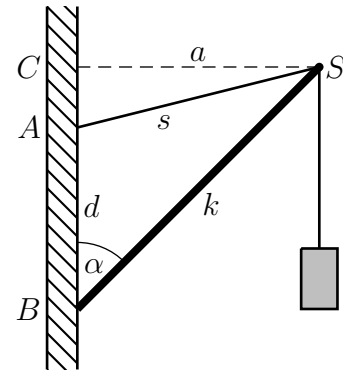
Im $\triangle BEC$ kann nun die gesuchte Strecke \overline{BC} mit Hilfe des Kosinussatzes bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 - 2 \cdot \overline{BE} \cdot \overline{EC} \cdot \cos \varepsilon \\ \overline{BC}^2 &\approx (57,339 \text{ m})^2 + (9 \text{ m})^2 - 2 \cdot 57,339 \text{ m} \cdot 9 \text{ m} \cdot \cos 166,59^\circ \\ \overline{BC} &\approx 66,127 \text{ m} \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Abstand \overline{BC} beträgt 66,127 m.

0.16 TRIGON-28

Mit einem Kranausleger mit der Länge $k = 12\text{ m}$ soll eine Last in einem Abstand von $a = 9,5\text{ m}$ von der Wand abgesetzt werden. Der Ausleger wird durch ein Spannseil mit der unbekannten Länge s gehalten. Das Spannseil ist im Punkt A in einer Entfernung von $d = 2\text{ m}$ oberhalb des Befestigungspunktes B des Auslegers an der Wand befestigt.



- Auf welchen Winkel α muss der Ausleger eingestellt werden?
- Welche Länge s muss das Spannseil haben?
- Um wieviele Zentimeter senkt sich die Last, wenn sich das Spannseil um 10 cm dehnt?

Lösung a) Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle CBS$ sind die Seiten a und k bekannt. Damit kann der Winkel α über die Sinusfunktion bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{k} && | \arcsin \dots \\ \alpha &= \arcsin \frac{a}{k} \\ &= \arcsin \frac{9,5\text{ m}}{12\text{ m}} \\ \alpha &\approx 52,34^\circ\end{aligned}$$

Ergebnis: Der Ausleger muss auf einem Winkel von $\alpha = 52,34^\circ$ eingestellt werden.

Lösung b) Im Dreieck $\triangle ABS$ sind zwei Seiten (k und d) sowie der eingeschlossene Winkel α bekannt. Damit kann mit Hilfe des Kosinussatzes die Seillänge s bestimmt werden.

$$\begin{aligned}s^2 &= k^2 + d^2 - 2 \cdot k \cdot d \cdot \cos \alpha && | \sqrt{} \\ s &= \sqrt{k^2 + d^2 - 2 \cdot k \cdot d \cdot \cos \alpha} \\ s &\approx \sqrt{(12\text{ m})^2 + (2\text{ m})^2 - 2 \cdot 12\text{ m} \cdot 2\text{ m} \cdot \cos 52,34^\circ} \\ s &\approx 10,894\text{ m}\end{aligned}$$

Ergebnis: Das Seil muss $s = 10,894\text{ m}$ lang sein.

Lösung c) Zunächst bestimme ich die Länge \overline{BC} , die ich b nenne:

$$\begin{aligned}\frac{b}{k} &= \cos \alpha && | \cdot k \\ b &= k \cdot \cos \alpha \\ b &\approx 12 \text{ m} \cdot \cos 52,34^\circ \\ b &\approx 7,332 \text{ m}\end{aligned}$$

Neue Seillänge:

$$s^* = s + \Delta s \approx 10,894 \text{ m} + 0,10 \text{ m} = 10,994 \text{ m}$$

Im veränderten Dreieck $\triangle ABS^*$ sind nur die drei Seiten a , k und s^* bekannt. Daher kann der veränderte Winkel α^* nur mit dem Kosinussatz bestimmt werden.

$$\begin{aligned}k^2 + d^2 - 2 \cdot k \cdot d \cdot \cos \alpha^* &= s^{*2} && | - k^2 - d^2 \\ -2 \cdot k \cdot d \cdot \cos \alpha^* &= s^{*2} - k^2 - d^2 && | : (-2kd) \\ \cos \alpha^* &= \frac{s^{*2} - k^2 - d^2}{-2 \cdot k \cdot d} && | \arccos \dots \\ \alpha^* &= \arccos \frac{s^{*2} - k^2 - d^2}{-2 \cdot k \cdot d} \\ \alpha^* &= \arccos \frac{(10,994 \text{ m})^2 - (12 \text{ m})^2 - (2 \text{ m})^2}{-2 \cdot 12 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}} \\ \alpha^* &\approx 55,58^\circ\end{aligned}$$

Mit diesem Winkel kann im Rechtwinkligen Dreieck $\triangle BC^*S^*$ die Strecke $\overline{BC^*}$ berechnet werden. Diese Strecke $\overline{BC^*}$ nenne ich b^* .

$$\begin{aligned}\frac{b^*}{k} &= \cos \alpha^* && | \cdot k \\ b^* &= k \cdot \cos \alpha^* \\ b^* &\approx 12 \text{ m} \cdot \cos 55,58^\circ \\ b^* &\approx 6,783 \text{ m}\end{aligned}$$

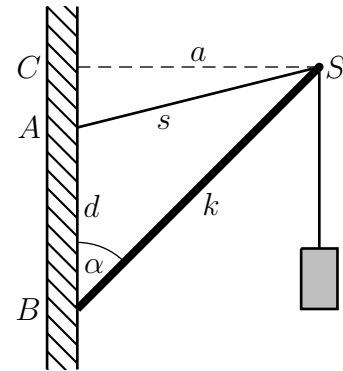
Die Veränderung der Höhe ist die Veränderung von b :

$$\Delta b = b - b^* = 7,332 \text{ m} - 6,783 \text{ m} = 54,9 \text{ cm}$$

Die Last senkt sich um: $\Delta b = 54,9 \text{ cm}$

0.17 TRIGON-29

Mit einem Kranausleger mit der Länge $k = 10\text{ m}$ soll eine Last in einem Abstand von $a = 8,2\text{ m}$ von der Wand abgesetzt werden. Der Ausleger wird durch ein Spannseil mit der unbekannten Länge s gehalten. Das Spannseil ist im Punkt A in einer Entfernung von $d = 2\text{ m}$ oberhalb des Befestigungspunktes B des Auslegers an der Wand befestigt.



- Auf welchen Winkel α muss der Ausleger eingestellt werden?
- Welche Länge s muss das Spannseil haben?
- Um wieviele Zentimeter senkt sich die Last, wenn sich das Spannseil um 10 cm dehnt?

Lösung:

Lösung a) Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle CBS$ sind die Seiten a und k bekannt. Damit kann der Winkel α über die Sinusfunktion bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{k} && | \arcsin \dots \\ \alpha &= \arcsin \frac{a}{k} \\ &= \arcsin \frac{8,2\text{ m}}{10\text{ m}} \\ \alpha &\approx 55,085^\circ\end{aligned}$$

Ergebnis: Der Ausleger muss auf auf einem Winkel von $\alpha = 55,085^\circ$ eingestellt werden.

Lösung b) Im Dreieck $\triangle ABS$ sind zwei Seiten (k und d) sowie der eingeschlossene Winkel α bekannt. Damit kann mit Hilfe des Kosinussatzes die Seillänge s bestimmt werden.

$$\begin{aligned}s^2 &= k^2 + d^2 - 2 \cdot k \cdot d \cdot \cos \alpha && | \sqrt{} \\ s &= \sqrt{k^2 + d^2 - 2 \cdot k \cdot d \cdot \cos \alpha} \\ s &\approx \sqrt{(10\text{ m})^2 + (2\text{ m})^2 - 2 \cdot 10\text{ m} \cdot 2\text{ m} \cdot \cos 55,085^\circ} \\ s &\approx 9,006\text{ m}\end{aligned}$$

Ergebnis: Das Seil muss $s = 9,006\text{ m}$ lang sein.

Lösung c) Zunächst bestimme ich die Länge \overline{BC} , die ich b nenne:

$$\begin{aligned}\frac{b}{k} &= \cos \alpha & | \cdot k \\ b &= k \cdot \cos \alpha \\ b &\approx 10 \text{ m} \cdot \cos 55,085^\circ \\ b &\approx 5,727 \text{ m}\end{aligned}$$

Neue Seillänge:

$$s^* = s + \Delta s \approx 9,006 \text{ m} + 0,10 \text{ m} = 9,106 \text{ m}$$

Im veränderten Dreieck $\triangle ABS^*$ sind nur die drei Seiten a , k und s^* bekannt. Daher kann der veränderte Winkel α^* nur mit dem Kosinussatz bestimmt werden.

$$\begin{aligned}k^2 + d^2 - 2 \cdot k \cdot d \cdot \cos \alpha^* &= s^{*2} & | - k^2 - d^2 \\ -2 \cdot k \cdot d \cdot \cos \alpha^* &= s^{*2} - k^2 - d^2 & | : (-2kd) \\ \cos \alpha^* &= \frac{s^{*2} - k^2 - d^2}{-2 \cdot k \cdot d} & | \arccos \dots \\ \alpha^* &= \arccos \frac{s^{*2} - k^2 - d^2}{-2 \cdot k \cdot d} \\ \alpha^* &= \arccos \frac{(9,106 \text{ m})^2 - (10 \text{ m})^2 - (2 \text{ m})^2}{-2 \cdot 10 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}} \\ \alpha^* &\approx 58,196^\circ\end{aligned}$$

Mit diesem Winkel kann im Rechtwinkligen Dreieck $\triangle BC^*S^*$ die Strecke $\overline{BC^*}$ berechnet werden. Diese Strecke $\overline{BC^*}$ nenne ich b^* .

$$\begin{aligned}\frac{b^*}{k} &= \cos \alpha^* & | \cdot k \\ b^* &= k \cdot \cos \alpha^* \\ b^* &\approx 10 \text{ m} \cdot \cos 58,196^\circ \\ b^* &\approx 5,270 \text{ m}\end{aligned}$$

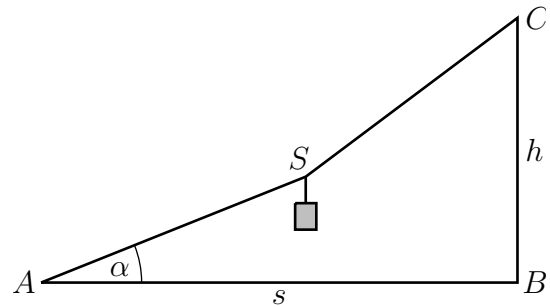
Die Veränderung der Höhe ich die Veränderung von b :

$$\Delta b = b - b^* = 5,727 \text{ m} - 5,270 \text{ m} = 45,7 \text{ cm}$$

Die Last senkt sich um: $\Delta b = 45,7 \text{ cm}$

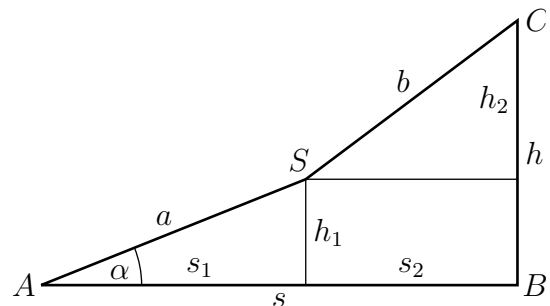
0.18 TRIGON-31

Eine Seilbahn überwindet auf einer waagerechten Strecke von $s = 120\text{ m}$ einen Höhenunterschied von $h = 50\text{ m}$. Wenn die Seilbahngondel S noch eine Entfernung von $\overline{AS} = 80\text{ m}$ vom Beobachter A an der Talstation der Seilbahn hat, ergibt sich ein Sehwinkel von $\alpha = 16,97^\circ$. Wie groß ist die gesamte Seillänge? (Gehen Sie dabei davon aus, dass das Seil zwischen A und S bzw. zwischen S und C näherungsweise eine gerade Linie darstellt. **Dies gilt jedoch nicht für das gesamte Seil, bei S ist ein Knick!**)



Lösung: Zur Lösung trage ich in die Skizze zwei rechtwinklige Dreiecke ein. Alle Längen, die von Belang sind, werden mit Buchstaben gekennzeichnet.

Im Dreieck unten links sind $a = \overline{AS}$ und α bekannt. Damit kann die Teilhöhe h_1 berechnet werden.



$$\begin{aligned}\frac{h_1}{a} &= \sin \alpha && | \cdot a \\ h_1 &= a \cdot \sin \alpha \\ &= 80\text{ m} \cdot \sin 16,97^\circ \\ h_1 &\approx 23,35\text{ m}\end{aligned}$$

Auch die Strecke s_1 wird für die weiteren Berechnungen benötigt.

$$\begin{aligned}\frac{s_1}{a} &= \cos \alpha && | \cdot a \\ s_1 &= a \cdot \cos \alpha \\ &= 80\text{ m} \cdot \cos 16,97^\circ \\ s_1 &\approx 76,52\text{ m}\end{aligned}$$

$$h_2 = h - h_1 \approx 50\text{ m} - 23,35\text{ m} = 26,65\text{ m}$$

$$s_2 = s - s_1 \approx 120\text{ m} - 76,52\text{ m} = 43,48\text{ m}$$

Im rechten Dreieck oben kann nun mit dem Satz des Pythagoras die Strecke b bestimmt werden.

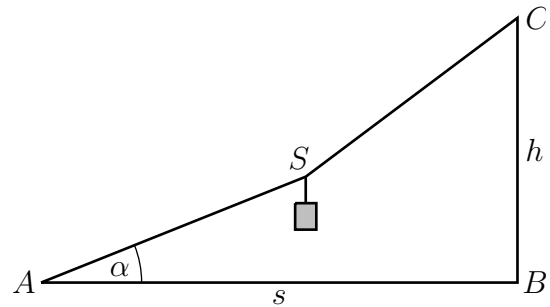
$$\begin{aligned}
 b^2 &= s_2^2 + h_2^2 && | \sqrt{} \\
 b &= \sqrt{s_2^2 + h_2^2} \\
 b &\approx \sqrt{(26,65 \text{ m})^2 + (43,48 \text{ m})^2} \\
 b &\approx 50,997 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$l = a + b \approx 80 \text{ m} + 50,997 \text{ m} = 130,997 \text{ m}$$

Die gesamte Seillänge ist: $l \approx 131 \text{ m}$

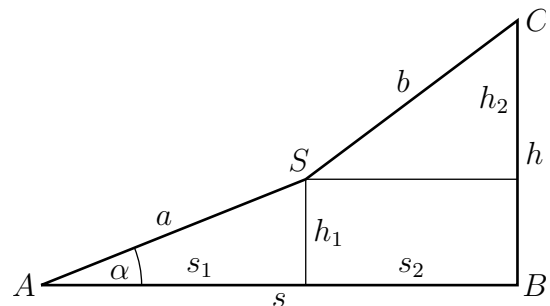
0.19 TRIGON-32

Eine Seilbahn überwindet auf einer waagerechten Strecke von $s = 144 \text{ m}$ einen Höhenunterschied von $h = 60 \text{ m}$. Wenn die Seilbahngondel S noch eine Entfernung von $\overline{AS} = 96 \text{ m}$ vom Beobachter A an der Talstation der Seilbahn hat, ergibt sich ein Sehwinkel von $\alpha = 16,97^\circ$. Wie groß ist die gesamte Seillänge? (Gehen Sie dabei davon aus, dass das Seil zwischen A und S bzw. zwischen S und C näherungsweise eine gerade Linie darstellt. **Dies gilt jedoch nicht für das gesamte Seil, bei S ist ein Knick!**)



Lösung: Zur Lösung trage ich in die Skizze zwei rechtwinklige Dreiecke ein. Alle Längen, die von Belang sind, werden mit Buchstaben gekennzeichnet.

Im Dreieck unten links sind $a = \overline{AS}$ und α bekannt. Damit kann die Teilhöhe h_1 berechnet werden.



$$\begin{aligned} \frac{h_1}{a} &= \sin \alpha && | \cdot a \\ h_1 &= a \cdot \sin \alpha \\ &= 96 \text{ m} \cdot \sin 16,97^\circ \\ h_1 &\approx 28,02 \text{ m} \end{aligned}$$

Auch die Strecke s_1 wird für die weiteren Berechnungen benötigt.

$$\begin{aligned} \frac{s_1}{a} &= \cos \alpha && | \cdot a \\ s_1 &= a \cdot \cos \alpha \\ &= 96 \text{ m} \cdot \cos 16,97^\circ \\ s_1 &\approx 91,82 \text{ m} \end{aligned}$$

$$h_2 = h - h_1 \approx 60 \text{ m} - 28,02 \text{ m} = 31,98 \text{ m}$$

$$s_2 = s - s_1 \approx 144 \text{ m} - 91,82 \text{ m} = 52,18 \text{ m}$$

Im rechten Dreieck oben kann nun mit dem Satz des Pythagoras die Strecke b bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 b^2 &= s_2^2 + h_2^2 && |\sqrt{} \\
 b &= \sqrt{s_2^2 + h_2^2} \\
 b &\approx \sqrt{(31,98 \text{ m})^2 + (52,18 \text{ m})^2} \\
 b &\approx 61,20 \text{ m}
 \end{aligned}$$

$$l = a + b \approx 96 \text{ m} + 61,20 \text{ m} = 157,20 \text{ m}$$

Die gesamte Seillänge ist: $l \approx 157,20 \text{ m}$