

Inhaltsverzeichnis

1	Verschiebungen	2
1.1	Ohne Hilfsmittel	2
1.1.1	Aufgabe 1	2
1.1.2	Aufgabe 2	3
1.1.3	Aufgabe 3	4
1.1.4	Aufgabe 4	5
1.1.5	Aufgabe 5	5
1.2	Mit Hilfsmittel	6
1.2.1	Aufgabe 6	6
1.2.2	Aufgabe 7	8
1.2.3	Aufgabe 8	9
1.2.4	Aufgabe 9	11
1.2.5	Aufgabe 10	13
2	Stauchung/Dehnung	14
2.1	Ohne Hilfsmittel	14
2.1.1	Aufgabe 11	14
2.1.2	Aufgabe 12	14
2.1.3	Aufgabe 13	16
2.1.4	Aufgabe 14	18
2.1.5	Aufgabe 15	19
2.2	Mit Hilfsmittel	19
2.2.1	Aufgabe 16	19
2.2.2	Aufgabe 17	19
3	Spiegelungen	20
3.1	Ohne Hilfsmittel	20
3.1.1	Aufgabe 21	20
3.1.2	Aufgabe 22	21
3.1.3	Aufgabe 23	22
3.1.4	Aufgabe 24	23
3.1.5	Aufgabe 25	24
3.2	Mit Hilfsmittel	25
3.2.1	Aufgabe 26	25
3.2.2	Aufgabe 27	27
3.2.3	Aufgabe 28	29

1 Verschiebungen

1.1 Ohne Hilfsmittel

1.1.1 Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Der Funktionsgraph soll um zwei Einheiten nach rechts und um eine Einheit nach oben verschoben werden. Geben Sie eine geeignete Funktionsgleichung für die dabei entstandene Funktion g an und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich in Normalform.

Lösung:

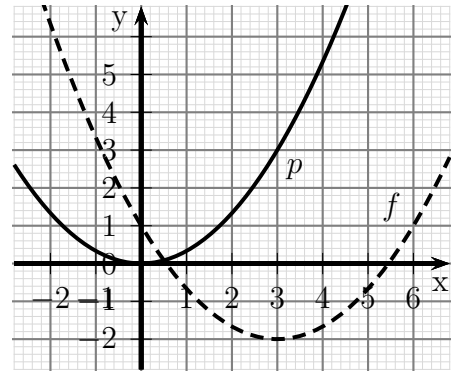
$$\begin{aligned} g(x) &= f(x - 2) + 1 \\ &= (x - 2)^3 - 3 \cdot (x - 2) + 1 \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 3x + 6 + 1 \\ g(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \end{aligned}$$

1.1.2 Aufgabe 2

Nebenstehend ist die Parabel p mit der Funktionsgleichung

$$p(x) = \frac{1}{3}x^2$$

dargestellt. Daneben ist (gestrichelt) der Verlauf einer Funktion f dargestellt, die aus p durch eine einfache Transformation hervorgegangen ist. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung an. (5 P.)



Lösung: Aus dem nebenstehenden Diagramm ist erkennbar, dass der Funktionsgraph von p um 3 Einheiten nach rechts und um 2 Einheiten nach unten verschoben wurde, um den Funktionsgraphen von f zu erhalten. Daher kann die Verschiebformel angewendet werden.¹

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x-3) - 2 \\ f(x) &= \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 - 2 \quad (5) \end{aligned}$$

Das ist bereits die Lösung. Wer mag, kann das Ergebnis natürlich noch etwas vereinfachen; verlangt ist das aber nicht.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 6x + 9) - 2 \\ &= \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 - 2 \\ f(x) &= \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

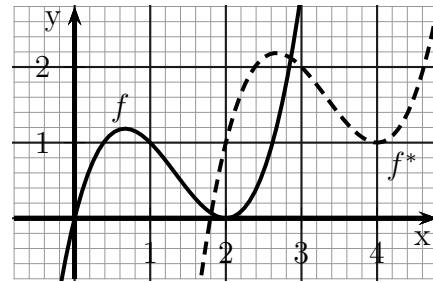
¹Dieser Text gehört nicht zur eigentlichen Lösung, er soll die Lösung nur besser nachvollziehbar machen.

1.1.3 Aufgabe 3

Nebenstehend ist der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

dargestellt. Daneben ist (gestrichelt) der Verlauf einer Funktion f^* dargestellt, die aus f durch eine **Verschiebung** hervorgegangen ist. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung an. (5 P.)



Lösung: Aus den Funktionsgraphen kann man erkennen, dass hier eine Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach oben stattgefunden hat.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x - 2) + 1 \\ f^*(x) &= (x - 2)^3 - 4 \cdot (x - 2)^2 + 4 \cdot (x - 2) + 1 \end{aligned}$$

Als Lösung reicht das bereits vollkommen aus, eine Vereinfachung ist nicht verlangt. Wer das trotzdem machen möchte, findet hier die Lösung.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= (x - 2)^3 - 4 \cdot (x - 2)^2 + 4 \cdot (x - 2) + 1 \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 4 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 4x - 8 + 1 \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 4x^2 + 16x - 16 + 4x - 8 + 1 \\ f^*(x) &= x^3 - 10x^2 + 32x - 31 \end{aligned}$$

1.1.4 Aufgabe 4

1.1.5 Aufgabe 5

1.2 Mit Hilfsmittel

1.2.1 Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$$

Gesucht ist die Funktion g , die durch eine Verschiebung des Funktionsgraphen von f entstanden ist. Der Hochpunkt der Funktion g liegt bei $H(2|4)$. Berechnen Sie die Funktionsgleichung $g(x)$.

Lösung: Zunächst muss der Hochpunkt von f gesucht werden.² Notwendige Bedingung dafür ist, dass $f'(x) = 0$ ist.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 12x^2 + 18x \\ f'(x) &= 6x^2 - 24x + 18 \\ f'(x_E) &= 0 \\ 6x_E^2 - 24x_E + 18 &= 0 & | :6 \\ x_E^2 - 4x_E + 3 &= 0 & | (p-q\text{-Formel anwenden}) \\ x_{E1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ &= 2 \pm 1 \\ x_{E1} &= 1 & x_{E2} &= 3 \end{aligned}$$

Jetzt muss geprüft werden, ob bei x_{E1} oder bei x_{E2} ein Hochpunkt vorliegt. Das kann z. B. mit dem Vorzeichenkriterium geschehen.

Untersuchung für $x_{E1} = 1$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 6 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 18 = 18 > 0 \\ f'(2) &= 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 18 = -6 < 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $- \Rightarrow$ Hochpunkt bei $x_{E1} = 1$

Untersuchung für $x_{E2} = 3$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 18 = -6 < 0 \\ f'(4) &= 6 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 18 = 18 > 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E2} = 3$

Da der (einzige) Hochpunkt bei $x_{E1} = 1$ liegt, muss hierzu noch der y -Wert bestimmt werden.

²Details dazu siehe hier in Kap. 3.3: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf>

$$\begin{aligned}
y_{E1} &= f(x_{E1}) \\
&= 2x_{E1}^3 - 12x_{E1}^2 + 18x_{E1} \\
&= 2 \cdot 1 - 12 \cdot 1 + 18 \cdot 1 \\
y_{E1} &= 8
\end{aligned}$$

Der Funktionsgraph muss nun so verschoben werden, dass der alte Hochpunkt bei $H^*(1|8)$ auf den neuen Hochpunkt $H(2|4)$ verschoben wird. Das sind eine Einheit nach rechts und 4 Einheiten nach unten. Die Verschiebformel kommt zum Einsatz.

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(x - 1) - 4 \\
g(x) &= 2(x - 1)^3 - 12(x - 1)^2 + 18(x - 1) - 4
\end{aligned}$$

Das ist die gesuchte Funktionsgleichung. Damit ist die Aufgabe gelöst. Wer mag, kann die Funktionsgleichung noch vereinfachen, was aber nicht verlangt ist.

$$\begin{aligned}
g(x) &= 2(x - 1)^3 - 12(x - 1)^2 + 18(x - 1) - 4 \\
&= 2 \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 12 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 18x - 18 - 4 \\
&= 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 - 12x^2 + 24x - 4 + 18x - 18 - 4 \\
g(x) &= 2x^3 - 18x^2 + 48x - 28
\end{aligned}$$

1.2.2 Aufgabe 7

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{20}{3}$$

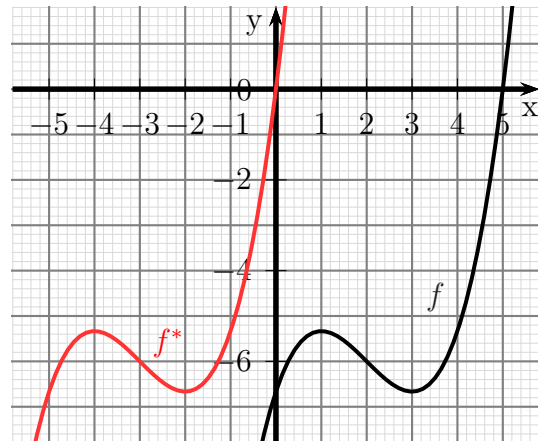
Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f^* , deren Funktionsgraph durch eine horizontale Verschiebung des Funktionsgraphen von f entstanden ist und durch den Koordinatenursprung verläuft. Wandeln Sie die Funktionsgleichung von $f^*(x)$ ggf. in die **Normalform** um. (15 P.)

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionen f und f^* dargestellt. Dies dient nur zur persönlichen Orientierung, die Skizze gehört nicht zur verlangten Lösung!

Zunächst müssen die Nullstellen der Funktion f ermittelt werden. Der GTR liefert als einzige Nullstelle:

$$x_0 = 5 \quad (5)$$

Dieser Punkt soll bei der Verschiebung auf $(0|0)$ zu liegen kommen. Der Funktionsgraph muss demnach um 5 Einheiten nach links verschoben werden.



$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x - (-5)) \\ &= f(x + 5) \\ &= \frac{1}{3}(x + 5)^3 - 2(x + 5)^2 + 3(x + 5) - \frac{20}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 15x^2 + 75x + 125) - 2 \cdot (x^2 + 10x + 25) + 3x + 15 - \frac{20}{3} \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 25x + \frac{125}{3} - 2x^2 - 20x - 50 + 3x + 15 - \frac{20}{3} \\ f^*(x) &= \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \end{aligned} \quad (5)$$

Ergebnis: Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f^*(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x$

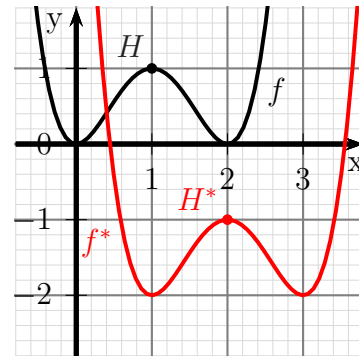
1.2.3 Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

Berechnen Sie die Funktionsgleichung einer Funktion f^* , die einen Hochpunkt im Punkt $H^*(2|-1)$ hat und ausschließlich durch eine **Verschiebung** des Funktionsgraphen von f entstanden ist. Vereinfachen Sie den Funktionsterm $f^*(x)$ so weit wie möglich. (20 P.)

Lösung: Nebstehend sind die Funktionen f und f^* dargestellt. Dies dient nur zur persönlichen Orientierung, die Skizze gehört nicht zur verlangten Lösung!



Zunächst müssen alle Hochpunkte von f bestimmt werden. Notwendige Bedingung für Hochpunkte ist das Nullwerden der Ableitung.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 8x \\ 0 &= 4x_E^3 - 12x_E^2 + 8x_E \quad (1) \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichung können durch Ausklammern von x_E und anschließende Anwendung der p - q -Formel bestimmt werden. Es kann aber auch der GTR verwendet werden. Man erhält:

$$x_{E1} = 0 \quad x_{E2} = 1 \quad x_{E3} = 2 \quad (2)$$

Mit Hilfe des **Vorzeichenwechselkriteriums**³ der ersten Ableitung (oder auch mit der 2. Ableitung⁴) kann geprüft werden, was an der jeweilige Stelle vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 0$:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) = -24 < 0 \\ f'(0,5) &= 4 \cdot 0,5^3 - 12 \cdot 0,5^2 + 8 \cdot 0,5 = 1,5 > 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E1} = 0$ (1)

Untersuchung für $x_{E2} = 1$:

$$\begin{aligned} f'(0,5) &= 4 \cdot 0,5^3 - 12 \cdot 0,5^2 + 8 \cdot 0,5 = 1,5 > 0 \\ f'(1,5) &= 4 \cdot 1,5^3 - 12 \cdot 1,5^2 + 8 \cdot 1,5 = -1,5 < 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ \Rightarrow Hochpunkt bei $x_{E2} = 1$ (1)

Untersuchung für $x_{E3} = 2$:

$$\begin{aligned} f'(1,5) &= 4 \cdot 1,5^3 - 12 \cdot 1,5^2 + 8 \cdot 1,5 = -1,5 < 0 \\ f'(3) &= 4 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 24 > 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E3} = 2$ (1)

³Einzelheiten dazu siehe hier in Kapitel 3.5: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf>

⁴Dieses Kriterium haben wir noch nicht benutzt.

Der einzige Hochpunkt liegt bei $x_{E2} = 1$. Der zugehörige y -Wert wird benötigt.

$$\begin{aligned} y_{E2} &= f(x_{E2}) \\ &= x_{E2}^4 - 4x_{E2}^3 + 4x_{E2}^2 \\ &= 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \\ y_{E2} &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Der Hochpunkt lautet: $H(1|1)$. Er soll nach $H^*(2|-1)$ verschoben werden. Das bedeutet eine Verschiebung um **1 Einheit nach rechts** und **2 Einheiten nach unten**. Die Verschiebformel kann angewendet werden. (2)

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x-1) - 2 \\ &= ((x-1)^4 - 4(x-1)^3 + 4(x-1)^2) - 2 \\ &= (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - 4 \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x + 1) + 4 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 2 \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - 4x^3 + 12x^2 - 12x + 4 + 4x^2 - 8x + 4 - 2 \\ f^*(x) &= x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 7 \end{aligned} \quad (5)$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f^*(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 7$ (5)

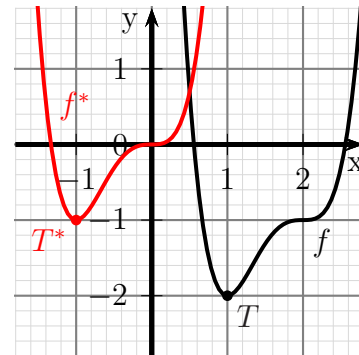
1.2.4 Aufgabe 9

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 48x + 15$$

Berechnen Sie die Funktionsgleichung einer Funktion f^* , die einen Tiefpunkt im Punkt $T^*(-1 | -1)$ hat und ausschließlich durch eine **Verschiebung** des Funktionsgraphen von f entstanden ist. Vereinfachen Sie den Funktionsterm $f^*(x)$ so weit wie möglich. (20 P.)

Lösung: Nebstehend sind die Funktionen f und f^* dargestellt. Dies dient nur zur persönlichen Orientierung, die Skizze gehört nicht zur verlangten Lösung!



Notwendige Bedingung für einen Tiefpunkt ist das Nullwerden der Ableitung.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 48x + 15 \\ f'(x) &= 12x^3 - 60x^2 + 96x - 48 \\ f'(x_E) &= 0 \\ 0 &= 12x_E^3 - 60x_E^2 + 96x_E - 48 \quad (2) \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichung können mit dem GTR bestimmt werden.⁵ Man erhält:

$$x_{E1} = 2 \quad x_{E2} = 1 \quad (2)$$

Mit Hilfe des **Vorzeichenwechselkriteriums**⁶ der ersten Ableitung kann geprüft werden, was an der jeweilige Stelle vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 2$:

$$\begin{aligned} f'(1,5) &= 12 \cdot 1,5^3 - 60 \cdot 1,5^2 + 96 \cdot 1,5 - 48 = 1,5 > 0 \\ f'(3) &= 12 \cdot 3^3 - 60 \cdot 3^2 + 96 \cdot 3 - 48 = 24 > 0 \end{aligned}$$

Kein Vorzeichenwechsel \Rightarrow Sattelpunkt bei $x_{E1} = 2$ (1)

Untersuchung für $x_{E2} = 1$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 12 \cdot 0^3 - 60 \cdot 0^2 + 96 \cdot 0 - 48 = -48 < 0 \\ f'(1,5) &= 12 \cdot 1,5^3 - 60 \cdot 1,5^2 + 96 \cdot 1,5 - 48 = 1,5 > 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E2} = 1$ (1)

⁵Andere Lösungsmöglichkeiten siehe beispielsweise hier in Kapitel 3.2:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/nullst.pdf>

⁶Einzelheiten dazu siehe hier in Kapitel 3.5: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf>

Der einzige Tiefpunkt liegt bei $x_{E2} = 1$. Der zugehörige y -Wert wird benötigt.

$$\begin{aligned}
 y_{E2} &= f(x_{E2}) \\
 &= 3x_{E2}^4 - 20x_{E2}^3 + 48x_{E2}^2 - 48x_{E2} + 15 \\
 &= 3 \cdot 1^4 - 20 \cdot 1^3 + 48 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 15 \\
 y_{E2} &= -2
 \end{aligned} \tag{2}$$

Der Tiefpunkt lautet: $T(1|-2)$. Er soll nach $T^*(-1|-1)$ verschoben werden. Das bedeutet eine Verschiebung um **2 Einheiten nach links** und **1 Einheit nach oben**. Die Verschiebformel kann angewendet werden. (2)

$$\begin{aligned}
 f^*(x) &= f(x+2) - 1 \\
 &= (3(x+2)^4 - 20(x+2)^3 + 48(x+2)^2 - 48(x+2) + 15) + 1 \\
 &= 3 \cdot (x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) - 20 \cdot (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + \dots \\
 &\quad \dots + 48 \cdot (x^2 + 4x + 4) - 48x - 96 + 15 \\
 &= 3x^4 + 24x^3 + 72x^2 + 96x + 48 - 20x^3 - 120x^2 - 240x - 160 + \dots \\
 &\quad \dots + 48x^2 + 192x + 192 - 48x - 96 + 16 \\
 f^*(x) &= 3x^4 + 4x^3
 \end{aligned} \tag{5}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f^*(x) = 3x^4 + 4x^3$ (5)

1.2.5 Aufgabe 10

2 Stauchung/Dehnung

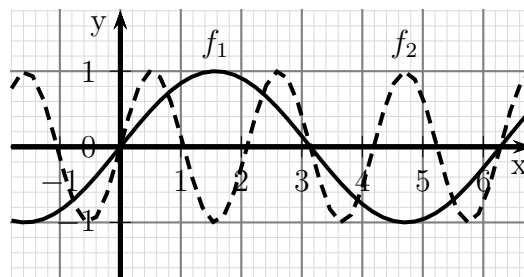
2.1 Ohne Hilfsmittel

2.1.1 Aufgabe 11

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Funktionsgleichung

$$f_1(x) = \sin x$$

wie nebenstehend dargestellt. Durch eine horizontale Stauchung soll daraus die gestrichelt dargestellte Funktion f_2 erzeugt werden. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_2(x)$ an.



Lösung: Im Diagramm ist erkennbar, dass der Funktionsgraph um den Faktor 3 horizontal gestaucht wurde. Daher lautet die Lösung für f_2 :

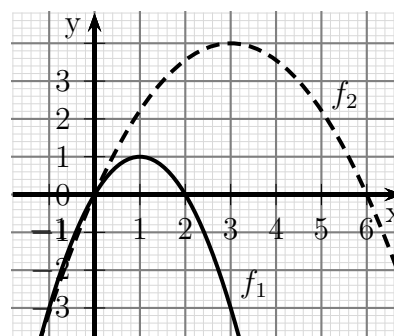
$$f_2(x) = \sin(3x)$$

2.1.2 Aufgabe 12

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Funktionsgleichung

$$f_1(x) = -x^2 + 2x$$

wie im nebenstehenden Diagramm dargestellt. Durch eine geeignete Transformation soll daraus die gestrichelt dargestellte Funktion f_2 werden. Geben Sie die Funktionsgleichung $f_2(x)$ an.



Lösung: Aus dem Diagramm kann man entnehmen, dass eine horizontale Dehnung um den Faktor 3 und eine vertikale Dehnung um den Faktor 4 vorgenommen wurde. Das kann auf die Stauchungs-/Dehnungsformel⁷ angewendet werden.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 4 \cdot f_1\left(\frac{1}{3}x\right) \\ f_2(x) &= 4 \cdot \left(-\left(\frac{1}{3}x\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) \right) \end{aligned}$$

⁷Details dazu siehe hier in Kap. 4.3: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/transformation.pdf>

Das Ergebnis kann natürlich noch vereinfacht werden, das ist aber nicht verlangt. Möchte man das trotzdem machen, sieht das so aus:

$$\begin{aligned}f_2(x) &= 4 \cdot \left(- \left(\frac{1}{3}x \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}x \right) \right) \\&= 4 \cdot \left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x \right) \\f_2(x) &= -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x\end{aligned}$$

2.1.3 Aufgabe 13

Die Quadratische Funktion f mit der Funktionsgleichung

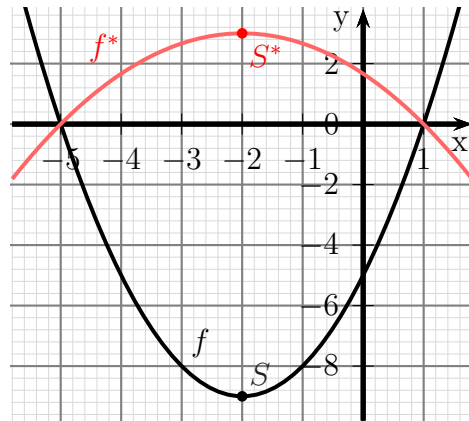
$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

soll durch eine Stauchung/Dehnung so transformiert werden, dass ihr Scheitelpunkt auf der Höhe $y_S^* = 3$ zu liegen kommt. Die Nullstellen sowie der x -Wert des Scheitelpunktes bleiben dabei erhalten. Berechnen Sie die Gleichung der transformierten Funktion $f^*(x)$.
(10 P.)

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionen f und f^* dargestellt. Dies dient nur zur persönlichen Orientierung, die Skizze gehört nicht zur verlangten Lösung!

Da die Nullstellen erhalten bleiben, kommt als Transformation nur eine **vertikale** Dehnung/Stauchung in Frage.

Um den Dehnungsfaktor zu ermitteln wird der y -Wert des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$ von f benötigt. Dazu gibt es zwei mögliche Lösungsvarianten.



Variante 1: Man berechnet x_S über die Scheitelpunktformel und bestimmt mit diesem Wert dann y_S .

$$\begin{aligned} x_S &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \\ x_S &= -2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y_S &= f(x_S) \\ &= x_S^2 + 4x_S - 5 \\ &= (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 \\ y_S &= -9 \end{aligned} \quad (2)$$

Variante 2: Man wandelt die Funktionsgleichung mit Hilfe einer Quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktform um und liest daran y_S ab.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x - 5 & | \text{Quadr. Ergänz.: } 2^2 \\ &= x^2 + 4x + 2^2 - 5 - 2^2 \\ f(x) &= (x + 2)^2 - 9 \end{aligned} \quad (3)$$

Das wird verglichen mit der Scheitelpunktform:

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

Man kann daraus ablesen: $y_S = -9$. (2)

Hier treffen sich beide Lösungswege wieder. Durch einen geeigneten Dehnungsfaktor k soll aus $y_S = -9$ ein $y_S^* = +3$ werden.

$$\begin{array}{rcl} y_S \cdot k & = & y_S^* \\ -9 \cdot k & = & 3 \quad | : (-9) \\ k & = & -\frac{1}{3} \quad (2) \end{array}$$

Hiermit kann die gesuchte Funktion f^* angegeben werden:

$$f^*(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x^2 + 4x - 5) \quad (3)$$

Wer mag, kann die Klammer noch auflösen, verlangt ist das aber nicht. Man erhält dann:

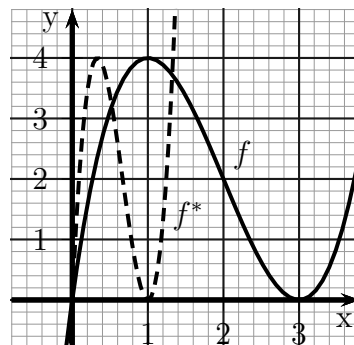
$$f^*(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

2.1.4 Aufgabe 14

Die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

und dem nebenstehenden Funktionsgraphen soll durch eine **horizontale** Stauchung/Dehnung so transformiert werden, dass dabei die Funktion f^* mit dem gestrichelt dargestellten Funktionsgraphen entsteht. Geben Sie die Funktionsgleichung $f^*(x)$ an. (5)



Lösung: Offensichtlich wurde die Funktion um den Faktor 3 gestaucht. Man erhält diese Funktionsgleichung:

$$f^*(x) = (3x)^3 - 6 \cdot (3x)^2 + 9 \cdot 3x$$

Wer mag, kann die Gleichung noch etwas vereinfachen. Verlangt ist das aber nicht. Man erhält dann:

$$f^*(x) = 27x^3 - 54x^2 + 27x$$

2.1.5 Aufgabe 15

2.2 Mit Hilfsmittel

2.2.1 Aufgabe 16

2.2.2 Aufgabe 17

3 Spiegelungen

3.1 Ohne Hilfsmittel

3.1.1 Aufgabe 21

Weisen Sie durch eine Rechnung nach, dass die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

durch eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = (x + 2)^3 - 3 \cdot (x + 2)$$

entstanden ist.

Lösung: Zur Lösung gibt es (mindestens) zwei mögliche Vorgehensweisen.

1. Man führt zunächst mit f die Spiegelung durch und wandelt anschließend die dabei entstandene Funktion g in die Normalform um.
2. Man wandelt zunächst die gegebene Funktion f in die Normalform um und führt anschließend die Spiegelung durch, um g zu erhalten.

Lösungsvariante 1:

$$\begin{aligned} g(x) &= -f(-x) \\ &= -((-x + 2)^3 - 3 \cdot (-x + 2)) \\ &= -(-x^3 + 6x^2 - 12x + 8 + 3x - 6) \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 3x + 6 \\ g(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 2)^3 - 3 \cdot (x + 2) \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 3x - 6 \\ f(x) &= x^3 + 6x^2 + 9x + 2 \\ g(x) &= -f(-x) \\ &= -((-x)^3 + 6 \cdot (-x)^2 + 9 \cdot (-x) + 2) \\ &= -(-x^3 + 6x^2 - 9x + 2) \\ g(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \end{aligned}$$

3.1.2 Aufgabe 22

Geben Sie an, ob die jeweilige Funktion

- **spiegelsymmetrisch** zur Ordinate (y -Achse)
- **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung
- **nicht symmetrisch**

ist.

$f(x)$	Symmetrie-Eigenschaft
$x^2 - 9$	
$x^3 - 15x$	
$16x^5 - 2x^3 + \frac{1}{x}$	
$5x^4 - 19x^2 + 3x - 1$	
$\frac{1}{x^2 + 1}$	
$\frac{3x}{2x^2 + 5}$	

Lösung:

$f(x)$	Symmetrie-Eigenschaft
$x^2 - 9$	spiegelsymmetrisch
$x^3 - 15x$	punktsymmetrisch
$16x^5 - 2x^3 + \frac{1}{x}$	punktsymmetrisch
$5x^4 - 19x^2 + 3x - 1$	nicht symmetrisch
$\frac{1}{x^2 + 1}$	spiegelsymmetrisch
$\frac{3x}{2x^2 + 5}$	punktsymmetrisch

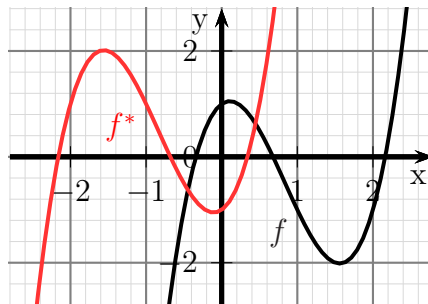
3.1.3 Aufgabe 23

Die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$$

soll am Koordinatenursprung gespiegelt werden. Dabei entsteht die Funktion f^* . Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung an und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. (5 P.)

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionen f und f^* dargestellt. Dies dient nur zur persönlichen Orientierung, die Skizze gehört nicht zur verlangten Lösung!



$$\begin{aligned} f^*(x) &= -f(-x) \\ &= -(2 \cdot (-x)^3 - 5 \cdot (-x)^2 + (-x) + 1) \quad (3) \\ &= -(-2x^3 - 5x^2 - x + 1) \\ f^*(x) &= 2x^3 + 5x^2 + x - 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung der gespiegelten Funktion lautet $f^*(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 1$

3.1.4 Aufgabe 24

Die Quadratische Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^2 + 4x + 2$$

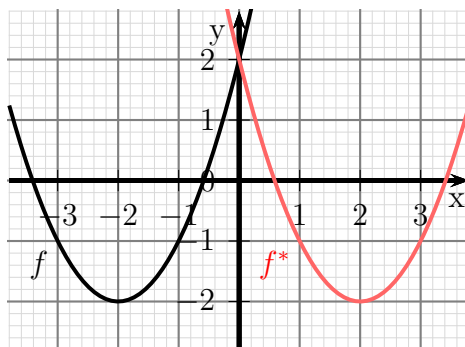
soll an der y -Achse gespiegelt werden. Geben Sie die Funktionsgleichung der transformierten Funktion $f^*(x)$ an. (5 P.)

Lösung: Nebstehend sind die Funktionen f und f^* dargestellt. Dies dient nur zur persönlichen Orientierung, die Skizze gehört nicht zur verlangten Lösung!

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(-x) \\ f^*(x) &= (-x)^2 + 4(-x) + 2 \end{aligned}$$

Wer mag, dann die Funktionsgleichung noch etwas vereinfachen. Verlangt ist das aber nicht. Das sieht dann so aus:

$$f^*(x) = x^2 - 4x + 2$$



3.1.5 Aufgabe 25

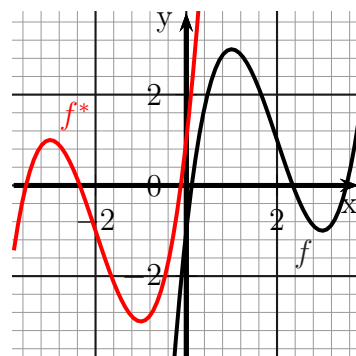
Die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

soll am Koordinatenursprung gespiegelt werden. Geben Sie die Funktionsgleichung $f^*(x)$ der dabei entstandenen Funktion f^* an! (5 P.)

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionsgrafen von f und f^* dargestellt. Diese Skizze gehört **nicht** zur verlangten Lösung, sie soll nur einen Überblick verschaffen.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= -f(-x) \\ f^*(x) &= -((-x)^3 - 6 \cdot (-x)^2 + 9 \cdot (-x) - 2) \end{aligned}$$



Das reicht als Lösung bereits vollkommen aus. Wer mag, kann diese Funktionsgleichung noch etwas vereinfachen. Verlangt ist das aber nicht:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= -((-x)^3 - 6 \cdot (-x)^2 + 9 \cdot (-x) - 2) \\ f^*(x) &= x^3 + 6x^2 + 9x + 2 \end{aligned}$$

3.2 Mit Hilfsmittel

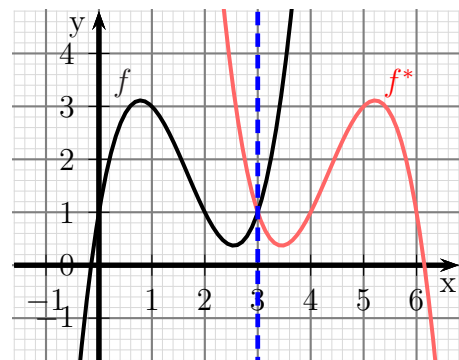
3.2.1 Aufgabe 26

Die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$$

soll an einer senkrechten Geraden bei $x = 3$ gespiegelt werden. Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörige Funktionsgleichung der gespiegelten Funktion f^* .

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionsgraphen der Ursprungsfunktion f und der gespiegelten Funktion f^* dargestellt. Dieses Diagramm gehört **nicht** zur geforderten Lösung, es soll lediglich einen Überblick über den Kurvenverlauf ermöglichen.



Zur Lösung gibt es zwei verschiedene Lösungswege.

1. Man verschiebt den Graphen der Funktion f zunächst um 3 Einheiten nach links, spiegelt ihn dann an der Ordinate und schiebt ihn zum Schluss wieder 3 Einheiten nach rechts.
2. Man verwendet eine fertige Spiegelformel.

Lösungsvariante 1: Um den Funktionsgraph nach links zu verschieben wird die Formel für eine **horizontale** Verschiebung verwendet. Hierin ist der Parameter x_v die **Rechtsverschiebung**.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x - x_v) \\ &= f(x + 3) \\ &= (x + 3)^3 - 5(x + 3)^2 + 6(x + 3) + 1 \\ &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 5 \cdot (x^2 + 6x + 9) + 6x + 18 + 1 \\ &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - 5x^2 - 30x - 45 + 6x + 18 + 1 \\ f_1(x) &= x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

Jetzt kann an der Ordinate (der y -Achse) gespiegelt werden.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(-x) \\ &= (-x)^3 + 4(-x)^2 + 3(-x) + 1 \\ f_2(x) &= -x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

Nun wird wieder um 3 Einheiten nach rechts verschoben.

$$\begin{aligned}f^*(x) &= f_2(x - x_v) \\&= f_2(x - 3) \\&= -(x - 3)^3 + 4(x - 3)^2 - 3(x - 3) + 1 \\&= -(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + 4 \cdot (x^2 - 6x + 9) - 3x + 9 + 1 \\&= -x^3 + 9x^2 - 27x + 27 + 4x^2 - 24x + 36 - 3x + 9 + 1 \\f^*(x) &= -x^3 + 13x^2 - 54x + 73\end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Für eine Spiegelung an einer vertikalen Achse an der Stelle $x = x_s$ gilt diese Formel:⁸

$$f^*(x) = f(-x + 2 \cdot x_s)$$

Die wird auf die gegebene Funktion angewendet.

$$\begin{aligned}f^*(x) &= f(-x + 2 \cdot 3) \\&= f(-x + 6) \\&= (-x + 6)^3 - 5(-x + 6)^2 + 6(-x + 6) + 1 \\&= -x^3 + 18x^2 - 108x + 216 - 5 \cdot (x^2 - 12x + 36) - 6x + 36 + 1 \\&= -x^3 + 18x^2 - 108x + 216 - 5x^2 + 60x - 180 - 6x + 36 + 1 \\f^*(x) &= -x^3 + 13x^2 - 54x + 73\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f^*(x) = -x^3 + 13x^2 - 54x + 73$

⁸Einzelheiten siehe hier in Kapitel 6.1.2: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/transformation.pdf>

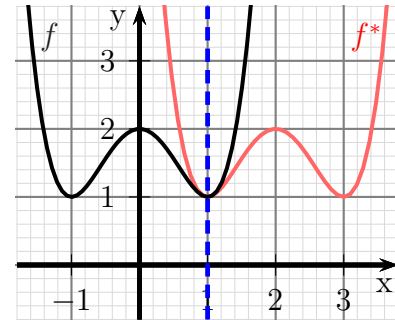
3.2.2 Aufgabe 27

Die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$$

soll an einer senkrechten Geraden bei $x = 1$ gespiegelt werden. Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörige Funktionsgleichung der gespiegelten Funktion f^* . (15 P.)

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionsgraphen der Ursprungsfunktion f und der gespiegelten Funktion f^* dargestellt. Dieses Diagramm gehört **nicht** zur geforderten Lösung, es soll lediglich einen Überblick über den Kurvenverlauf ermöglichen.



Zur Lösung gibt es zwei verschiedene Lösungswege.

1. Man verschiebt den Graphen der Funktion f zunächst um eine Einheit nach links, spiegelt dann ihn an der Ordinate und schiebt zum Schluss wieder eine Einheit nach rechts.
2. Man verwendet eine fertige Spiegelformel.

Lösungsvariante 1: Um den Funktionsgraph nach links zu verschieben wird die Formel für eine **horizontale** Verschiebung verwendet. Hierin ist der Parameter x_v die **Rechtsverschiebung**. Weil wir nach links schieben, ist der Parameter x_v negativ.

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= f(x - x_v) \\
 &= f(x - (-1)) \\
 &= f(x + 1) \\
 &= (x + 1)^4 - 2(x + 1)^2 + 2 \\
 &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 2 \\
 &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 2x^2 - 4x - 2 + 2 \\
 f_1(x) &= x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1 \quad (5)
 \end{aligned}$$

Jetzt kann an der Ordinate (der y -Achse) gespiegelt werden.

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= f_1(-x) \\
 &= (-x)^4 + 4 \cdot (-x)^3 + 4 \cdot (-x)^2 + 1 \\
 f_2(x) &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 \quad (5)
 \end{aligned}$$

Nun wird wieder um eine Einheit nach rechts verschoben.

$$\begin{aligned}
 f^*(x) &= f_2(x - x_v) \\
 &= (x - 1)^4 - 4(x - 1)^3 + 4(x - 1)^2 + 1 \\
 &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - 4 \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 4 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 1 \\
 &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 - 4x^3 + 12x^2 - 12x + 4 + 4x^2 - 8x + 4 + 1 \\
 f^*(x) &= x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 10 \quad (5)
 \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Für eine Spiegelung an einer vertikalen Achse an der Stelle $x = x_s$ gilt diese Formel:⁹

$$f^*(x) = f(-x + 2 \cdot x_s) \quad (5)$$

Die wird auf die gegebene Funktion angewendet.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(-x + 2 \cdot 1) \\ &= f(-x + 2) \\ &= (-x + 2)^4 - 2(-x + 2)^2 + 2 \\ &= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - 2 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 2 \\ &= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - 2x^2 + 8x - 8 + 2 \\ f^*(x) &= x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 10 \end{aligned} \quad (5)$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f^*(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 10$

⁹Einzelheiten siehe hier in Kapitel 6.1.2: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/transformation.pdf>

3.2.3 Aufgabe 28