

Tangenten an Funktionsgraphen

27. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Bekannte Stelle	2
1.1	Ohne Hilfsmittel	2
1.1.1	Aufgabe 1	2
1.1.2	Aufgabe 2	4
1.1.3	Aufgabe 3	5
1.1.4	Aufgabe 4	6
1.2	Mit Hilfsmittel	7
1.2.1	Aufgabe 6	7
2	Bekannte Steigung	8
2.1	Ohne Hilfsmittel	8
2.1.1	Aufgabe 11	8
2.2	Mit Hilfsmittel	8
2.2.1	Aufgabe 16	8
2.2.2	Aufgabe 17	10
2.2.3	Aufgabe 18	12
3	Bekannter Punkt	14
3.1	Ohne Hilfsmittel	14
3.1.1	Aufgabe 21	14
3.2	Mit Hilfsmittel	14
3.2.1	Aufgabe 26	14
3.2.2	Aufgabe 27	16
3.2.3	Aufgabe 28	18
3.2.4	Aufgabe 29	20

1 Bekannte Stelle

1.1 Ohne Hilfsmittel

1.1.1 Aufgabe 1

An die Parabel p mit der Funktionsgleichung

$$p(x) = x^2 - 4x + 4$$

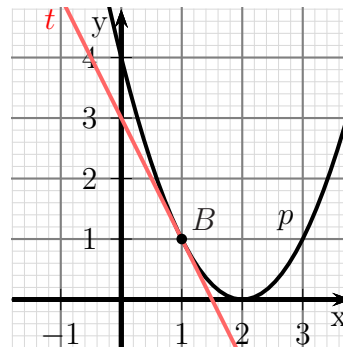
soll im Berührungspunkt B bei $x_B = 1$ eine Tangente t angelegt werden. Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörige Tangentengleichung $t(x)$!

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionsgraphen von p und t dargestellt. Dieses Diagramm gehört **nicht** zur verlangten Lösung, es soll nur dem besseren Verständnis dienen.

Die allgemeine Geradengleichung für die Tangente lautet:

$$t(x) = mx + b$$

Für diese Tangentengleichung wird zunächst die Steigung m benötigt. Sie muss mit der Steigung (also der Ableitung) von p übereinstimmen.



$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - 4x + 4 \\ p'(x) &= 2x - 4 \\ m &= p'(x_B) \\ &= 2x_B - 4 \\ &= 2 \cdot 1 - 4 \\ m &= -2 \end{aligned}$$

Bis hier ist damit die Tangentengleichung in dieser Form bekannt:

$$t(x) = -2x + b$$

Setzt man die Koordinaten des Berührungspunktes hier ein, kann damit der Parameter b bestimmt werden. Dazu wird zunächst der y -Wert y_B des Berührungspunktes benötigt. Den liefert die Funktion p .

$$\begin{aligned} y_B &= p(x_B) \\ &= x_B^2 - 4x_B + 4 \\ &= 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 \\ y_B &= 1 \end{aligned}$$

Jetzt werden die Koordinaten von $B(x_B|y_B)$ in die Tangentengleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} y_B &= -2 \cdot x_B + b \\ 1 &= -2 \cdot 1 + b \quad | +2 \\ 3 &= b \end{aligned}$$

Das wird in die Tangentengleichung eingesetzt. Wir erhalten:

$$t(x) = -2x + 3$$

1.1.2 Aufgabe 2

An den Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$$

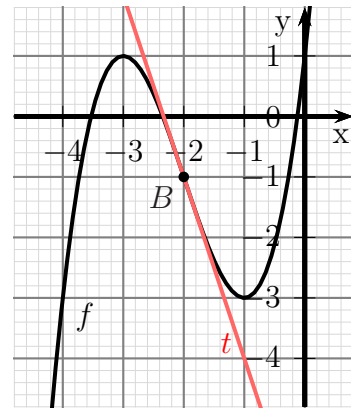
soll an der Stelle $x_B = -2$ eine Tangente t gelegt werden. Bestimmen Sie rechnerisch die zugehörige Funktionsgleichung $t(x)$. (10 P.)

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionsgraphen von p und t dargestellt. Dieses Diagramm gehört **nicht** zur verlangten Lösung, es soll nur dem besseren Verständnis dienen.

Die allgemeine Geradengleichung für die Tangente lautet:

$$t(x) = mx + b$$

Für diese Tangentengleichung wird zunächst die Steigung m benötigt. Sie muss mit der Steigung (also der Ableitung) von p übereinstimmen.



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 6x^2 + 9x + 1 \\ f'(x) &= 3x^2 + 12x + 9 \\ m &= f'(x_B) \\ &= 3x_B^2 + 12x_B + 9 \\ &= 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 9 \\ m &= -3 \end{aligned} \quad (2)$$

Bis hier ist damit die Tangentengleichung in dieser Form bekannt:

$$t(x) = -3x + b \quad (1)$$

Setzt man die Koordinaten des Berührungspunktes hier ein, kann damit der Parameter b bestimmt werden. Dazu wird zunächst der y -Wert y_B des Berührungspunktes benötigt. Den liefert die Funktion f .

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ &= x_B^3 + 6x_B^2 + 9x_B + 1 \\ &= (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 + 9 \cdot (-2) + 1 \\ y_B &= -1 \end{aligned} \quad (2)$$

Jetzt werden die Koordinaten von $B(x_B|y_B)$ in die Tangentengleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} y_B &= -3 \cdot x_B + b \\ -1 &= -3 \cdot (-2) + b \quad | -6 \\ -7 &= b \end{aligned} \quad (2)$$

Das wird in die Tangentengleichung eingesetzt. Wir erhalten:

$$t(x) = -3x - 7 \quad (1)$$

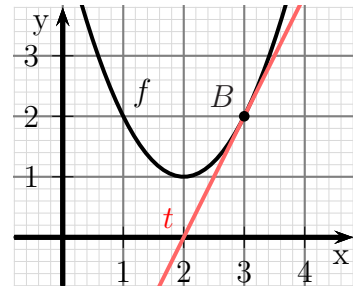
1.1.3 Aufgabe 3

An die Parabel f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

soll im Berührungspunkt B bei $x_B = 3$ eine Tangente t angelegt werden. Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörige Tangentengleichung $t(x)$! (10 P.)

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionsgraphen von f und t dargestellt. Dieses Diagramm gehört **nicht** zur verlangten Lösung, es soll nur dem besseren Verständnis dienen.



Die allgemeine Geradengleichung für die Tangente lautet:

$$t(x) = mx + b \quad (1)$$

Für diese Tangentengleichung wird zunächst die Steigung m benötigt. Sie muss mit der Steigung (also der Ableitung) von f übereinstimmen.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 5 \\ f'(x) &= 2x - 4 \\ m &= f'(x_B) \\ &= 2x_B - 4 \\ &= 2 \cdot 3 - 4 \\ m &= 2 \end{aligned} \quad (3)$$

Bis hier ist damit die Tangentengleichung in dieser Form bekannt:

$$t(x) = 2x + b \quad (1)$$

Setzt man die Koordinaten des Berührungspunktes hier ein, kann damit der Parameter b bestimmt werden. Dazu wird zunächst der y -Wert y_B des Berührungspunktes benötigt. Den liefert die Funktion f .

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ &= x_B^2 - 4x_B + 5 \\ &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 \\ &= 9 - 12 + 5 \\ y_B &= 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Jetzt werden die Koordinaten von $B(x_B|y_B)$ in die Tangentengleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} y_B &= 2 \cdot x_B + b \\ 2 &= 2 \cdot 3 + b \quad | -6 \\ -4 &= b \end{aligned} \quad (2)$$

Das wird in die Tangentengleichung eingesetzt. Wir erhalten:

$$t(x) = 2x - 4 \quad (1)$$

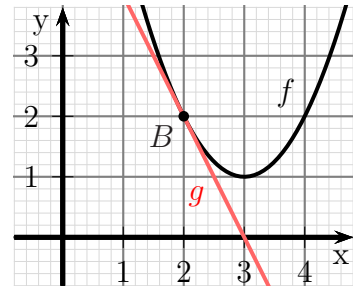
1.1.4 Aufgabe 4

An die Parabel f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

soll im Berührungspunkt B bei $x_B = 2$ eine Gerade g als Tangente angelegt werden. Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörige Tangentengleichung $g(x)$! (10 P.)

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionsgraphen von f und g dargestellt. Dieses Diagramm gehört **nicht** zur verlangten Lösung, es soll nur dem besseren Verständnis dienen.



Die allgemeine Geradengleichung für die Tangente lautet:

$$g(x) = mx + b \quad (1)$$

Für diese Tangentengleichung wird zunächst die Steigung m benötigt. Sie muss mit der Steigung (also der Ableitung) von f übereinstimmen.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 10 \\ f'(x) &= 2x - 6 \\ m &= f'(x_B) \\ &= 2x_B - 6 \\ &= 2 \cdot 2 - 6 \\ m &= -2 \end{aligned} \quad (3)$$

Bis hier ist damit die Tangentengleichung in dieser Form bekannt:

$$g(x) = -2x + b \quad (1)$$

Setzt man die Koordinaten des Berührungspunktes hier ein, kann damit der Parameter b bestimmt werden. Dazu wird zunächst der y -Wert y_B des Berührungspunktes benötigt. Den liefert die Funktion f .

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ &= x_B^2 - 6x_B + 10 \\ &= 2^2 - 6 \cdot 2 + 10 \\ &= 4 - 12 + 10 \\ y_B &= 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Jetzt werden die Koordinaten von $B(x_B|y_B)$ in die Tangentengleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} y_B &= -2 \cdot x_B + b \\ 2 &= -2 \cdot 2 + b \quad | +4 \\ 6 &= b \end{aligned} \quad (2)$$

Das wird in die Tangentengleichung eingesetzt. Wir erhalten:

$$g(x) = -2x + 6 \quad (1)$$

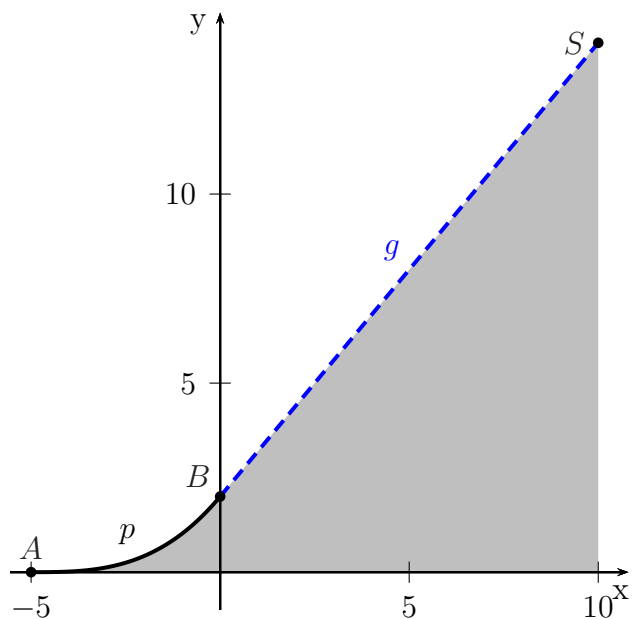
1.2 Mit Hilfsmittel

1.2.1 Aufgabe 6

Eine Ski-Sprungschanze hat im Auslauf die Form eines Polynomes p mit dieser Funktionsgleichung in der Einheit *Meter*:

$$p(x) = 0,016x^3 + 0,24x^2 + 1,2x + 2$$

Der Definitionsbereich des Auslaufes ist der Bereich $-5 \leq x \leq 0$. Im Punkt A liegt der Absprungpunkt. Rechts davon soll sich im Punkt B als Anlaufstrecke eine Gerade g anschließen, die ohne Stufe und ohne Knick mit dem Kurvenstück im Punkt B verbunden ist. Diese Anlaufstrecke ist gestrichelt eingezeichnet.



Der Startpunkt S auf der Anlaufstrecke liegt 10 Meter rechts vom Anschlusspunkt B . Berechnen Sie seine Höhe über dem Erdboden. (15 P.)

Lösung: Zunächst wird die Funktionsgleichung der Geraden g bestimmt. Ihre Steigung m muss identisch mit der Steigung der Kurve bei $x = 0$ sein.

$$\begin{aligned} p(x) &= 0,016x^3 + 0,24x^2 + 1,2x + 2 \\ p'(x) &= 0,048x^2 + 0,48x + 1,2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} m &= p'(0) \\ &= 0,048 \cdot 0^2 + 0,48 \cdot 0 + 1,2 \\ m &= 1,2 \end{aligned} \quad (3)$$

Damit lautet die Geradengleichung:

$$g(x) = 1,2x + b \quad (2)$$

Der Parameter b ist der y -Achsenabschnitt von g . Da dort genau der Anschlusspunkt B liegt, ist er identisch mit dem y -Achsenabschnitt von p . Dieser kann mit $b = 2$ am absoluten Glied der Funktionsgleichung $p(x)$ abgelesen werden. Die Geradengleichung heißt damit:

$$g(x) = 1,2x + 2 \quad (3)$$

Jetzt wird noch die Höhe h des Startpunktes über dem Erdboden berechnet.

$$\begin{aligned} h &= g(10) \\ &= 1,2 \cdot 10 + 2 \\ h &= 14 \end{aligned} \quad (3)$$

Ergebnis: Der Startpunkt S liegt 14 Meter über dem Erdboden.

2 Bekannte Steigung

2.1 Ohne Hilfsmittel

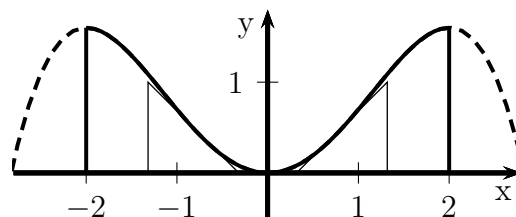
2.1.1 Aufgabe 11

2.2 Mit Hilfsmittel

2.2.1 Aufgabe 16

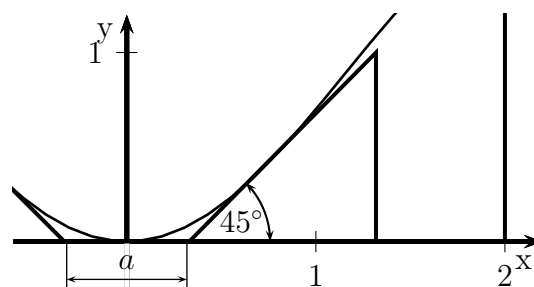
Eine Skaterbahn soll im Querschnitt die Form eines Polynomes 4. Grades erhalten. Die Funktionsgleichung für die Bahn-Oberfläche in der Einheit *Meter* lautet:

$$f(x) = -0,1x^4 + 0,8x^2$$



Die Bahn ist aus Glasfaser verstärktem Kunststoffmaterial hergestellt. Um die Laufbahn zu stabilisieren soll darunter ein Unterbau als Stützkonstruktion aus Stahlträgern gesetzt werden. Die Gesamtbreite der Bahn beträgt 4 Meter.

Das nebenstehende Bild zeigt als Ausschnitt die Konstruktion unter der rechten Bahn-Seite in einer Vergrößerung. Der rechte Stahlträger, der die GFK-Bahn von unten stützen soll, verläuft in einem 45° -Winkel diagonal nach oben rechts und berührt die Laufbahn als Tangente. Der linke verläuft spiegelbildlich zum rechten. Die Bahn liegt auf den Stahlträgern nur auf. So kann eine Verschraubung mit der GFK-Bahn vermieden werden, denn Schraubenköpfe auf der Skaterbahn sind gefährlich. Dieser diagonal verlaufende Träger endet oben in einer Höhe von 1 Meter über dem Boden und ist dort mit einem senkrecht zum Boden verlaufenden Träger verbunden. Ermitteln Sie den Abstand a zwischen den beiden unteren Enden der diagonalen Stahlträger auf 1 cm genau.



Lösung: Die Aufgabenstellung stellt sich als Suche nach einer Tangenten mit bekannter Steigung an einen Funktionsgraphen dar. Aus dem Operator „Ermitteln“ in der Aufgabenstellung ergibt sich, dass der GTR als Lösungswerkzeug ausreicht.

Der Steigungswinkel des Trägers beträgt 45° , was eine Steigung von 1 bedeutet. Es müssen daher zunächst die Stellen ermittelt werden, an denen die Steigung (also die Ableitung) den Wert 1 hat.

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & -0,1x^4 + 0,8x^2 \\
f'(x) & = & -0,4x^3 + 1,6x \\
-0,4x^3 + 1,6x & = & 1 \quad | - 1 \\
-0,4x^3 + 1,6x - 1 & = & 0
\end{array}$$

Der Taschenrechner liefert diese Lösungen:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & \approx & 1,5424 \\
x_2 & \approx & 0,7172 \\
x_3 & \approx & -2,259
\end{array}$$

Es ist sofort erkennbar, dass die Lösung $x_3 \approx -2,259$ entfällt, sie liegt außerhalb des Definitionsbereiches der Bahn mit $D = [-2; 2]$.

Aus dem Diagramm (aber auch aus logischen Gründen) ergibt sich, dass der gesuchte x -Wert der sein muss, der der 0 am nächsten liegt. Das ist $x_2 \approx 0,7172$.

Wegen der bekannten Steigung $m = 1$ lautet die Geradengleichung:

$$g(x) = 1 \cdot x + b$$

Um den Parameter b darin bestimmen zu können, wird der zu x_2 zugehörige y -Wert y_2 benötigt.

$$\begin{array}{rcl}
y_2 & = & f(x_2) \\
& \approx & -0,1 \cdot 0,7172^4 + 0,8 \cdot 0,7172^2 \\
y_2 & \approx & 0,3850
\end{array}$$

Jetzt kann b durch Einsetzen von x_2 und y_2 in die Geradengleichung bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcl}
y_2 & = & g(x_2) \\
0,3850 & \approx & 1 \cdot 0,7172 + b \quad | - 0,7172 \\
-0,3322 & \approx & b
\end{array}$$

Damit lautet die Geradengleichung:

$$g(x) \approx x - 0,3322$$

Jetzt kann die Nullstelle von g bestimmt werden:

$$\begin{array}{rcl}
g(x_0) & = & 0 \\
x_0 - 0,3322 & \approx & 0 \quad | + 0,3322 \\
x_0 & \approx & 0,3322
\end{array}$$

Wegen der Spiegelsymmetrie von f ist der gesuchte Abstand a hiervon das Doppelte.

$$a = 2x_0 \approx 2 \cdot 0,3322 = 0,6644$$

Die Einheit dazu lautet *Meter*. Es wird auf ganze Zentimeter gerundet. Wir erhalten als Ergebnis:

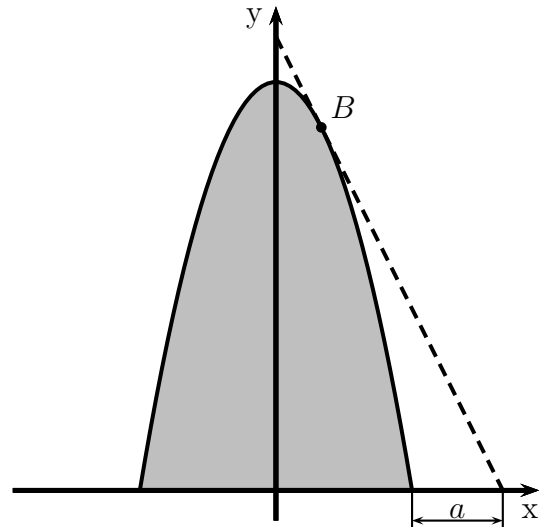
Der gesuchte Abstand a beträgt 0,66 m oder 66 cm.

2.2.2 Aufgabe 17

Ein Silo hat die Form eines Paraboloides. Seine äußere Kontur wird durch diese Funktion in der Einheit *Meter* bestimmt:

$$f(x) = -1,2x^2 + 10,8$$

Eine hinreichend lange Leiter soll so an das Silo angelehnt werden, dass sie das Silo im Punkt B in einer Höhe von 9,6m über dem Erdboden **berührt**. Die gestrichelte Linie stellt die Leiter dar.



a) Berechnen Sie den Abstand a , den der Aufstellpunkt der Leiter dazu vom Silo haben muss.

b) Berechnen Sie die Mindestlänge der Leiter, damit diese mindestens bis zum Berührungspunkt B reicht. (25 P.)

Lösung a: Zunächst wird die x -Koordinate x_B des Berührungspunktes benötigt.

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ 9,6 &= -1,2x_B^2 + 10,8 & | -10,8 \\ -1,2 &= -1,2x_B^2 & | : (-1,2) \\ x_B^2 &= 1 & | \sqrt{} \\ x_B &= \pm 1 \\ x_{B1} = 1 & \quad x_{B2} = -1 \end{aligned} \quad (4)$$

Die Lösung $x_{B2} = -1$ entfällt, wir erwarten einen Wert **rechts** vom Scheitelpunkt, also im positiven x -Bereich. Es bleibt bei einer Lösung: $x_B = 1$. (1)

Die Leiter stellt eine Gerade mit der Geradengleichung $g(x) = mx + b$ dar. Die Steigung m liefert die Ableitung $f'(x_B)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -1,2x^2 + 10,8 \\ f'(x) &= -2,4x \\ m &= f'(x_B) \\ &= -2,4 \cdot 1 \\ m &= -2,4 \end{aligned} \quad (4)$$

Damit lautet die Geradengleichung zunächst:

$$g(x) = -2,4x + b \quad (1)$$

Um den Parameter b zu bestimmen setzt man die Koordinaten des Berührungspunktes $B(1|9,6)$ in die Geradengleichung ein.

$$\begin{array}{rcl} g(x_B) & = & y_B \\ -2,4 \cdot 1 + b & = & 9,6 \quad | + 2,4 \\ b & = & 12 \quad (3) \end{array}$$

Die Geradengleichung lautet:

$$g(x) = -2,4x + 12 \quad (1)$$

Um den Abstand zwischen Leiterfußpunkt und Silofußpunkt berechnen zu können, werden die **Nullstellen** beider Funktionen benötigt. Beginnen wir mit der Nullstelle der Geraden x_{0G} .

$$\begin{array}{rcl} g(x_{0G}) & = & 0 \\ -2,4x_{0G} + 12 & = & 0 \quad | - 12 \\ -2,4x_{0G} & = & -12 \quad | : (-2,4) \\ x_{0G} & = & 5 \quad (2) \end{array}$$

Es folgt die Nullstelle der Parabel x_{0P} .

$$\begin{array}{rcl} f(x_{0P}) & = & 0 \\ -1,2x_{0P}^2 + 10,8 & = & 0 \quad | - 10,8 \\ -1,2x_{0P}^2 & = & -10,8 \quad | : (-1,2) \\ x_{0P}^2 & = & 9 \quad | \sqrt{} \\ x_{0P} & = & \pm 3 \\ x_{0P1} = 3 & & x_{0P2} = -3 \quad (2) \end{array}$$

Der Wert $x_{0P2} = -3$ entfällt, er liegt auf der falschen Seite des Silos. Damit kann der Abstand a berechnet werden.

$$a = x_{0G} - x_{0P1} = 5 - 3 = 2$$

Die Leiter muss in einem Abstand von 2 Metern vom Silo aufgestellt werden. (2)

Lösung b: In der nebenstehenden Skizze ist in **rot** ein Rechtwinkliges Dreieck eingezeichnet, dessen Hypotenuse die Mindest-Leiterlänge l darstellt. Die Höhe ist mit

$$h = y_B = 9,6 \quad (1)$$

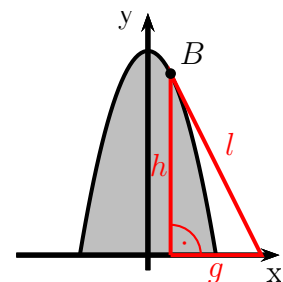
bekannt, die Grundseite kann leicht bestimmt werden:

$$g = x_{0G} - x_B = 5 - 1 = 4 \quad (2)$$

Mit dem Satz des Pythagoras kann nun die Leiterlänge l berechnet werden.

$$l = \sqrt{g^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 9,6^2} = 10,4$$

Die Leiter muss mindestens 10,40 Meter lang sein. (2)

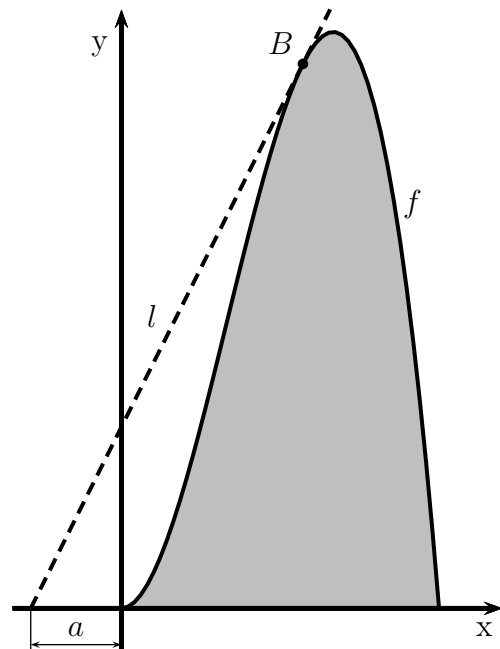


2.2.3 Aufgabe 18

Der Querschnitt einer Staumauer eines Regenrückhaltebeckens hat im Bereich $0 \leq x \leq 3,5$ in der Einheit *Meter* die Form eines Polynomes 3. Grades mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -x^3 + 3,5x^2$$

Eine ausreichend lange Leiter l soll so an die Mauer angelehnt werden, dass sie die Staumauer im Punkt B genau 6 Meter über dem Erdboden als Tangente berührt. Die Leiter ist als gestrichelte Linie eingezeichnet.



a) Berechnen Sie den Abstand a , den der Fußpunkt der Leiter vom Fußpunkt der Staumauer haben muss.

b) Berechnen Sie die erforderliche Mindestlänge der Leiter, damit sie mindestens bis zum Berührungspunkt B reicht. Runden Sie auf ganze Zentimeter. (25 P.)

Lösung a: Zunächst wird die x -Koordinate x_B des Berührungspunktes benötigt.

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ 6 &= -x_B^3 + 3,5x_B^2 \quad | +x_B^3 - 3,5x_B^2 \\ x_B^3 - 3,5x_B^2 + 6 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Der GTR liefert diese Lösungen für die Gleichung:

$$\begin{aligned} x_{B1} &= 2,6374 \\ x_{B2} &= 2 \\ x_{B3} &= -1,137 \end{aligned} \quad (2)$$

Die Lösung $x_{B3} = -1,137$ entfällt, sie liegt nicht im vorgegebenen Definitionsbereich mit $0 \leq x \leq 3,5$. Die Lösung $x_{B1} = 2,6374$ liegt **rechts** vom Hochpunkt und kommt daher aus logischen Gründen nicht in Betracht. Es bleibt bei einer Lösung: $x_B = 2$. (1)

Die Leiter stellt eine Gerade mit der Geradengleichung $g(x) = mx + b$ dar. Die Steigung m liefert die Ableitung $f'(x_B)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 3,5x^2 \\ f'(x) &= -3x^2 + 7x \\ m &= f'(x_B) \\ &= -3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 \\ m &= 2 \end{aligned} \quad (5)$$

Damit lautet die Geradengleichung zunächst:

$$g(x) = 2x + b \quad (1)$$

Um den Parameter b zu bestimmen setzt man die Koordinaten des Berührungspunktes $B(2|6)$ in die Geradengleichung ein.

$$\begin{array}{rcl} g(x_B) & = & y_B \\ 2 \cdot 2 + b & = & 6 \quad | -4 \\ b & = & 2 \end{array} \quad (3)$$

Die Geradengleichung lautet:

$$g(x) = 2x + 2 \quad (1)$$

Um den Abstand zwischen Leiterfußpunkt und Mauerfußpunkt berechnen zu können, wird die **Nullstelle** x_0 der Geradengleichung als x -Wert des Leiterfußpunktes benötigt.

$$\begin{array}{rcl} g(x_0) & = & 0 \\ 2x_0 + 2 & = & 0 \quad | -2 \\ 2x_0 & = & -2 \quad | :2 \\ x_0 & = & -1 \end{array} \quad (2)$$

Der Mauerfußpunkt liegt laut Aufgabenstellung im Koordinatenursprung, also bei $x = 0$. Damit kann der Abstand a berechnet werden.

$$a = 0 - x_0 = 0 - (-1) = 1$$

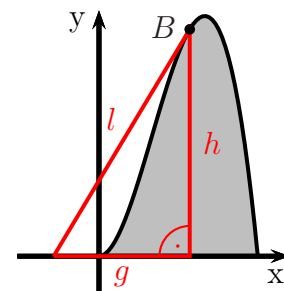
Die Leiter muss einen Meter vor dem Mauerfußpunkt aufgestellt werden. (2)

Lösung b: In der nebenstehenden Skizze ist in **rot** ein Rechtwinkliges Dreieck eingezeichnet, dessen Hypotenuse die Mindest-Leiterlänge l darstellt. Die Höhe ist mit

$$h = y_B = 6 \quad (1)$$

bekannt, die Grundseite g kann leicht bestimmt werden:

$$g = x_B - x_0 = 2 - (-1) = 3 \quad (2)$$



Mit dem Satz des Pythagoras kann nun die Leiterlänge l berechnet werden.

$$l = \sqrt{g^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} \approx 6,708 \quad (2)$$

Die Leiter muss mindestens 6,71 Meter lang sein. (1)

3 Bekannter Punkt

3.1 Ohne Hilfsmittel

3.1.1 Aufgabe 21

3.2 Mit Hilfsmittel

3.2.1 Aufgabe 26

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

Vom Punkt $P(0|-11)$ sollen Tangenten an den Funktionsgraphen gezeichnet werden. Ermitteln Sie alle möglichen Tangentengleichungen $t(x)$.

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionsgraphen der gegebenen Funktion f sowie der Tangenten t_1 und t_2 dargestellt. Dieses Diagramm gehört **nicht** zur verlangten Lösung, es soll nur dem besseren Verständnis dienen.

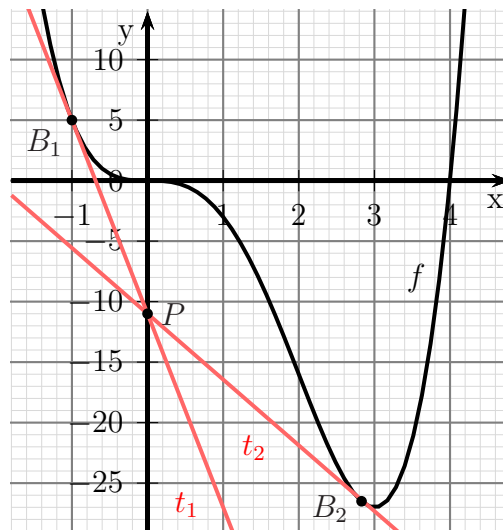
Gehen wir von einem Berührungspunkt $B(x_B|y_B)$ sowie dem bekannten Punkt $P(0|-11)$ aus. Die Steigung der zugehörigen Tangente lautet dann:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} \\ m &= \frac{y_B - (-11)}{x_B - 0} \\ m &= \frac{y_B + 11}{x_B} \end{aligned}$$

Die Ableitung von f wird benötigt.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 \\ f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 \end{aligned}$$

Die Tangentensteigung im Berührungspunkt muss dann mit der Steigung (der Ableitung) der Funktion f übereinstimmen.



$$\begin{aligned}
f'(x_B) &= m \\
4x_B^3 - 12x_B^2 &= \frac{y_B + 11}{x_B} \\
4x_B^3 - 12x_B^2 &= \frac{x_B^4 - 4x_B^3 + 11}{x_B} \quad | \cdot x_B \\
4x_B^4 - 12x_B^3 &= x_B^4 - 4x_B^3 + 11 \quad | - x_B^4 + 4x_B^3 - 11 \\
3x_B^4 - 8x_B^3 - 11 &= 0
\end{aligned}$$

Der GTR liefert zwei Lösungen:

$$\begin{aligned}
x_{B1} &= -1 \\
x_{B2} &\approx 2,829
\end{aligned}$$

Die zugehörigen y -Werte werden bestimmt:

$$\begin{aligned}
y_{B1} &= f(x_{B1}) \\
&= (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 \\
y_{B1} &= 5 \\
y_{B2} &= f(x_{B2}) \\
&\approx 2,829^4 - 4 \cdot 2,829^3 \\
y_{B2} &\approx -26,513
\end{aligned}$$

Jetzt können die Steigungen berechnet werden.

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{y_{B1} - y_P}{x_{B1} - x_P} \\
&= \frac{5 - (-11)}{-1 - 0} \\
m_1 &= -16 \\
m_2 &= \frac{y_{B2} - y_P}{x_{B2} - x_P} \\
&\approx \frac{-26,513 - (-11)}{2,829 - 0} \\
m_2 &\approx -5,483
\end{aligned}$$

Die zugehörigen b -Werte ergeben sich sofort aus dem y -Wert von $P(0|-11)$ als $b_1 = -11$ und $b_2 = -11$, weil hier zufälligerweise wegen $x_P = 0$ die y -Achse liegt. Der Parameter b ist bekanntlich immer der y -Achsenabschnitt. Die Tangentengleichungen können damit angegeben werden.

$$\boxed{t_1(x) = -16x - 11} \quad \text{und} \quad \boxed{t_2(x) \approx -5,483x - 11}$$

3.2.2 Aufgabe 27

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = -x^4 - 4x^3$$

Vom Punkt $P(-1|27)$ sollen Tangenten an den Funktionsgraphen gezeichnet werden. Ermitteln Sie alle möglichen Tangentengleichungen $t(x)$. (25 P.)

Lösung: Nebenstehend sind die Funktionsgraphen der gegebenen Funktion f sowie der Tangenten t_1 und t_2 dargestellt. Dieses Diagramm gehört **nicht** zur verlangten Lösung, es soll nur dem besseren Verständnis dienen.

Gehen wir von einem Berührungspunkt $B(x_B|y_B)$ sowie dem bekannten Punkt $P(-1|27)$ aus. Die Steigung der zugehörigen Tangente lautet dann:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} \\ m &= \frac{y_B - 27}{x_B - (-1)} \\ m &= \frac{y_B - 27}{x_B + 1} \quad (2) \end{aligned}$$

Die Ableitung von f wird benötigt.

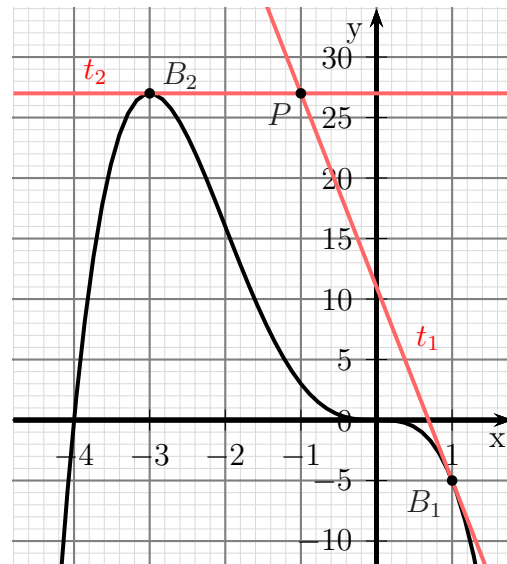
$$\begin{aligned} f(x) &= -x^4 - 4x^3 \\ f'(x) &= -4x^3 - 12x^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Die Tangentensteigung im Berührungspunkt muss dann mit der Steigung (der Ableitung) der Funktion f übereinstimmen.

$$\begin{aligned} f'(x_B) &= m & (1) \\ -4x_B^3 - 12x_B^2 &= \frac{y_B - 27}{x_B + 1} & (1) \\ -4x_B^3 - 12x_B^2 &= \frac{-x_B^4 - 4x_B^3 - 27}{x_B + 1} \quad | \cdot (x_B + 1) & (1) \\ (x_B + 1) \cdot (-4x_B^3 - 12x_B^2) &= -x_B^4 - 4x_B^3 - 27 \\ -4x_B^4 - 12x_B^3 - 4x_B^3 - 12x_B^2 &= -x_B^4 - 4x_B^3 - 27 \quad | + x_B^4 + 4x_B^3 + 27 \\ -3x_B^4 - 12x_B^3 - 12x_B^2 + 27 &= 0 \quad | : (-3) \\ x_B^4 + 4x_B^3 + 4x_B^2 - 9 &= 0 & (2) \end{aligned}$$

Der GTR liefert zwei Lösungen:

$$\begin{aligned} x_{B1} &= 1 \\ x_{B2} &= -3 \quad (2) \end{aligned}$$



Die zugehörigen y -Werte werden bestimmt:

$$\begin{aligned} y_{B1} &= f(x_{B1}) \\ &= -1^4 - 4 \cdot 1^3 \\ y_{B1} &= -5 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y_{B2} &= f(x_{B2}) \\ &= -(-3)^4 - 4 \cdot (-3)^3 \\ y_{B2} &= 27 \end{aligned} \quad (2)$$

Jetzt können die Steigungen berechnet werden.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{y_{B1} - y_P}{x_{B1} - x_P} \\ &= \frac{-5 - 27}{1 - (-1)} \\ m_1 &= -16 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{y_{B2} - y_P}{x_{B2} - x_P} \\ &= \frac{27 - 27}{-3 - 1} \\ m_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Die Tangentengleichungen lauten damit:

$$t_1(x) = -16x + b_1 \quad \text{und} \quad t_2(x) = b_2 \quad (2)$$

Die zugehörigen b -Werte werden durch Einsetzen der Koordinaten eines beliebigen Punktes in die jeweilige Tangentengleichung bestimmt. Ich verwende dazu die Koordinaten des Punktes $P(-1|27)$.

$$\begin{aligned} y_P &= t_1(x_P) \\ y_P &= -16 \cdot x_P + b_1 \\ 27 &= -16 \cdot (-1) + b_1 \\ 27 &= 16 + b_1 & | -16 \\ 11 &= b_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y_P &= t_2(x_P) \\ y_P &= b_2 \\ 27 &= b_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Die Tangentengleichungen können damit angegeben werden.

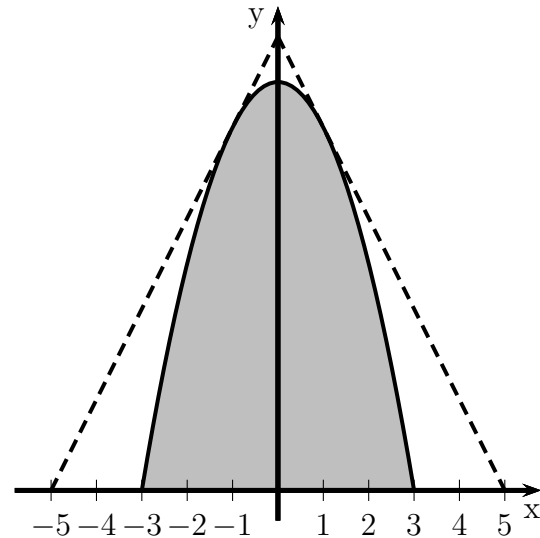
$$\boxed{t_1(x) = -16x + 11} \quad \text{und} \quad \boxed{t_2(x) = 27} \quad (1)$$

3.2.3 Aufgabe 28

Ein Silo hat die Form eines Paraboloides. Seine äußere Kontur wird durch diese Funktion in der Einheit *Meter* bestimmt:

$$f(x) = -1,2x^2 + 10,8$$

Als Regenschutz soll über dem Silo ein kegelförmiges Zelt errichtet werden. Dieser Kegel hat unten einen Durchmesser von 10 Metern, wie im nebenstehenden Bild erkennbar ist. Dazu werden gerade Stahlträger rund um den Paraboloiden aufgestellt, die sich alle an ihrem oberen Ende treffen und den Paraboloiden als Tangente berühren. Diese Stahlträger sind gestrichelt eingezeichnet.



Berechnen Sie die notwendige Länge dieser Stahlträger!

Lösung: Zur Lösung muss zunächst die Funktionsgleichung einer der beiden eingezeichneten Tangenten bestimmt werden. Dann kann mit den Achsenabschnitten über den Satz des Pythagoras die Länge berechnet werden.

Ich entscheide mich willkürlich für die rechte Tangente. Sie verläuft durch den Punkt $P(5|9)$. Den Berührungspunkt nenne ich $B(x_B|y_B)$. Die Steigung m der Tangenten muss genau so groß wie die Ableitung von f bei x_B sein.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -1,2x^2 + 10,8 \\
 f'(x) &= -2,4x \\
 m &= f'(x_B) \\
 \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} &= -2,4x_B \\
 \frac{(-1,2x_B^2 + 10,8) - 9}{x_B - 5} &= -2,4x_B & | \cdot (x_B - 5) \\
 -1,2x_B^2 + 10,8 &= -2,4x_B^2 + 12x_B & | + 2,4x_B^2 - 12x_B \\
 1,2x_B^2 - 12x_B + 10,8 &= 0 & | : 1,2 \\
 x_B^2 - 10x_B + 9 &= 0 \\
 x_{B1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - 9} \\
 &= 5 \pm 4 \\
 x_{B1} &= 1 & x_{B2} &= 9
 \end{aligned}$$

Der Wert $x_{B2} = 9$ entfällt, er liegt nicht im untersuchten Bereich.

Den zu $x_{B1} = 1$ gehörenden y -Wert y_{B1} liefert die Funktionsgleichung $f(x)$.

$$\begin{aligned} y_{B1} &= f(x_{B1}) \\ &= -1,2x_{B1}^2 + 10,8 \\ &= -1,2 \cdot 1 + 10,8 \\ y_{B1} &= 9,6 \end{aligned}$$

Hiermit kann die Steigung m der Geraden berechnet werden.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_{B1} - y_P}{x_{B1} - x_P} \\ &= \frac{9,6 - 0}{1 - 5} \\ m &= -2,4 \end{aligned}$$

Damit hat die Tangentengleichung diese Form:

$$t(x) = -2,4x + b$$

In diese Gleichung können die Koordinaten eines bekannten Punktes eingesetzt werden, um den Parameter b zu berechnen. Willkürlich wähle ich hierfür die Koordinaten von $P(5|0)$.

$$\begin{aligned} y_P &= -2,4x_P + b \\ 0 &= -2,4 \cdot 5 + b \\ 0 &= -12 + b & | +12 \\ 12 &= b \end{aligned}$$

Hiermit ist die Tangentengleichung bekannt:

$$t(x) = -2,4x + 12$$

Direkt abgelesen werden kann der y -Achsenabschnitt $y_0 = 12$. Der x -Achsenabschnitt ist bereits mit $x_0 = 5$ vorgegeben. Die Länge l eines Trägers kann mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden.

$$\begin{aligned} l^2 &= x_0^2 + y_0^2 \\ l^2 &= 5^2 + 12^2 & | \sqrt{} \\ l &= \sqrt{25 + 144} \\ l &= 13 \end{aligned}$$

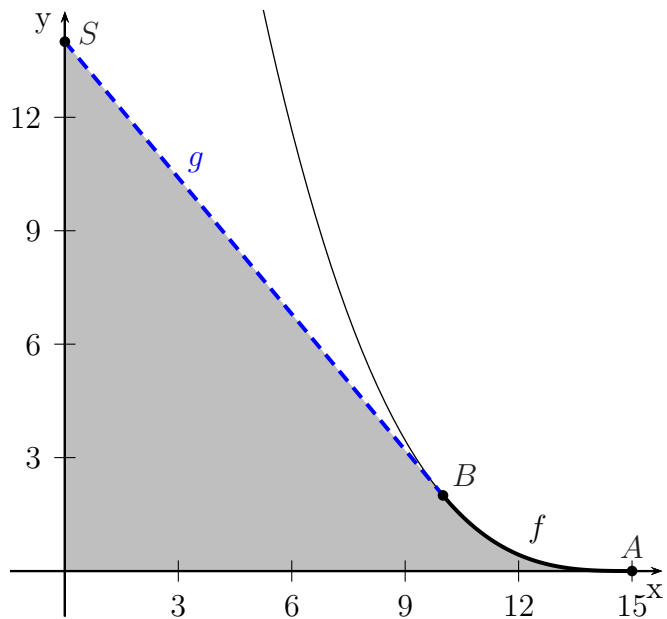
Ergebnis: **Die Stahlträger haben eine Länge von 13 Metern.**

3.2.4 Aufgabe 29

Eine Ski-Sprungsschanze hat im Auslauf zwischen den Punkten B und A die Form der Funktion f mit der Funktionsgleichung in der Einheit *Meter*:

$$f(x) = -0,016x^3 + 0,72x^2 - 10,8x + 54$$

Im Punkt $A(15|0)$ liegt der Absprungpunkt, der sogenannte Schanzentisch. Links vom Auslauf befindet sich die gerade Anlaufstrecke. Diese ist gestrichelt eingezeichnet. Sie mündet im Punkt B ohne Stufe und ohne Knick tangential in den Auslauf ein. Der Startpunkt der Skispringer ist der Punkt $S(0|14)$.



Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung $g(x)$ der Anlaufgeraden g .

Lösung: Von dem bekannten Punkt S aus soll eine Tangente an den Funktionsgraphen von f gelegt werden. Ich nenne den Berührungspunkt $B(x_B|y_B)$. Dort muss die Geradensteigung gleich der Ableitung von f sein.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -0,016x^3 + 0,72x^2 - 10,8x + 54 \\
 f'(x) &= -0,048x^2 + 1,44x - 10,8 \\
 m &= f'(x_B) \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= -0,048x_B^2 + 1,44x_B - 10,8 \\
 \frac{y_B - 14}{x_B - 0} &= -0,048x_B^2 + 1,44x_B - 10,8 \\
 \frac{f(x_B) - 14}{x_B} &= -0,048x_B^2 + 1,44x_B - 10,8 \\
 \frac{-0,016x_B^3 + 0,72x_B^2 - 10,8x_B + 54 - 14}{x_B} &= -0,048x_B^2 + 1,44x_B - 10,8 \\
 \frac{-0,016x_B^3 + 0,72x_B^2 - 10,8x_B + 40}{x_B} &= -0,048x_B^2 + 1,44x_B - 10,8 \quad | \cdot x_B \\
 -0,016x_B^3 + 0,72x_B^2 - 10,8x_B + 40 &= -0,048x_B^3 + 1,44x_B^2 - 10,8x_B \quad | + 0,048x_B^3 - 1,44x_B^2 + 10,8x_B \\
 0,032x_B^3 - 0,72x_B^2 + 40 &= 0
 \end{aligned}$$

Der GTR liefert für diese Gleichung folgende Lösungen:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 19,058 \\
 x_2 &= 10 \\
 x_3 &= -6,558
 \end{aligned}$$

Der Wert $x_1 = 19,058$ liegt rechts von der Absprungstelle, also außerhalb des zulässigen Bereiches. Der Wert $x_3 = -6,558$ liegt links vom Startpunkt, also ebenfalls außerhalb des zulässigen Bereiches. Damit ist $x_2 = 10$ die gesuchte Lösung für x_B .

Der zugehörige y -Wert wird bestimmt.

$$\begin{aligned} y_B &= f(x_B) \\ &= -0,016x_B^3 + 0,72x_B^2 - 10,8x_B + 54 \\ &= -0,016 \cdot 10^3 + 0,72 \cdot 10^2 - 10,8 \cdot 10 + 54 \\ y_B &= 2 \end{aligned}$$

Die Steigung m der Geraden kann berechnet werden.

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_B - 14}{x_B - 0} \\ &= \frac{2 - 14}{10 - 0} \\ m &= -1,2 \end{aligned}$$

Damit lautet bis jetzt die Geradengleichung:

$$g(x) = -1,2x + b$$

Da der Parameter b den y -Achsenabschnitt der Geraden darstellt, kann dieser sofort aus den bekannten Koordinaten von $P(0|14)$ abgelesen werden: $b = 14$.

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $g(x) = -1,2x + 14$