

Aufgaben Stochastik

15. März 2022

Inhaltsverzeichnis

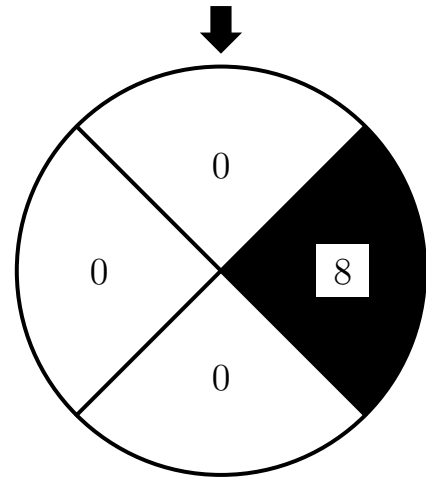
1	Unabhängige Warscheinlichkeit	2
1.1	STOCHAS-1	2
1.2	STOCHAS-2	5
1.3	STOCHAS-3	6
1.4	STOCHAS-4	8
1.5	STOCHAS-5	9
1.6	STOCHAS-6	10
1.7	STOCHAS-7a	12
1.8	STOCHAS-7b	13
1.9	STOCHAS-7c	15
1.10	STOCHAS-8a	16
1.11	STOCHAS-8b	18
1.12	STOCHAS-8c	19
2	Abhängige Warscheinlichkeit	20
2.1	STOCHAS-21	20
2.2	STOCHAS-22	22
2.3	STOCHAS-23	23
2.4	STOCHAS-24	25
2.5	STOCHAS-25	26
2.6	STOCHAS-26a	28
2.7	STOCHAS-26b	30
2.8	STOCHAS-26c	32
2.9	STOCHAS-27a	34
2.10	STOCHAS-27b	36
2.11	STOCHAS-27c	38

1 Unabhängige Warscheinlichkeit

1.1 STOCHAS-1

Beim Spiel „Die wilde 8“ wird das Glücksrad mit den beiden Zahlen 0 und 8 (siehe nebenstehende Abbildung) zweimal gedreht.

1. Erstellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.
2. Die beiden Zahlen in den Feldern, auf die jeweils der Pfeil zeigt, werden addiert.
 - a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich
 - i. die Summe 0 ergibt,
 - ii. die Summe 8 ergibt,
 - iii. die Summe 16 ergibt.
 - b) Der Spieleinsatz für das zweimalige Drehen des Glücksrades beim Spiel „Die wilde 8“ beträgt 8€.
 - i. Bei der Summe 0 gibt es keine Auszahlung, der Spieleinsatz ist verloren.
 - ii. Bei der Summe 8 wird der Spieleinsatz zurückgezahlt.
 - iii. Bei der Summe 16 wird der zehnfache Spieleinsatz zurückgezahlt.



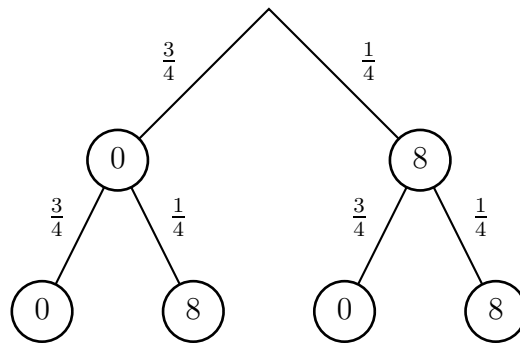
Das Glücksrad

Der Spielleiter behauptet, das Spiel sei „fair“. Das heißt, dass ein Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht.

Untersuchen Sie, ob es sich wirklich um ein faires Spiel handelt.

Lösung:

Teil 1:



Teil 2a: Zur Lösung läuft man vom Startpunkt oben die unterschiedlichen Zweige entlang. Für die Wahrscheinlichkeit, als Summe die Null ($\Sigma = 0$) zu erhalten, muss bei beiden Verzweigungen der **linke** Zweig verfolgt werden. Die Wahrscheinlichkeiten von jeweils $\frac{3}{4}$ werden darum miteinander multipliziert.

Für die Summe 8 ($\Sigma = 8$) gibt es zwei mögliche Wege, entweder erst der linke Zweig (erste Ziehung ergibt 0) und dann der rechte Zweig (zweite Ziehung ergibt 8), oder zuerst der rechte Zweig (erste Ziehung ergibt 8) und dann der linke Zweig (zweite Ziehung ergibt 0). Die Wahrscheinlichkeiten für jeden Weg erhalten wir durch Multiplikation. Am Schluss werden beide Wahrscheinlichkeiten für beide Wege addiert.

Für die Summe 16 ($\Sigma = 16$) gibt es nur einen Weg, nämlich beide Male der rechte Zweig. Beide Wahrscheinlichkeiten von jeweils $\frac{1}{4}$ werden miteinander multipliziert.

$$\begin{aligned} P(\Sigma 0) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \\ P(\Sigma 8) &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \\ P(\Sigma 16) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Teil 2b: Zur Lösung sind zwei verschiedene Ansätze möglich.

1. Man berechnet den Wert der durchschnittlich pro Spiel gezahlten Auszahlung.
2. Man berechnet den zu erwartenden Gewinn.

Lösungsvariante 1: Wie eben berechnet ist die Wahrscheinlichkeit für 0€ Auszahlung $\frac{9}{16}$, für 8€ Auszahlung $\frac{6}{16}$ und für 80€ Auszahlung $\frac{1}{16}$. Addiert man alle Produkte aus Auszahlungswert und deren Wahrscheinlichkeit, erhält man die durchschnittliche Auszahlung.

$$A_{\emptyset} = 0\text{€} \cdot \frac{9}{16} + 8\text{€} \cdot \frac{6}{16} + 80\text{€} \cdot \frac{1}{16} = \frac{48\text{€} + 80\text{€}}{16} = \frac{128\text{€}}{16} = 8\text{€}$$

Anmerkung: Das erste Produkt mit 0€ Auszahlung kann man in der Rechnung auch weglassen.

Der durchschnittliche Auszahlungswert ist genau so groß, wie der Einsatz, das Spiel ist fair.

Lösungsvariante 2: Wird nichts ausgezahlt, beträgt der „Gewinn“ -8€ , ist also ein Verlust. Die Wahrscheinlichkeit dafür liegt bei $\frac{9}{16}$. Werden 8€ ausgezahlt, wird nichts gewonnen oder verloren. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{6}{16}$. Werden aber 80€ ausgezahlt, beträgt der Gewinn 72€. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\frac{1}{16}$. Addiert man alle Produkte aus Gewinn/Verlust mit den jeweils zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, dann erhält man den längerfristig zu erwartenden Gewinn/Verlust.

$$G_{\emptyset} = -8\text{€} \cdot \frac{9}{16} + 0\text{€} \cdot \frac{6}{16} + 72\text{€} \cdot \frac{1}{16} = \frac{-72\text{€} + 72\text{€}}{16} = 0\text{€}$$

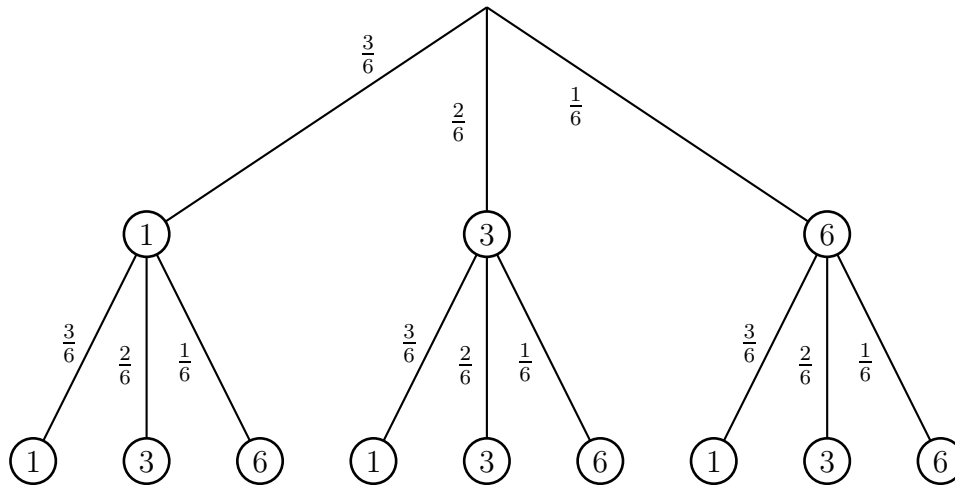
Anmerkung: Das zweite Produkt mit 0€ Gewinn kann man in der Rechnung auch weglassen.

Der durchschnittliche Gewinn/Verlust beträgt 0€, es gibt also weder einen Gewinn noch einen Verlust, das Spiel ist also fair.

1.2 STOCHAS-2

Ein Würfel ist ungleichmäßig beschriftet. Auf drei Seiten steht eine 1, auf zwei Seiten eine 3 und auf einer Seite eine 6. Mit diesem Würfel wird zwei mal gewürfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei gleiche Zahlen gewürfelt werden. Der Zahlenansatz mit Brüchen reicht aus, es muss nichts ausgerechnet werden. (10 P.)

Lösung: Sinnvollerweise erstellt man zunächst einen Ereignisbaum. (5)



$$P(1; 1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \quad (1)$$

$$P(3; 3) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \quad (1)$$

$$P(6; 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \quad (1)$$

$$P(\text{gleich}) = P(1; 1) + P(2; 2) + P(3; 3) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \quad (2)$$

Als Ergebnis reicht das aus. Wer möchte, der kann das natürlich noch zusammenfassen, auch wenn das nicht verlangt ist:

$$\begin{aligned} P(\text{gleich}) &= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{9}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} \\ &= \frac{14}{36} \\ P(\text{gleich}) &= \frac{7}{18} \end{aligned}$$

1.3 STOCHAS-3

In den Jahren 2017/18 wurde am Berliner Bahnhof „Südkreuz“ eine Software zur automatisierten Gesichtserkennung bei der Fahndung nach Gefährdern aus der Terrorszene getestet. Das Ergebnis: Etwa 80 % der Testpersonen wurden erkannt. Es gab nur 0,1 % Fehlalarme, also Meldungen von der Software, dass eine der Testpersonen von einer Kamera erfasst wurde, obwohl diese Testperson nicht am Ort anwesend war. Innenminister Horst Seehofer war begeistert von der Genauigkeit der Software und bewertete sie als „positiv, sogar sehr positiv“. Der Test habe gezeigt, „dass Gesichtserkennungssysteme in Zukunft einen wesentlichen Mehrwert für polizeiliche Arbeit, insbesondere der Bundespolizei, darstellen können“, heißt es in der Pressemitteilung des Innenministeriums. Herr Seehofer befürwortet eine „breite Einführung“.

In Deutschland leben derzeit etwa 80 000 000 Menschen. Als „Terroristische Gefährder“ gelten etwa 200 Personen. Den Berliner Bahnhof „Südkreuz“ passieren täglich etwa 160 000 Reisende. Nehmen wir nun an, die getestete Software zur Gesichtserkennung würde an diesem Bahnhof eingesetzt, um Terroristische Gefährder zu finden und festzunehmen.

a) Berechnen Sie den **Erwartungswert** für die Anzahl der Personen, die am Berliner Bahnhof „Südkreuz“ täglich fälschlicherweise festgenommen (und später nach genauerer Untersuchung wieder freigelassen) werden müssen.

b) Berechnen Sie den **Erwartungswert** für die Anzahl der Terrorverdächtigen, die die Software korrekt meldet.

c) Bewerten Sie den Nutzen der Software. Was würden Sie Herrn Seehofer sagen?
(10 P.)

Lösung a)

$$P(\text{unschuldig}) = \frac{80\,000\,000 - 200}{80\,000\,000} \approx 1$$

$$E(\text{Fehlalarm}) = 160\,000 \cdot 1 \cdot 0,1\% = 160\,000 \cdot 0,001 = 160$$

Es sind täglich 160 Fehlalarme zu erwarten. (4)

Lösung b)

$$P(\text{Terror}) = \frac{200}{80\,000\,000} \cdot 0,8 = \frac{1}{500\,000}$$

$$E(\text{Terror}) = 160\,000 \cdot \frac{1}{500\,000} = 0,32$$

Es sind täglich 0,32 korrekte Festnahmen zu erwarten. (4)

Lösung c) Die große Zahl der Fehlalarme steht in keinem vernünftigen Verhältnis zu den korrekten Verhaftungen. Herr Seehofer sollte diese Software besser nicht einsetzen.
(2)

1.4 STOCHAS-4

Bei einem Würfelspiel wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Der Spieleinsatz beträgt 5 €. Bei einem Pasch (beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl) erhält der Spieler 25 €, bei einem Pasch mit zwei Sechsen sogar 50 €. In allen anderen Fällen geht er leer aus. Lohnt sich dieses Würfelspiel eher für den Betreiber oder für den Spieler? Berechnen Sie dazu den Erwartungswert für den Spieler. Runden Sie ggf. auf einen ganzen Centbetrag. (20 P.)

Lösung: Zur Beurteilung dieser Frage muss der Erwartungswert für eine Auszahlung ermittelt werden.

Die Wahrscheinlichkeit für zwei Einsen / Zweien usw. beträgt jeweils:

$$P(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad (4)$$

Fasst man alle Möglichkeiten für einen Pasch mit den Augenzahlen 1 bis 5 zusammen, beträgt dafür die Wahrscheinlichkeit:

$$P(12345) = 5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \quad (4)$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen 6-er Pasch bleibt bei

$$P(6) = \frac{1}{36} \quad (3)$$

Damit kann der Erwartungswert berechnet werden.

$$\begin{aligned} E &= P(12345) \cdot 25 \text{ €} + P(6) \cdot 50 \text{ €} \\ &= \frac{5}{36} \cdot 25 \text{ €} + \frac{1}{36} \cdot 50 \text{ €} \\ E &\approx 4,86 \text{ €} \end{aligned} \quad (8)$$

Auf lange Sicht wird also bei jedem Wurf nur 4,86 € ausgezahlt. Weil jeder Einsatz 5 € kostet bleibt dem Betreiber daher längerfristig ein durchschnittlicher Gewinn von etwa 0,14 € pro Wurf.

Das Spiel lohnt sich für den Betreiber. (1)

1.5 STOCHAS-5

Sie würfeln mit zwei Würfeln.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel eine 6 zeigen?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel die gleiche Augenzahl zeigen?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden Augenzahlen genau 10 ergibt?
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden Augenzahlen mindestens 10 ergibt?
5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden Augenzahlen genau 7 ergibt?
6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden Augenzahlen mindestens 7 ergibt?
7. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden Augenzahlen genau 4 ergibt?
8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden Augenzahlen höchstens 4 ergibt?

Erstellen Sie zur Lösung ein Baumdiagramm.

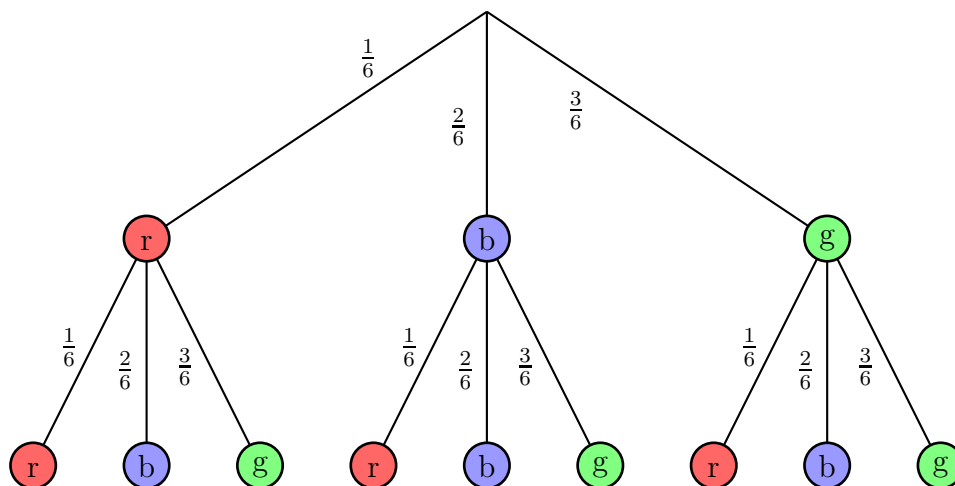
1.6 STOCHAS-6

Sie besitzen spezielle Würfel. Die Würfel haben auf einer Seite eine rote, auf zwei Seiten eine blaue und auf drei Seiten eine grüne Farbe. Sie würfeln mit zwei Würfeln.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel eine rote Farbe zeigen?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel eine blaue Farbe zeigen?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel eine grüne Farbe zeigen?
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel die gleiche Farbe zeigen?
5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Würfel eine unterschiedliche Farbe zeigen?
6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Würfel eine rote Farbe zeigt?
7. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Würfel eine blaue Farbe zeigt?
8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Würfel eine grüne Farbe zeigt?

Tipp: Erstellen Sie zur Lösung ein Baumdiagramm.

Lösung:



zu 1: Beide Würfel **rot** ist der erste Zweig ganz links:

$$P_{rr} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2,78 \%$$

zu 2: Beide Würfel **blau** ist der fünfte Zweig in der Mitte:

$$P_{bb} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36} \approx 11,1\%$$

zu 3: Beide Würfel **grün** ist der neunte Zweig ganz rechts:

$$P_{gg} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = 25\%$$

zu 4: Beide Würfel **gleiche** gibt es bei **drei** Zweigen, nämlich den drei aus Frage 1 bis 3. Die Ergebnisse werden **addiert**.

$$P_{gleich} = P_{rr} + P_{bb} + P_{gg} = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{9}{36} = \frac{14}{36} \approx 38,9\%$$

zu 5: Verschiedenfarbige Kombinationen gibt es in insgesamt 6 Zweigen: dem 2., 3., 4., 6., 7. und 8. Die müssen alle addiert werden. Das sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} P_{verschieden} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \\ &= \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{6}{36} \\ &= \frac{22}{36} \\ P_{verschieden} &\approx 61,1\% \end{aligned}$$

Anmerkung: Wenn so viele Zweige zu addieren sind, rechnet man besser mit der sogenannten **Gegenwahrscheinlichkeit**. Addiert man nämlich die Wahrscheinlichkeiten **aller** Zweige, erhält man immer die Wahrscheinlichkeit 1. Daher kann man auch die Wahrscheinlichkeit des **Gegenteils** bestimmen und von 1 subtrahieren, etwa so:

$$P_{verschieden} = 1 - P_{gleich} = 1 - \frac{14}{36} = \frac{36}{36} - \frac{14}{36} = \frac{22}{36}$$

zu 6: Kein Würfel **rot** findet man in den Zweigen 5, 6, 8 und 9. Wir addieren die einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

$$P_{\text{nicht-rot}} = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{6}{36} + \frac{9}{36} = \frac{25}{36}$$

zu 7: Kein Würfel **blau** findet man in den Zweigen 1, 3, 7 und 9. Wir addieren die einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

$$P_{\text{nicht-blau}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{3}{36} + \frac{9}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

zu 8: Kein Würfel **grün** findet man in den Zweigen 1, 2, 4 und 5. Wir addieren die einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

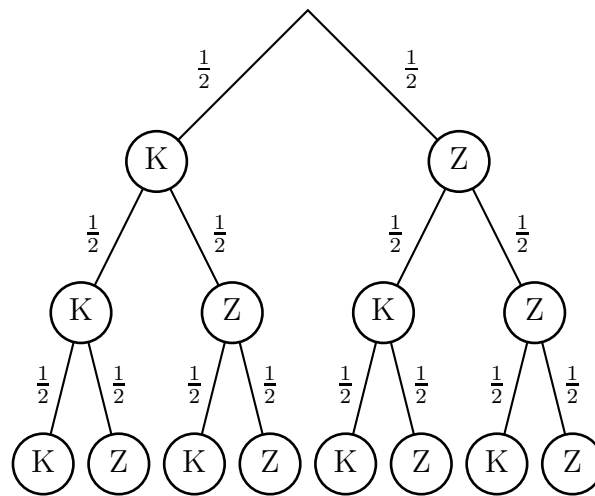
$$P_{\text{nicht-grün}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

1.7 STOCHAS-7a

Sie werfen drei mal eine Münze. Die möglichen Ergebnisse sind **Kopf** oder **Zahl**.

- a) Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen Ereignisbaum mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(3Z)$ dafür, dass Sie **dreimal Zahl** werfen?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(1Z)$ dafür, dass Sie **genau einmal Zahl** werfen?
- d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(\geq 1Z)$ dafür, dass Sie **mindestens einmal Zahl** werfen?

Lösung: a)



- b) Zur Lösung gehört nur der ganz rechte Pfad.

$$P(3Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- c) Zur Lösung gehört der 2., der 3. und der 5. Pfad. Dabei zeigt die Münze beim dritten, beim zweiten bzw. beim ersten mal die Zahl.

$$P(1Z) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

- d) Da fast alle Pfade zur Lösung gehören, arbeitet man hier zweckmäßig mit der Gegenwahrscheinlichkeit. Das Gegenteil von **mindestens einmal Zahl** ist **keinmal Zahl**. Dazu gehört der erste Pfad ganz rechts.

$$\overline{P(\geq 1Z)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(\geq 1Z) = 1 - \overline{P(\geq 1Z)} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

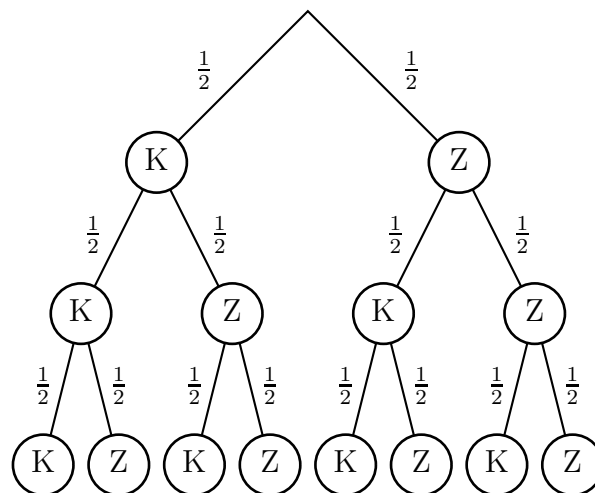
1.8 STOCHAS-7b

Sie werfen drei mal eine Münze. Die möglichen Ergebnisse sind **Kopf** oder **Zahl**.

- a) Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen Ereignisbaum mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(3K)$ dafür, dass Sie **dreimal Kopf** werfen?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(2K)$ dafür, dass Sie **genau zweimal Kopf** werfen?
- d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(\geq 1K)$ dafür, dass Sie **mindestens einmal Kopf** werfen?

Lösung:

zu a)



zu b) Zur Lösung gehört nur der ganz linke Pfad.

$$P(3K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

zu c) Zur Lösung gehört der 2., der 3. und der 5. Pfad. Dabei zeigt die Münze beim dritten, beim zweiten bzw. beim ersten mal die Zahl.

$$P(1Z) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

zu d) Da fast alle Pfade zur Lösung gehören, arbeitet man hier zweckmäßig mit der Gegenwahrscheinlichkeit. Das Gegenteil von **mindestens einmal Kopf** ist **keinmal Kopf**. Dazu gehört der letzte Pfad ganz rechts.

$$\overline{P(\geq 1K)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

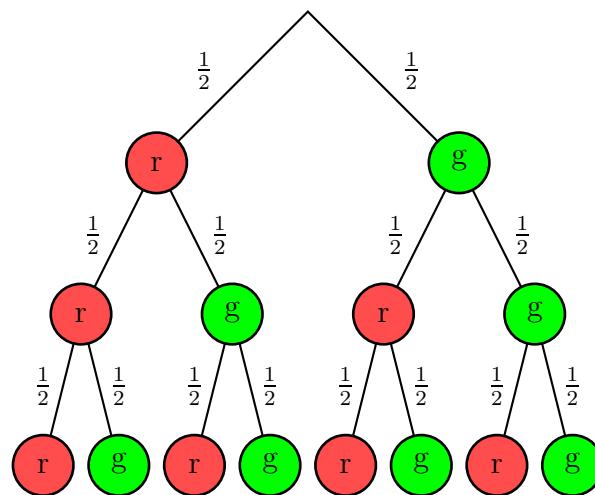
$$P(\geq 1K) = 1 - \overline{P(\geq 1K)} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

1.9 STOCHAS-7c

Sie haben einen Würfel, der auf drei Seiten **rot** und auf drei Seiten **grün** zeigt. Sie würfeln mit diesem Würfel drei mal.

- a) Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen Ereignisbaum mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(3r)$ dafür, dass Sie **dreimal rot** werfen?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(2r)$ dafür, dass Sie **genau zweimal rot** und **einmal grün** werfen?
- d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(\leq 2g)$ dafür, dass Sie **höchstens zweimal grün** werfen?

Lösung: a)



- b) Zur Lösung gehört nur der ganz linke Pfad.

$$P(3r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- c) Zur Lösung gehört der 2., der 3. und der 5. Pfad. Dabei zeigt die Münze beim dritten, beim zweiten bzw. beim ersten mal die grüne Farbe.

$$P(2r) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

- d) Da fast alle Pfade zur Lösung gehören, arbeitet man hier zweckmäßig mit der Gegenwahrscheinlichkeit. Das Gegenteil von **mindestens einmal Kopf** ist **keinmal Kopf**. Dazu gehört der letzte Pfad ganz rechts.

$$\overline{P(\leq 2g)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(\leq 2g) = 1 - \overline{P(\leq 2r)} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

1.10 STOCHAS-8a

In einer Schulklasse sind 20 Kinder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei davon am selben Tag Geburtstag haben?

Lösung: Sinnvollerweise löst man diese Aufgabe mit der **Gegenwahrscheinlichkeit**. Das Gegenteil von **mindestens zwei** ist **nur eins pro Tag**, oder anders ausgedrückt: Jedes Kind hat an einem eigenen Tag Geburtstag.

Zur Lösung setzen wir die Kinder einzeln nacheinander in die Klasse.

Das erste Kind: Das erste Kind kann Geburtstag haben, wann es will, bislang hat noch keiner am selben Tag Geburtstag, weil noch keine anderen da sind.

$$P_1 = \frac{365}{365}$$

Alle 365 von 365 Tagen würden passen.

Das zweite Kind: Die Wahrscheinlichkeit, an einem anderen Tag als das erste Kind Geburtstag zu haben liegt bei:

$$P_2 = \frac{364}{365}$$

Nur 364 von 365 Tagen sind noch frei, weil ein Tag entfällt.

Das dritte Kind: Die Wahrscheinlichkeit, an einem anderen Tag als die ersten beiden Kinder Geburtstag zu haben liegt bei:

$$P_3 = \frac{363}{365}$$

Nur 363 von 365 Tagen sind noch frei, weil zwei Tage entfallen

⋮

Das 20-te Kind: Die Wahrscheinlichkeit, an einem anderen Tag als die ersten 19 Kinder Geburtstag zu haben liegt bei:

$$P_{20} = \frac{346}{365}$$

Nur 346 von 365 Tagen sind noch frei, weil 19 Tage entfallen

Die Gesamtwahrscheinlichkeit der Klasse: Für die Gesamtwahrscheinlichkeit der ganzen Klasse müssen nun alle Teilwahrscheinlichkeiten miteinander **multipliziert** werden, weil ja alle Bedingungen für alle Kinder **gleichzeitig** erfüllt sein müssen.

$$P_{ges} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot \dots \cdot P_{20} = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{346}{365} = \frac{190}{365} \approx 0,5886$$

Das ist die **Gegenwahrscheinlichkeit** zur gesuchten Frage. Die tatsächlich gesuchte Wahrscheinlichkeit P kann nun mit der Gegenwahrscheinlichkeitsformel berechnet werden.

$$P = 1 - P_{ges} = 1 - 0,5886 = 0,4114 = 41,14 \%$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Klasse mit 20 Kindern mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben, liegt bei 41,14 %.

1.11 STOCHAS-8b

Fünf Freunde tauschen ihre Telefonnummern aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei von ihnen die selbe Endziffer in der Telefonnummer haben?

Lösung: Sinnvollerweise geht man hier über die Gegenwahrscheinlichkeit. Ich bestimme also zunächst die Wahrscheinlichkeit P_U dafür, dass alle Endziffern **unterschiedlich** sind.

Erster: Der Erste kann jede Endziffer haben, also 10 von 10.

$$P_1 = \frac{10}{10}$$

Zweiter: Für den Zweiten bleiben noch 9 von 10 Ziffern frei.

$$P_2 = \frac{9}{10}$$

Dritter: Für den Dritten bleiben noch 8 von 10 Ziffern frei.

$$P_3 = \frac{8}{10}$$

Vierter: Für den Vierten bleiben noch 7 von 10 Ziffern frei.

$$P_4 = \frac{7}{10}$$

Fünfter: Für den Fünften bleiben noch 6 von 10 Ziffern frei.

$$P_5 = \frac{6}{10}$$

Alle 5: Für die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass alle 5 unterschiedliche Endziffern haben, werden die Teilwahrscheinlichkeiten miteinander multipliziert.

$$P_{ges} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 = \frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{30\,240}{100\,000} = 30,24\%$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist hiervon die **Gegenwahrscheinlichkeit**.

$$P = 1 - P_{ges} = \frac{100\,000}{100\,000} - \frac{30\,240}{100\,000} = \frac{69\,760}{100\,000} = 69,76\%$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei die selbe Endziffer haben, liegt bei 69,76 %.

1.12 STOCHAS-8c

In einer Familie gibt es fünf Kinder. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei von ihnen im selben Monat geboren sind? Gehen Sie hier der Einfachheit halber davon aus, dass alle Monate gleichviele Tage haben.

Lösung: Sinnvollerweise geht man hier über die Gegenwahrscheinlichkeit. Ich bestimme also zunächst die Wahrscheinlichkeit P_U dafür, dass alle in **unterschiedlichen** Monaten geboren sind.

Erster: Der Erste kann jeden Geburtsmonat haben, also 12 von 12.

$$P_1 = \frac{12}{12}$$

Zweiter: Für den Zweiten bleiben noch 11 von 12 Monaten frei.

$$P_2 = \frac{11}{12}$$

Dritter: Für den Dritten bleiben noch 10 von 12 Monaten frei.

$$P_3 = \frac{10}{12}$$

Vierter: Für den Vierten bleiben noch 9 von 12 Monaten frei.

$$P_4 = \frac{9}{12}$$

Fünfter: Für den Fünften bleiben noch 8 von 12 Monaten frei.

$$P_5 = \frac{8}{12}$$

Alle 5: Für die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass alle 5 unterschiedliche Geburtsmonate haben, werden die Teilwahrscheinlichkeiten miteinander multipliziert.

$$P_{ges} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 = \frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{95\,040}{248\,832} \approx 38,19\%$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist hiervon die **Gegenwahrscheinlichkeit**.

$$P = 1 - P_{ges} = \frac{248\,832}{248\,832} - \frac{95\,040}{248\,832} = \frac{153\,792}{248\,832} = 61,81\%$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei im selben Monat geboren sind, liegt bei 61,81 %.

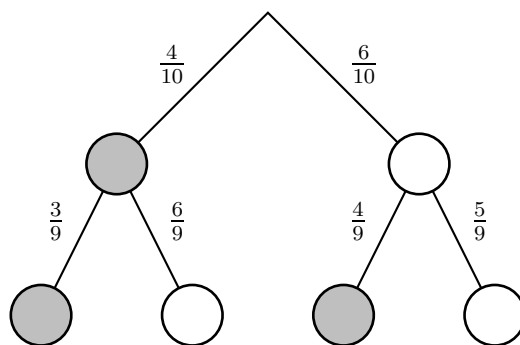
2 Abhängige Warscheinlichkeit

2.1 STOCHAS-21

In einem Schrank befinden sich unsortiert 4 dunkle und 6 helle T-Shirts. Zwei T-Shirts werden herausgenommen.

- a) Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen Ereignisbaum.
- b) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei helle T-Shirts herauszunehmen.
- c) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei verschiedenfarbige T-Shirts herauszunehmen.
- d) Die dunklen T-Shirts haben 27€ gekostet, die hellen nur 18€. Berechnen Sie den Erwartungswert für den Gesamtwert von zwei beliebig herausgenommenen T-Shirts?

Lösung a:



Lösung b:

$$P_{\text{hell}} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

Lösung c:

$$P_{\text{unterschiedlich}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{15}$$

Lösung d: Zunächst bilde ich die Werte für jede mögliche Konstellation. Da die Kombination dunkel/hell in zwei verschiedenen Zweigen des Baumes steht, wird dieser Wert verdoppelt.

$$\begin{aligned} E_{d/d} &= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot 54 \text{ €} \\ &= 7,20 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{d/h} &= 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot 45 \text{ €} \\ &= 24,00 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{h/h} &= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot 36 \text{ €} \\ &= 12,00 \text{ €} \end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist die Summe aller Teilbeträge.

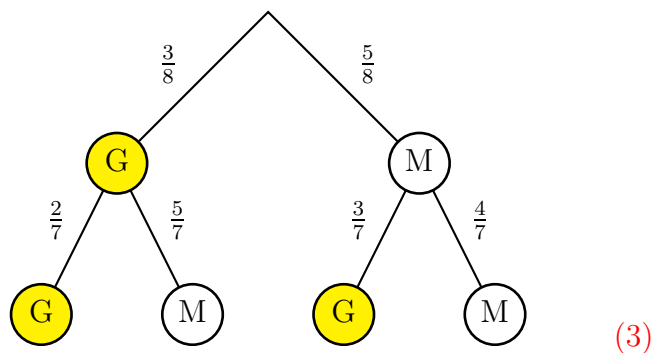
$$\begin{aligned} E &= E_{d/d} + E_{d/h} + E_{h/h} \\ &= 7,20 \text{ €} + 24,00 \text{ €} + 12,00 \text{ €} \\ E &= 43,20 \text{ €} \end{aligned}$$

2.2 STOCHAS-22

In einem Gefäß liegen 8 Münzen. Drei davon sind aus Gold und haben eine Masse von je 28 Gramm. Die anderen bestehen aus Messing mit je 14 Gramm Masse. Es werden zwei beliebige Münzen entnommen.

- a) Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen Ereignisbaum.
- b) Berechnen Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei gleiche Münzen entnommen zu haben. Das Ergebnis kann als Bruch zusammengefasst stehen bleiben.
- c) Berechnen Sie den **Erwartungswert** für die Gesamtmasse von zwei entnommenen Münzen. (10 P.)

Lösung a:



Lösung b:

$$P(\text{gleich}) = P(GG) + P(MM) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{6}{56} + \frac{20}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28} \quad (2)$$

Lösung c:

$$P(GG) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28} \quad (1)$$

$$P(GM) = 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \quad (1)$$

$$P(MM) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} E(2) &= P(GG) \cdot m(GG) + P(GM) \cdot m(GM) + P(MM) \cdot m(MM) \\ &= \frac{3}{28} \cdot 56 \text{ g} + \frac{15}{28} \cdot 42 \text{ g} + \frac{5}{14} \cdot 28 \text{ g} \\ &= 6 \text{ g} + 22,5 \text{ g} + 10 \text{ g} \\ E(2) &= 38,5 \text{ g} \end{aligned}$$

Der Erwartungswert für zwei Münzen liegt bei 38,5 Gramm. (2)

2.3 STOCHAS-23

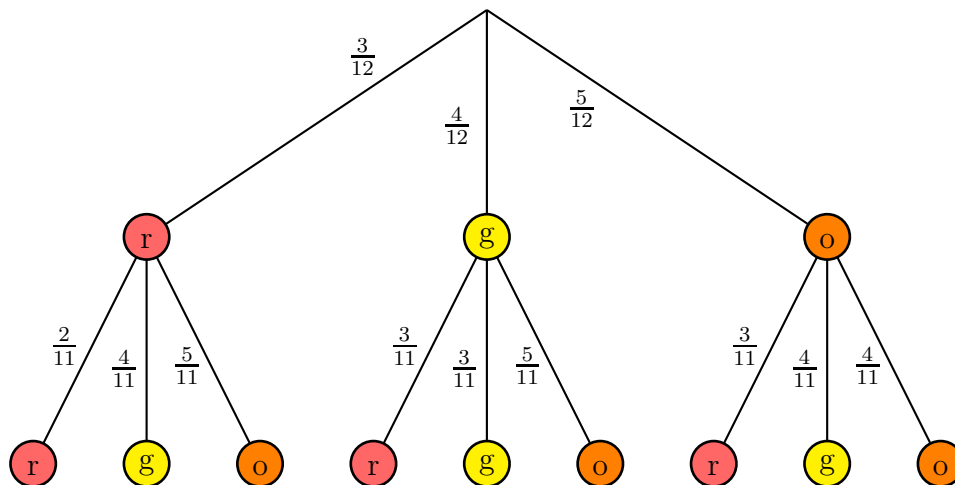
In einer Tüte befinden sich 3 rote, 4 grüne und 5 orangefarbene Gummibärchen. Aus der Tüte werden 2 Gummibärchen entnommen.

a) Ermitteln Sie durch einen Ereignisbaum die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man folgende Ergebnisse erzielt:

1. zwei grüne Gummibärchen
2. ein rotes und ein orangefarbenes Gummibärchen
3. kein orangefarbenes Gummibärchen
4. zwei verschiedenfarbige Gummibärchen

b) Ein rotes Gummibärchen kostet 0,20 €, ein grünes 0,15 € und ein orangefarbenes 0,10 €. Welchen **Erwartungswert** für den Gesamtwert der beiden entnommen Gummibärchen erhält man?

Lösung: Vorweg wird der Ereignisbaum dargestellt, der für jede Unteraufgabe Planungsgrundlage sein kann.



Lösung a1: zwei grüne Gummibärchen

$$P = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

Lösung a2: ein rotes, ein orangefarbenes Gummibärchen

$$P = \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 5}{12 \cdot 11} = \frac{5}{22}$$

Lösung a3: kein orangefarbenes Gummibärchen

$$P = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{6 + 12 + 12 + 12}{132} = \frac{42}{132} = \frac{7}{22}$$

Lösung a4: zwei verschiedenfarbige Gummibärchen

$$P = 1 - \underbrace{\left(\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \right)}_{\text{je zwei gleichfarbige}} = 1 - \frac{6 + 12 + 20}{132} = \frac{66}{66} - \frac{19}{66} = \frac{47}{66}$$

Lösung b: Zu jeder möglichen Ergebniskombination (z.B. rot/rot oder grün/orange) wird die zugehörige Wahrscheinlichkeit mit dem jeweiligen Gewinn multipliziert und alles addiert. Hierbei ist zu beachten, dass die jeweiligen Kombinationen aus zwei **verschiedenfarbigen** Gummibärchen immer in zwei verschiedenen Zweigen vorkommen, also verdoppelt werden müssen.

$$\begin{aligned} E &= \underbrace{\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot 0,40 \text{ €}}_{\text{rot/rot}} + \underbrace{\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot 0,30 \text{ €}}_{\text{grün/grün}} + \underbrace{\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot 0,20 \text{ €}}_{\text{orange/orange}} + \dots \\ &\quad \dots + 2 \cdot \underbrace{\frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot 0,35 \text{ €}}_{\text{rot/grün}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot 0,30 \text{ €}}_{\text{rot/orange}} + 2 \cdot \underbrace{\frac{4}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot 0,25 \text{ €}}_{\text{grün/orange}} \\ E &= 0,28\bar{3} \text{ €} \end{aligned}$$

Ergebnis:

Man erwartet bei jedem Zugriff zwei Gummibärchen im Gesamtwert von $0,28\bar{3} \text{ €}$.

2.4 STOCHAS-24

In einem Wäschekorb befinden sich 5 Paar Socken. Wieviele Socken muss man herausnehmen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man ein zusammenpassendes Paar dabei hat, mindestens 50 % beträgt? Berechnen Sie dazu schrittweise (Socken für Socken) die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bis dahin ein Sockenpaar aufgetaucht ist.

Lösung: Zur Lösung gehe ich schrittweise Socken für Socken vor.

1. Zugriff: Bei nur einem Socken kann es noch keine Übereinstimmung geben. Daher:

$$P_1 = 0$$

2. Zugriff: 9 Socken sind noch auf dem Haufen, davon kann nur einer passen. Daher:

$$P_2 = \frac{1}{9} \approx 11,11\%$$

3. Zugriff: Nehmen wir zunächst an, zwei **verschiedene** Socken sind schon da. Von den 8 Socken auf dem Haufen würden zwei ein Paar mit einem der vorhandenen Socken bilden. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, beim dritten Zugriff erfolgreich zu sein:

$$P_3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Dazu kommt noch die Wahrscheinlichkeit, bereits im zweiten Zugriff erfolgreich gewesen zu sein. Wir erhalten insgesamt:

$$P_{3ges} = P_2 + P_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} \approx 36,11\%$$

4. Zugriff: Nehmen wir zunächst an, drei **verschiedene** Socken sind schon da. Von den 7 Socken auf dem Haufen würden drei ein Paar mit einem der vorhandenen Socken bilden. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, beim dritten Zugriff erfolgreich zu sein:

$$P_4 = \frac{3}{7}$$

Dazu kommt noch die Wahrscheinlichkeit, bereits vorher schon erfolgreich gewesen zu sein. Wir erhalten insgesamt:

$$P_{4ges} = P_{3ges} + P_4 = \frac{13}{36} + \frac{3}{7} = \frac{91 + 108}{252} = \frac{199}{252} \approx 78,97\%$$

Das ist schon mehr als die geforderten 50 %. Ergebnis:

Spätestens beim vierten gezogenen Socken beträgt die Wahrscheinlichkeit über 50 %.

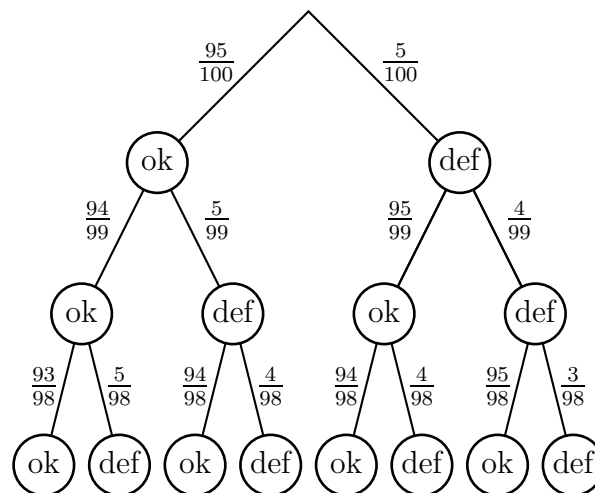
2.5 STOCHAS-25

In einer Lieferung von 100 Transistoren sind 5 defekt. Es werden 3 Transistoren ausgewählt und geprüft.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei den geprüften **mindestens** ein defekter Transistor dabei ist? Skizzieren Sie dazu einen Ereignisbaum und geben Sie für die Berechnung den Ansatz mit Brüchen an.

b) Ein intakter Transistor kostet 1,00 €, ein defekter Transistor ist wertlos. Geben Sie den Berechnungsansatz zur Bestimmung des **Erwartungswertes** für den Gesamtwert von drei beliebig entnommenen Transistoren an. Runden Sie das Ergebnis auf einen ganzen Centbetrag. (20 P.)

Lösung a:



(5)

Sinnvollerweise arbeitet man hier mit der **Gegenwahrscheinlichkeit**. Dazu bestimmt man zunächst die Wahrscheinlichkeit für 3 intakte Transistoren und subtrahiert das Ergebnis von 1.

$$P(\geq 1) = 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \approx 14,40\% \quad (5)$$

Möglich ist die Lösung auch ohne die Methode der Gegenwahrscheinlichkeit. Das ist aber wesentlich umständlicher, weil die Wahrscheinlichkeiten von 7 möglichen Fällen addiert werden müssen. Der zugehörige Ansatz sähe dann so aus:

$$P(\geq 1) = \underbrace{\frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{5}{98} + \frac{95}{100} \cdot \frac{5}{99} \cdot \frac{94}{98} + \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98}}_{1 \text{ defekt}} + \underbrace{\frac{95}{100} \cdot \frac{5}{99} \cdot \frac{4}{98} + \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{4}{98} + \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{95}{98}}_{2 \text{ defekt}} + \underbrace{\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98}}_{3 \text{ defekt}}$$

Lösung b: Grundsätzlich sind 4 unterschiedliche Ergebnisse möglich:

1. $P(0d)$: Alle drei Transistoren sind ok.

2. $P(1d)$: Zwei Transistoren sind ok, einer defekt.

3. $P(2d)$: Ein Transistor ist ok, zwei sind defekt.

4. $P(3d)$: Alle drei Transistoren sind defekt.

Zunächst werden die Wahrscheinlichkeiten für diese vier Fälle für jeweils einen Zweig bestimmt. Wie man im Baum leicht erkennen kann, treten die Fälle 2 und 3 jeweils in drei verschiedenen Zweigen auf. Die zugehörigen Werte müssen daher dreifach berechnet werden.

$$P(0d) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \quad (1)$$

$$P(1d) = 3 \cdot \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{5}{98} \quad (1)$$

$$P(2d) = 3 \cdot \frac{95}{100} \cdot \frac{5}{99} \cdot \frac{4}{98} \quad (1)$$

$$P(3d) = \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} E &= P(0d) \cdot 3\text{€} + P(1d) \cdot 2\text{€} + P(2d) \cdot 1\text{€} + \underbrace{P(3d) \cdot 0\text{€}}_{\text{entfällt}} \\ &= \frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98} \cdot 3\text{€} + 3 \cdot \frac{95 \cdot 94 \cdot 5}{100 \cdot 99 \cdot 98} \cdot 2\text{€} + 3 \cdot \frac{95 \cdot 5 \cdot 4}{100 \cdot 99 \cdot 98} \cdot 1\text{€} \\ &\approx 2,568\text{€} + 0,671\text{€} + 0,059\text{€} \\ E &\approx 2,85\text{€} \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Erwartungswert beträgt 2,85€. (6)

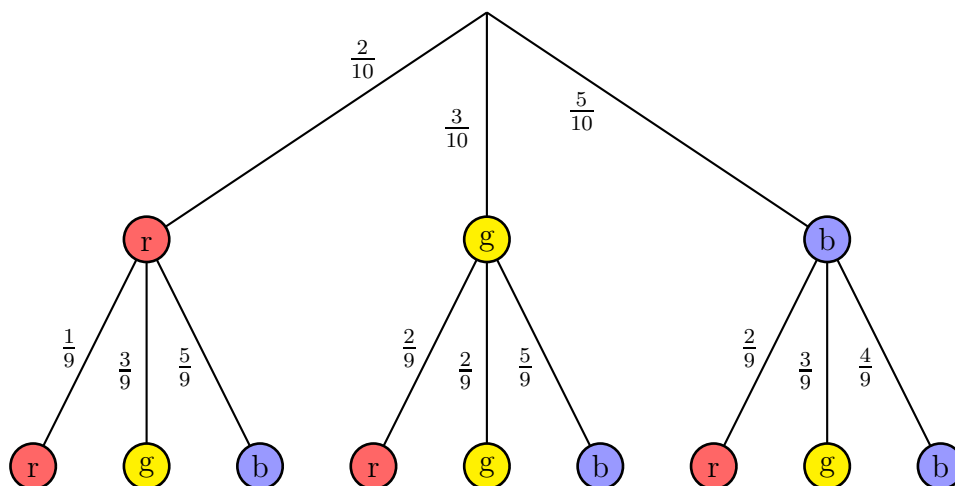
2.6 STOCHAS-26a

In einem Koffer liegen unsortiert 2 rote, 3 gelbe und 5 blaue T-Shirts. Sie nehmen willkürlich zwei T-Shirts heraus.

- a) Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen kompletten Ereignisbaum.
- b) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **zwei gelbe** T-Shirts entnommen haben.
- c) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **ein blaues** und **ein rotes** T-Shirt entnommen haben.
- d) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **zwei verschiedenfarbige** T-Shirts entnommen haben.

Lösung:

zu a)



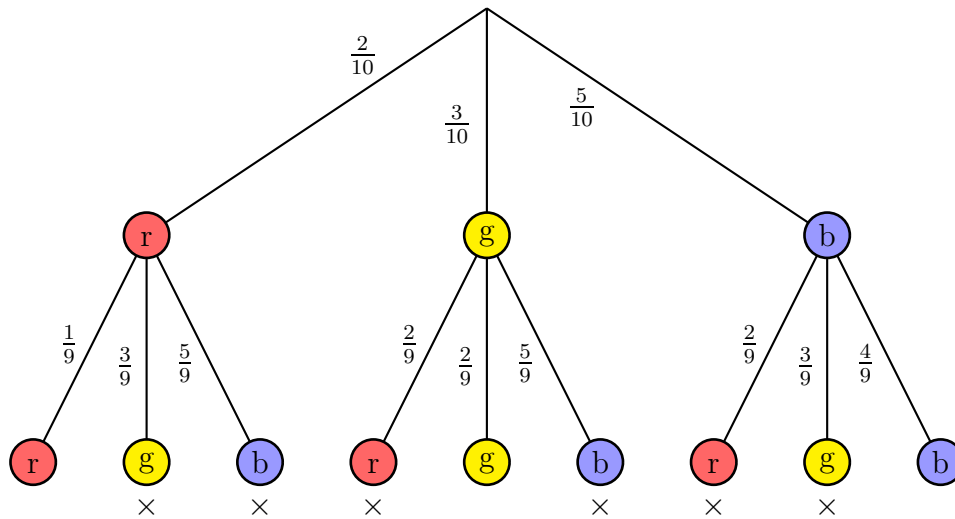
zu b) Hier führt **genau ein** Pfad zur Lösung, der genau in der Mitte.

$$P(g/g) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

zu c) Hier führen **zwei** Pfade zur Lösung, zuerst rot dann blau (Pfad 3) oder zuerst blau und dann rot (Pfad 7).

$$P(b/r) = \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{10}{90} + \frac{10}{90} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$$

zu d)



Zur Lösung gehören die 6 mit einem Kreuz \times markierten Pfade. Weil das so viele sind, lohnt es sich hier, mit der **Gegenwahrscheinlichkeit** zu arbeiten. Das sind dann nur drei Pfade. Die Wahrscheinlichkeit für gleiche Farbe nenne ich $P(gl)$, für ungleiche Farbe $P(ungl)$.

$$P(gl) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{90} + \frac{6}{90} + \frac{20}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$$

$$P(ungl) = 1 - P(gl) = \frac{45}{45} - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$$

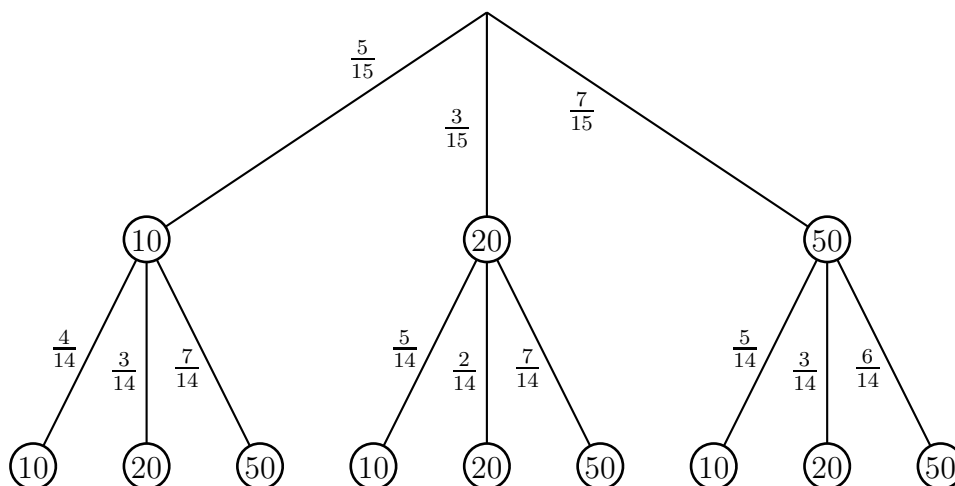
2.7 STOCHAS-26b

In einer Geldbörse liegen fünf 10-ct-Münzen, drei 20-ct-Münzen und sieben 50-ct-Münzen. Sie nehmen zwei Münzen aus der Geldbörse.

- a) Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen kompletten Ereignisbaum.
- b) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **zwei** 10-ct-Münzen entnommen haben.
- c) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie insgesamt **genau 30 Cent** aus der Geldbörse entnommen haben.
- d) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **zwei verschiedene** Münzen entnommen haben.

Lösung:

zu a)



zu b) Hier führt **genau ein** Pfad zur Lösung, der erste links.

$$P(10/10) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{20}{210} = \frac{2}{21}$$

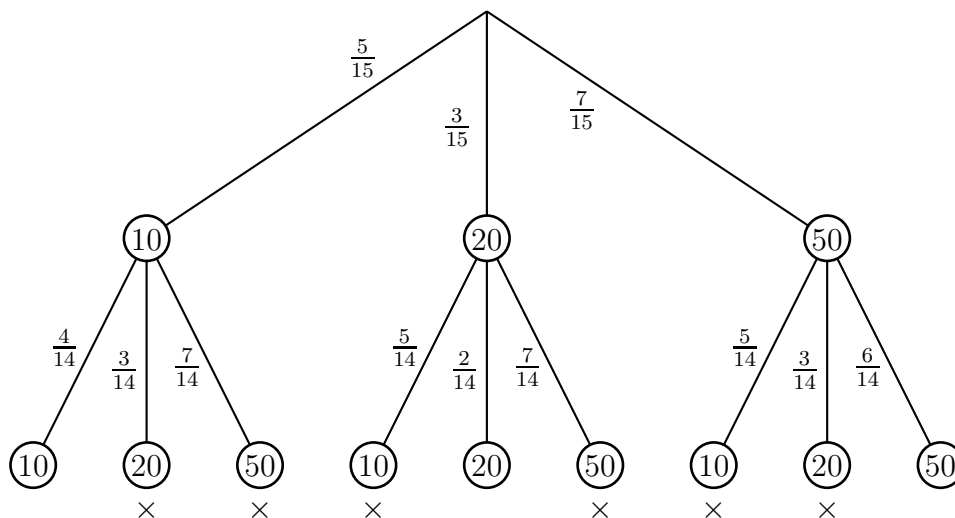
Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für zwei 10-ct-Münzen beträgt $\frac{2}{21} \approx 9,5\%$.

zu c) 30 Cent sind eine 10-ct-Münze und eine 20-ct-Münze. Wird zuerst die 10-ct-Münze entnommen, erhalten wir den zweiten Pfad von links, entnimmt man zuerst die 20-ct-Münze, haben wir den vierten Pfad. Die Pfadwahrscheinlichkeiten beider Pfade werden addiert.

$$P(30) = \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{3}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{15}{210} + \frac{15}{210} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für genau 30 Cent beträgt $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$.

zu d)



Für die Kombination von verschiedenen Münzen gibt es insgesamt 6 Pfade, die hier mit einem Kreuz \times markiert sind. Weil es so viele sind, empfiehlt es sich hier, mit der **Gegenwahrscheinlichkeit** zu rechnen. Die Gegenwahrscheinlichkeit (zwei gleiche Münzen) nenne ich $P(gl)$, die gesuchte Wahrscheinlichkeit (ungleiche Münzen) $P(ungl)$.

$$P(gl) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} + \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} + \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} = \frac{12}{210} + \frac{6}{210} + \frac{42}{210} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$$

$$P(ungl) = 1 - P(gl) = \frac{21}{21} - \frac{8}{21} = \frac{13}{21}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedene Münzen beträgt $\frac{13}{21} \approx 61,9\%$.

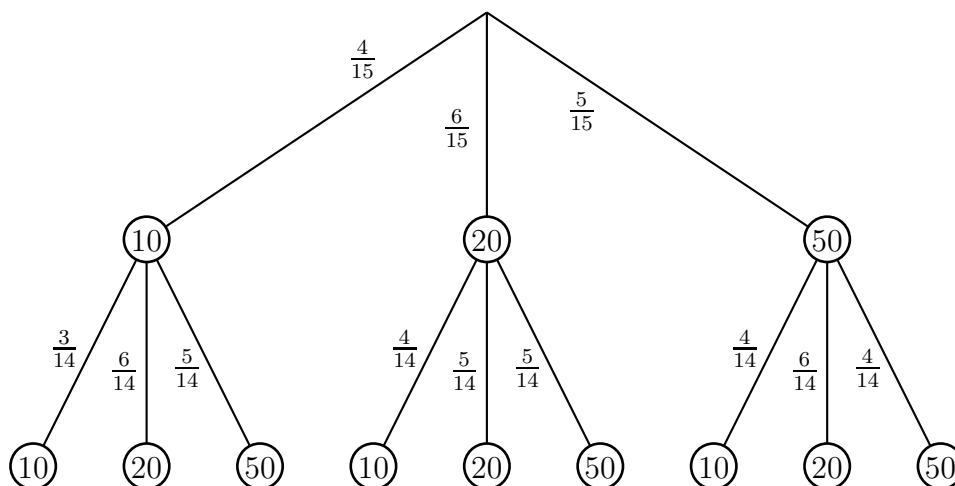
2.8 STOCHAS-26c

In einer Geldbörse liegen vier 10-ct-Münzen, sechs 20-ct-Münzen und fünf 50-ct-Münzen. Sie nehmen zwei Münzen aus der Geldbörse.

- a) Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen kompletten Ereignisbaum.
- b) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **zwei** 50-ct-Münzen entnommen haben.
- c) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie insgesamt **genau 60 Cent** aus der Geldbörse entnommen haben.
- d) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **zwei verschiedene** Münzen entnommen haben.

Lösung:

zu a)



zu b) Hier führt **genau ein** Pfad zur Lösung, der letzte rechts.

$$P(50/50) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{20}{210} = \frac{2}{21}$$

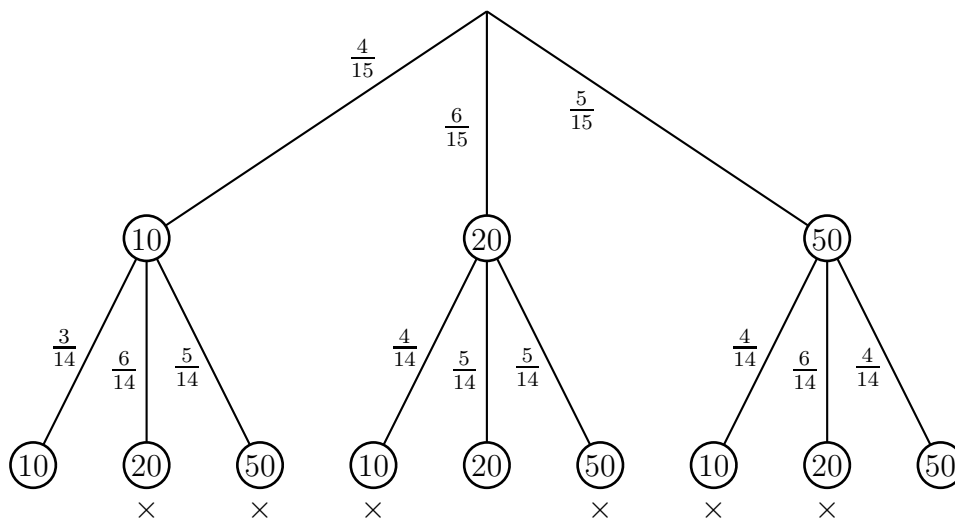
Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für zwei 50-ct-Münzen beträgt $\frac{2}{21} \approx 9,5\%$.

zu c) 60 Cent sind eine 10-ct-Münze und eine 50-ct-Münze. Wird zuerst die 10-ct-Münze entnommen, erhalten wir den dritten Pfad von links, entnimmt man zuerst die 50-ct-Münze, haben wir den siebten Pfad. Die Pfadwahrscheinlichkeiten beider Pfade werden addiert.

$$P(50) = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{20}{210} + \frac{20}{210} = \frac{40}{210} = \frac{4}{21}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für genau 60 Cent beträgt $\frac{4}{21} \approx 19,0\%$.

zu d)



Für die Kombination von verschiedenen Münzen gibt es insgesamt 6 Pfade, die hier mit einem Kreuz \times markiert sind. Weil es so viele sind, empfiehlt es sich hier, mit der **Gegenwahrscheinlichkeit** zu rechnen. Die Gegenwahrscheinlichkeit (zwei gleiche Münzen) nenne ich $P(gl)$, die gesuchte Wahrscheinlichkeit (ungleiche Münzen) $P(ungl)$.

$$P(gl) = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{12}{210} + \frac{30}{210} + \frac{20}{210} = \frac{62}{210} = \frac{31}{105}$$

$$P(ungl) = 1 - P(gl) = \frac{105}{105} - \frac{31}{105} = \frac{74}{105}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedene Münzen beträgt $\frac{74}{105} \approx 70,5\%$.

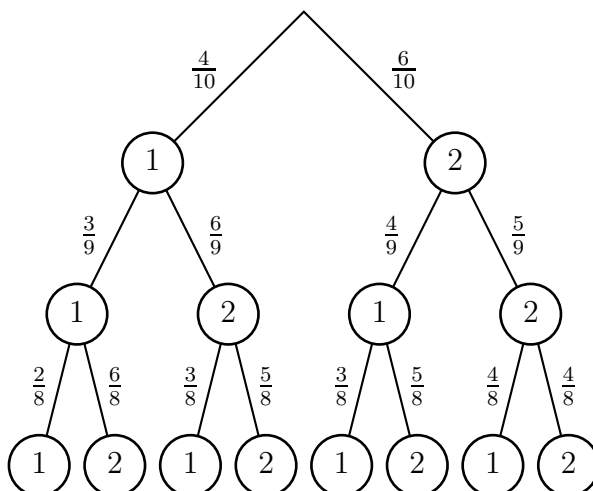
2.9 STOCHAS-27a

In einer Geldbörse liegen vier 1-€-Münzen und sechs 2-€-Münzen. Sie nehmen drei Münzen aus der Geldbörse heraus.

- Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen kompletten Ereignisbaum.
- Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **genau 6 €** entnommen haben.
- Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **genau 4 €** entnommen haben.
- Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **mindestens 4 €** entnommen haben.

Lösung:

zu a)

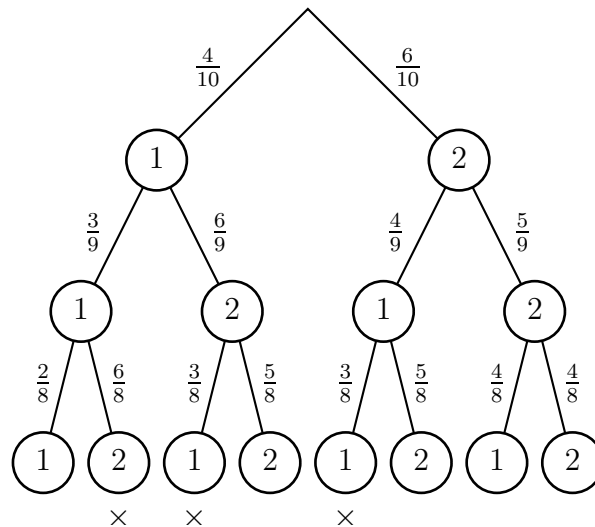


zu b) Einen Betrag von genau 6 € erhält man nur auf dem Pfad ganz rechts.

$$P(6) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für genau 6 € beträgt $\frac{1}{6} \approx 16,7\%$.

zu c)



Ein Betrag von 4€ bedeutet zwei 1-€-Münzen und eine 2-€-Münze. Dabei kann die 2-€-Münze als dritte, als zweite oder auch als erste Münze entnommen werden. Die zugehörigen drei Pfade sind hier mit einem Kreuz × markiert.

$$P(4) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{72}{720} + \frac{72}{720} + \frac{72}{720} = \frac{213}{720} = \frac{3}{10}$$

Alternativ kann man auch etwas einfacher rechnen. Bekanntlich spielt die **Reihenfolge** der Entnahme keine Rolle für die Wahrscheinlichkeit. Deswegen haben alle Pfade, die **zum selben Ergebnis** führen, auch die selbe Wahrscheinlichkeit. Es reicht also, nur einen Pfad zu berechnen und diesen Wert für 3 Pfade mit 3 zu multiplizieren:

$$P(4) = 3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{213}{720} = \frac{3}{10}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für genau 4€ beträgt $\frac{3}{10} = 30\%$.

zu d) Sobald auch nur eine einzige 2-€-Münze mit dabei ist, haben wir den geforderten Mindestbetrag von 4€ schon erreicht. Daher gehören fast **alle** Pfade zur Lösung, **außer dem ganz linken**. Deshalb empfiehlt es sich, hier mit der **Gegenwahrscheinlichkeit** zu rechnen. Das Gegenteil von **mindestens 4€** ist **weniger als 4€**, also drei 1-€-Münzen. Dazu gehört der ganz linke Pfad.

$$P(3) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$$

$$P(\geq 4) = 1 - P(3) = \frac{30}{30} - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 4€ beträgt $\frac{29}{30} \approx 96,7\%$.

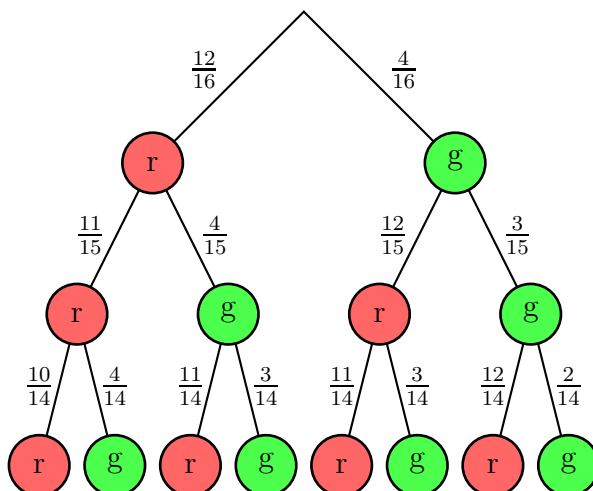
2.10 STOCHAS-27b

In einer Schachtel Schokolinsen liegen 12 rote und 4 grüne Schokolinsen. Sie nehmen nacheinander 3 Schokolinsen heraus, um sie aufzuessen.

- Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen kompletten Ereignisbaum.
- Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **genau 3 rote** Schokolinsen entnommen haben.
- Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **eine rote und zwei grüne** Schokolinsen entnommen haben.
- Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **höchstens eine rote** Schokolinse entnommen haben.

Lösung:

zu a)

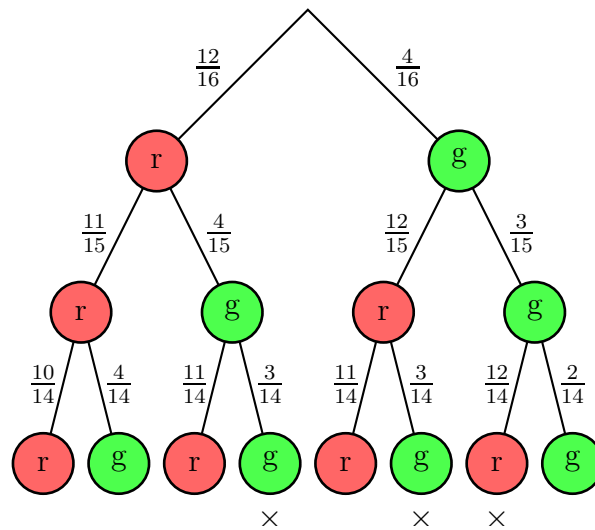


zu b)

$$P(3r) = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{1\,320}{3\,360} = \frac{11}{28}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für drei mal rot beträgt $\frac{11}{28} \approx 39,3\%$.

zu c)



Zur Lösung gehören die drei hier mit einem Kreuz \times markierten Pfade.

$$P(rgg) = \frac{12}{16} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{4}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{3}{14} + \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{12}{14} = \frac{144}{3360} + \frac{144}{3360} + \frac{144}{3360} = \frac{432}{3360} = \frac{9}{70}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für ein mal rot und zwei mal grün beträgt $\frac{9}{70} \approx 12,9\%$.

zu d) Hier arbeitet man am besten mit der **Gegenwahrscheinlichkeit**, denn außer dem ganz rechten Pfad gehören alle anderen dazu. Das Gegenteil von **höchstens einer roten** Schokolinse ist **keine rote** Schokolinse, bzw. **drei gelbe** Schokolinsen.

$$P(3g) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = \frac{24}{3360} = \frac{1}{140}$$

$$P(\leq 1r) = 1 - P(3g) = \frac{140}{140} - \frac{1}{140} = \frac{139}{140}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein mal rot beträgt $\frac{139}{140} \approx 99,3\%$.

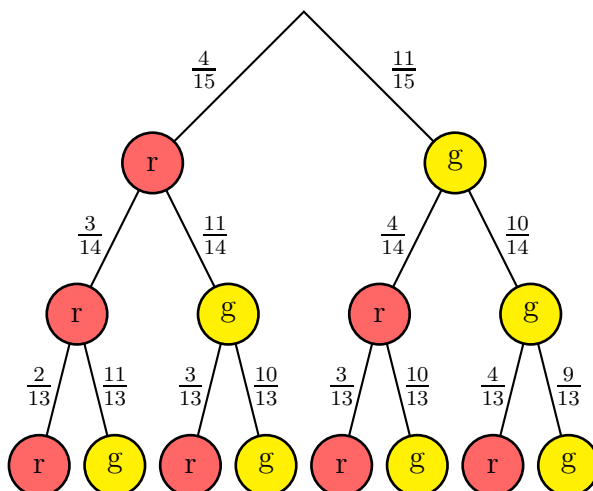
2.11 STOCHAS-27c

In einer Schachtel Schokolinsen liegen 4 rote und 11 gelbe Schokolinsen. Sie nehmen nacheinander 3 Schokolinsen heraus, um sie aufzuessen.

- a) Erstellen Sie zu diesem Vorgang einen kompletten Ereignisbaum.
- b) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **genau 3 gelbe** Schokolinsen entnommen haben.
- c) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **zwei rote und eine gelbe** Schokolinsen entnommen haben.
- d) Ermitteln Sie anhand des Ereignisbaumes die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie **mindestens eine gelbe** Schokolinse entnommen haben.

Lösung:

zu a)

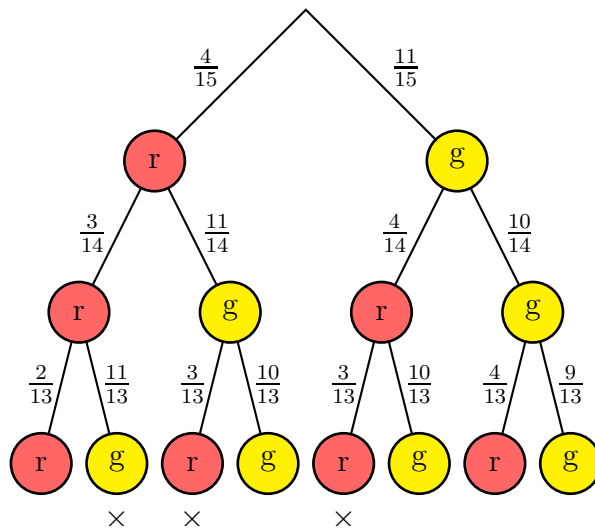


zu b)

$$P(3g) = \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{990}{2730} = \frac{33}{91}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für drei mal gelb beträgt $\frac{33}{91} \approx 36,3\%$.

zu c)



Zur Lösung gehören drei gleichwertige Pfade, die hier mit einem Kreuz \times markiert sind.

$$P(rrg) = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{11}{13} + \frac{4}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{3}{13} + \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = 3 \cdot \frac{132}{2730} = \frac{66}{455}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für zwei mal rot und einmal grün beträgt $\frac{66}{455} \approx 14,5\%$.

zu d) Zur Lösung gehören **alle** Pfade außer dem ganz linken. Daher ist es hier sinnvoll, mit der **Gegenwahrscheinlichkeit** zu arbeiten. Das Gegenteil von **mindestens einer gelben** Schokolinse ist **keine gelbe** Schokolinse bzw. **drei rote** Schokolinsen.

$$P(3r) = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13} = \frac{24}{2730} = \frac{4}{455}$$

$$P(\geq 1g) = 1 - P(3g) = \frac{455}{455} - \frac{4}{455} = \frac{451}{455}$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein mal gelb beträgt $\frac{451}{455} \approx 99,1\%$.