

Musterlösungen der Aufgaben unter LINGLSYS.WT

Inhaltsverzeichnis

1	Alle Lösungsverfahren	3
1.1	LINGLSYS-01	3
1.2	LINGLSYS-02	4
1.3	LINGLSYS-03	5
1.4	LINGLSYS-04	8
1.5	LINGLSYS-05	11
1.6	LINGLSYS-06	12
1.7	LINGLSYS-07	14
1.8	LINGLSYS-08	16
1.9	LINGLSYS-09	17
1.10	LINGLSYS-10	18
1.11	LINGLSYS-11	19
1.12	LINGLSYS-12	20
1.13	LINGLSYS-13	23
1.14	LINGLSYS-14	26
1.15	LINGLSYS-15	27
1.16	LINGLSYS-16	28
1.17	LINGLSYS-17	30
1.18	LINGLSYS-18	31
1.19	LINGLSYS-19	32
1.20	LINGLSYS-20	33
1.21	LINGLSYS-21	35
1.22	LINGLSYS-22	38
1.23	LINGLSYS-23	39
1.24	LINGLSYS-24	40
1.25	LINGLSYS-25	41
1.26	LINGLSYS-26	42
1.27	LINGLSYS-27	43
1.28	LINGLSYS-28	45
1.29	LINGLSYS-29	47
1.30	LINGLSYS-30	49
1.31	LINGLSYS-31a	50
1.32	LINGLSYS-31b	51
1.33	LINGLSYS-31c	52
1.34	LINGLSYS-32	53
1.35	LINGLSYS-33	54
1.36	LINGLSYS-34	55
1.37	LINGLSYS-35a	56
1.38	LINGLSYS-35b	57

1.39	LINGLSYS-35c	58
1.40	LINGLSYS-36	59
1.41	LINGLSYS-37	60
1.42	LINGLSYS-38	61
1.43	LINGLSYS-39	64
1.44	LINGLSYS-40a	65
1.45	LINGLSYS-40b	66
1.46	LINGLSYS-41	67
1.47	LINGLSYS-42	70
1.48	LINGLSYS-43	71
1.49	LINGLSYS-44	72
1.50	LINGLSYS-45	73
1.51	LINGLSYS-46	74
2	Nur Einsetzungsverfahren	75
2.1	LINGLSYS-47a	75
2.2	LINGLSYS-47b	76
2.3	LINGLSYS-47c	77
2.4	LINGLSYS-47d	78
2.5	LINGLSYS-48a	79
2.6	LINGLSYS-48b	80
2.7	LINGLSYS-48c	81
2.8	LINGLSYS-48d	82
2.9	LINGLSYS-49a	83
2.10	LINGLSYS-49b	84
2.11	LINGLSYS-49c	85
2.12	LINGLSYS-49d	86
2.13	LINGLSYS-50a	87
2.14	LINGLSYS-50b	88
2.15	LINGLSYS-50c	90
2.16	LINGLSYS-50d	92

1 Alle Lösungsverfahren

1.1 LINGLSYS-01

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 9x & -5y = 16 \\ (2) & 7x & -5y = 8 \end{array}$$

Lösung: Bei diesem Gleichungssystem bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an, da die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen übereinstimmen. Da die Vorzeichen **gleich** sind, muss **subtrahiert** werden.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 9x & -5y = 16 \quad | \\ (2) & 7x & -5y = 8 \quad | - \\ \hline & 2x & = 8 \quad | : 2 \\ & x & = 4 \quad (10) \end{array}$$

Die Variable y wird durch Einsetzen in eine der beiden Ursprungsgleichungen bestimmt. Ich wähle dazu willkürlich Gleichung (2) aus:

$$\begin{array}{rcl} 7x - 5y & = & 8 \\ 7 \cdot 4 - 5y & = & 8 \\ 28 - 5y & = & 8 \quad | - 28 \\ -5y & = & -20 \quad | : (-5) \\ y & = & 4 \quad (10) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(4|4)\}$

1.2 LINGLSYS-02

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{2}{x+1} + 1 & = \frac{2y}{x+1} \\ (2) & 3 \cdot (x-1) - 2 \cdot (3x-2y) & = 2 \end{array}$$

Lösung: Bevor wir das Gleichungssystem lösen können, müssen wir es sinnvollerweise in die Normalform bringen. Das führe ich für jede Gleichung einzeln durch. Beginnen wir mit Gleichung (1).

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{x+1} + 1 & = & \frac{2y}{x+1} \quad | \cdot (x+1) \\ 2 + 1 \cdot (x+1) & = & 2y \\ 2 + x + 1 & = & 2y \\ x + 3 & = & 2y \quad | - 3 - 2y \\ x - 2y & = & -3 \end{array}$$

Es folgt Gleichung (2).

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot (x-1) - 2 \cdot (3x-2y) & = & 2 \\ 3x - 3 - 6x + 4y & = & 2 \quad | + 3 \\ -3x + 4y & = & 5 \end{array}$$

Damit sieht das komplette Gleichungssystem wie folgt aus:

$$\begin{array}{lcl} (1) & x - 2y & = -3 \\ (2) & -3x + 4y & = 5 \end{array}$$

Für die Lösung bietet sich hier das **Einsetzungsverfahren** an, da in Gleichung (1) die Variable x allein ohne Koeffizienten auftritt. Wir lösen also Gleichung (1) nach x auf.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & -3 \quad | + 2x \\ x & = & 2y - 3 \end{array}$$

Das Ergebnis setzen wir in Gleichung (2) ein:

$$\begin{array}{rcl} -3x + 4y & = & 5 \\ -3 \cdot (2y - 3) + 4y & = & 5 \\ -6y + 9 + 4y & = & 5 \quad | - 9 \\ -2y & = & -4 \quad | : (-2) \\ y & = & 2 \end{array}$$

Das Ergebnis setzen wir in die umgestellte Gleichung (1) ein:

$$x = 2y - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

Das Gesamtergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(1|2)\}$

1.3 LINGLSYS-03

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3x & +5y & +z & = & 2 \\ (2) & 5x & +8y & +2z & = & 0 \\ (3) & 2x & -2y & -3z & = & 11 \end{array}$$

Lösungsvariante 1: Bei diesem Gleichungssystem bietet sich die Cramersche Regel an, da wir nicht nur zwei, sondern drei Gleichungen mit drei Variablen haben. Bestimmen wir zuerst die Variable x .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 11 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}}$$

Zum Auflösen der Determinanten verwende ich im Zähler und im Nenner jeweils den Satz von Sarrus. Damit der übersichtlicher angewendet werden kann, schreibe ich jeweils die erste und zweite Spalte noch einmal hinter die Determinanten.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 8 \\ 11 & -2 & -3 & 11 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{2 \cdot 8 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 \cdot 11 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) - 11 \cdot 8 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 0 \cdot 5}{3 \cdot 8 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot (-2) - 2 \cdot 8 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 5 \cdot 5} \\ &= \frac{-48 + 110 + 0 - 88 + 8 - 0}{-72 + 20 - 10 - 16 + 12 + 75} \\ &= \frac{-18}{9} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Nach dem gleichen Muster setze ich die Lösung für y an.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 11 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}}$$

Die Nenner-Determinante ist schon bekannt, daher setze ich dort sofort die 9 ein. Im Zähler schreibe ich noch einmal die erste und zweite Spalte dahinter. Damit können wir alles ausrechnen.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 11 & -3 & 2 & 11 \end{vmatrix}}{9} \\
 &= \frac{3 \cdot 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 11 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 11 \cdot 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 5 \cdot 2}{9} \\
 &= \frac{0 + 8 + 55 - 0 - 66 + 30}{9} \\
 &= \frac{27}{9} \\
 y &= 3
 \end{aligned}$$

Die Lösung für z könnte man nun zwar auch mit der Cramerschen Regel bestimmen, einfacher ist aber das Einsetzen der beiden gefundenen Werte für x und y in eine der Ursprungs-Gleichungen.

Ich setze die Werte in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned}
 3x + 5y + z &= 2 \\
 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + z &= 2 \\
 -6 + 15 + z &= 2 \\
 9 + z &= 2 \quad | -9 \\
 z &= -7
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(-2|3|-7)\}$

Lösungsvariante 2: Alternativ könnte man auch das **Einsetzungsverfahren** verwenden. Dazu löse ich Gleichung (1) nach z auf.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 5y + z & = & 2 \\ z & = & 2 - 3x - 5y \end{array} \quad | - 3x - 5y$$

Diesen Term setze ich in **beide anderen** Gleichungen ein.

$$\begin{array}{rcl} (2) & 5x + 8y + 2z & = 0 \\ (3) & 2x - 2y - 3z & = 11 \\ \hline (2) & 5x + 8y + 2 \cdot (2 - 3x - 5y) & = 0 \\ (3) & 2x - 2y - 3 \cdot (2 - 3x - 5y) & = 11 \\ \hline (2) & 5x + 8y + 4 - 6x - 10y & = 0 & | - 4 \\ (3) & 2x - 2y - 6 + 9x + 15y & = 11 & | + 6 \\ \hline (2) & -x - 2y & = -4 \\ (3) & 11x + 13y & = 17 \end{array}$$

Für den zweiten Reduktionsschritt stelle ich Gleichung (2) nach x um.

$$\begin{array}{rcl} -x - 2y & = & -4 \\ -x & = & -4 + 2y \\ x & = & 4 - 2y \end{array} \quad \begin{array}{l} | + 2y \\ | \cdot (-1) \end{array}$$

Diesen Ergebnisterm setze ich in Gleichung (3) ein.

$$\begin{array}{rcl} 11x + 13y & = & 17 \\ 11 \cdot (4 - 2y) + 13y & = & 17 \\ 44 - 22y + 13y & = & 17 & | - 44 \\ -9y & = & -27 & | : (-9) \\ y & = & 3 \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$x = 4 - 2y = 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Beide Ergebnisse werden in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt:

$$z = 2 - 3x - 5y = 2 - 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 = 2 + 6 - 15 = -7$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(-2|3|-7)\}$

1.4 LINGLSYS-04

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 2(x+2y) - 3(y-z) + 3 & = -2x - 2 \\ (2) & 3(2x-z) + 2(2x+y) - 4(3y-4z) & = 21 \\ (3) & 2(3x-6) - 4(y+4) + 2(z+4) & = 2 \end{array}$$

Lösung: Bevor man sinnvoll daran gehen kann, das Gleichungssystem zu lösen, sollte man es in die Normalform bringen. Das führe ich jetzt mit jeder Gleichung einzeln durch.

Ich beginne bei Gleichung (1).

$$\begin{array}{lcl} (1) & 2(x+2y) - 3(y-z) + 3 & = -2x - 2 \\ & 2x + 4y - 3y + 3z + 3 & = -2x - 2 \quad | -3 + 2x \\ (1) & 4x + y + 3z & = -5 \end{array}$$

Es folgt Gleichung (2).

$$\begin{array}{lcl} (2) & 3(2x-z) + 2(2x+y) - 4(3y-4z) & = 21 \\ & 6x - 3z + 4x + 2y - 12y + 16z & = 21 \\ (2) & 10x - 10y + 13z & = 21 \end{array}$$

Nun noch Gleichung (3).

$$\begin{array}{lcl} (3) & 2(3x-6) - 4(y+4) + 2(z+4) & = 2 \\ & 6x - 12 - 4y - 16 + 2z + 8 & = 2 \\ & 6x - 4y + 2z - 20 & = 2 \quad | +20 \\ (3) & 6x - 4y + 2z & = 22 \end{array}$$

Ich schreibe die umgeformten Gleichungen als Gleichungssystem zusammen.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 4x & +y & +3z & = & -5 \\ (2) & 10x & -10y & +13z & = & 21 \\ (3) & 6x & -4y & +2z & = & 22 \end{array}$$

Lösungsvariante 1: Cramersche Regel Beginnen wir mit x .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 21 & -10 & 13 \\ 22 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 10 & -10 & 13 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix}}$$

Damit die Auflösung mit dem Satz von Sarrus besser klappt, schreibe ich die erste und zweite Spalte jeweils dahinter und löse auf.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 21 & -10 & 13 \\ 22 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 1 \\ 21 & -10 \\ 22 & -4 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 10 & -10 & 13 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 10 & -10 \\ 6 & -4 \end{matrix}} \\
 &= \frac{-5 \cdot (-10) \cdot 2 + 1 \cdot 13 \cdot 22 + 3 \cdot 21 \cdot (-4) - 22 \cdot (-10) \cdot 3 - (-4) \cdot 13 \cdot (-5) - 2 \cdot 21 \cdot 1}{4 \cdot (-10) \cdot 2 + 1 \cdot 13 \cdot 6 + 3 \cdot 10 \cdot (-4) - 6 \cdot (-10) \cdot 3 - (-4) \cdot 13 \cdot 4 - 2 \cdot 10 \cdot 1} \\
 &= \frac{100 + 286 - 252 + 660 - 260 - 42}{-80 + 78 - 120 + 180 + 208 - 20} \\
 &= \frac{492}{246} \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

Als nächste Variable bestimmen wir y . Anstelle der eigentlich notwendigen Nennerdeterminante schreibe ich sofort das Ergebnis des eben berechneten Nenners mit 246 hin. Außerdem schreibe ich sofort die beiden Hilfsspalten in den Zähler.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 10 & 21 & 13 \\ 6 & 22 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -5 \\ 10 & 21 \\ 6 & 22 \end{matrix}}{246} \\
 &= \frac{4 \cdot 21 \cdot 2 + (-5) \cdot 13 \cdot 6 + 3 \cdot 10 \cdot 22 - 6 \cdot 21 \cdot 3 - 22 \cdot 13 \cdot 4 - 2 \cdot 10 \cdot (-5)}{246} \\
 &= \frac{168 - 390 + 660 - 378 - 1144 + 100}{246} \\
 &= \frac{-984}{246} \\
 y &= -4
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der letzten noch fehlenden Variablen z setze ich die gefundenen Ergebnisse für x und y in aufgelöste Gleichung (3) ein.

$$\begin{aligned}
 6x - 4y + 2z &= 22 \\
 6 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) + 2z &= 22 \\
 12 + 16 + 2z &= 22 \\
 28 + 2z &= 22 \quad | -28 \\
 2z &= -6 \quad | :2 \\
 z &= -3
 \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Einsetzungsverfahren

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 4x & +y & +3z & = -5 \\ (2) & 10x & -10y & +13z & = 21 \\ (3) & 6x & -4y & +2z & = 22 \end{array}$$

Man kann Gleichung (1) gut nach y auflösen.

$$\begin{array}{rcl} 4x + y + 3z & = & -5 \\ y & = & -5 - 4x - 3z \end{array} \quad | -4x - 3z$$

Das Ergebnis wird in (2) und (3) eingesetzt.

$$\begin{array}{rclcl} (2) & 10x - 10 \cdot (-5 - 4x - 3z) + 13z & = & 21 & \\ (3) & 6x - 4 \cdot (-5 - 4x - 3z) + 2z & = & 22 & \\ \hline (2) & 10x + 50 + 40x + 30z + 13z & = & 21 & | -50 \\ (3) & 6x + 20 + 16x + 12z + 2z & = & 22 & | -20 \\ \hline (2) & 50x + 43z & = & -29 & \\ (3) & 22x + 14z & = & 2 & \end{array}$$

Für den nächsten Reduktionsschritt kann natürlich wieder jedes beliebige Verfahren gewählt werden. Willkürlich wähle ich hier wieder das Einsetzungsverfahren und löse Gleichung (2) nach x auf.

$$\begin{array}{rclcl} (2) & 50x + 43z & = & -29 & | -43z \\ & 50x & = & -29 - 43z & | : 50 \\ & x & = & -0,58 - 0,86z & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (3) eingesetzt.

$$\begin{array}{rclcl} & 22x + 14z & = & 2 & \\ & 22 \cdot (-0,58 - 0,86z) + 14z & = & 2 & \\ & -12,76 - 18,92z + 14z & = & 2 & | +12,76 \\ & -4,92z & = & 14,76 & | : (-4,92) \\ & z & = & -3 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} x & = & -0,58 - 0,86z \\ & = & -0,58 - 0,86 \cdot (-3) \\ & = & -0,58 + 2,58 \\ x & = & 2 \end{array}$$

Die Ergebnisse werden in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} y & = & -5 - 4x - 3z \\ & = & -5 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) \\ & = & -5 - 8 + 9 \\ y & = & -4 \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(2 | -4 | -3)\}$

1.5 LINGLSYS-05

Berechnen Sie die nachfolgende Determinante!

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Lösung: Zur Vereinfachung der Rechnung sollte man möglichst viele Nullen in eine Zeile oder Spalte bringen. In dieser Form ist es maximal eine Null.

Ich will versuchen, drei Nullen in Spalte 3 zu erzeugen. Dazu addiere ich das 3-fache der 3. Zeile zu Zeile 2.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 11 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Eine weitere 0 erhalte ich, indem ich das (-2) -fache der 3. Zeile zur 4. Zeile addiere.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 11 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 11 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -7 & -8 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Jetzt kann ich nach der 3. Spalte entwickeln. Es bleibt nur eine einzige 3-reihige Unterdeterminante übrig, da alle anderen mit 0 multipliziert werden. Das Vorzeichen von a_{33} ist laut Vorzeichentabelle positiv, daher bleibt die -1 als Vorfaktor erhalten.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 11 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -7 & -8 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 11 & -4 \\ -7 & -8 & 7 \end{vmatrix}$$

Zur Berechnung dieser 3-reihigen Determinante verwende ich den Satz von Sarrus. Damit er einfacher anzuwenden ist, schreibe ich die beiden ersten Spalten noch einmal als Hilfe dahinter.

$$\begin{aligned} D &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 11 & -4 & 1 & 11 \\ -7 & -8 & 7 & -7 & -8 \end{vmatrix} \\ &= -\left(2 \cdot 11 \cdot 7 + (-3) \cdot (-4) \cdot (-7) + (-1) \cdot 1 \cdot (-8) - (-7) \cdot 11 \cdot (-1) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - (-8) \cdot (-4) \cdot 2 - 7 \cdot 1 \cdot (-3)\right) \\ &= -(154 - 84 + 8 - 77 - 64 + 21) \\ &= -(-42) \\ D &= 42 \end{aligned}$$

1.6 LINGLSYS-06

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 4x & +5y = -2 \\ (2) & -2x & -4y = -2 \end{array}$$

Lösung:

Lösungsvariante 1: Einsetzungsverfahren Dazu stelle ich Gleichung (2) nach x um.

$$\begin{array}{rcl} -2x - 4y & = & -2 \quad | + 4y \\ -2x & = & -2 + 4y \quad | : (-2) \\ x & = & 1 - 2y \quad (7) \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 4x + 5y & = & -2 \quad | \text{Einsetzen:} \\ 4(1 - 2y) + 5y & = & -2 \\ 4 - 8y + 5y & = & -2 \quad | - 4 \\ -3y & = & -6 \quad | : (-3) \\ y & = & 2 \quad (7) \end{array}$$

Die Variable x bestimmen wir durch Einsetzen in die umgestellte Gleichung (2).

$$x = 1 - 2y = 1 - 2 \cdot 2 = -3 \quad (6)$$

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren

$$\begin{array}{rcl} (1) & 4x & +5y = -2 \\ (2) & -2x & -4y = -2 \quad | \cdot 2 \\ \hline (1) & 4x & +5y = -2 \quad | \\ (2) & -4x & -8y = -4 \quad | + \\ \hline & & -3y = -6 \quad | : (-3) \\ & & y = 2 \quad (12) \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (1) ein.

$$\begin{array}{rcl} 4x + 5y & = & -2 \\ 4x + 5 \cdot 2 & = & -2 \quad | - 10 \\ 4x & = & -12 \quad | : 4 \\ x & = & -3 \quad (8) \end{array}$$

Lösungsvariante 3: Cramersche Regel

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{8 - (-10)}{-16 - (-10)} = \frac{18}{-6} = -3 \quad (12)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-8 - 4}{-12} = \frac{-12}{-6} = 2 \quad (8)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(-3|2)\}$

1.7 LINGLSYS-07

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 12x & +3y = 24 \\ (2) & 4x & -6y = -20 \end{array}$$

Lösung:

Variante 1: Das **Einsetzungsverfahren**. Dazu stelle ich Gleichung (1) nach y um.

$$\begin{array}{rcl} 12x + 3y & = & 24 \quad | -12x \\ 3y & = & 24 - 12x \quad | :3 \\ y & = & 8 - 4x \quad (7) \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 4x - 6y & = & -20 \quad | \text{Einsetzen:} \\ 4x - 6(8 - 4x) & = & -20 \\ 4x - 48 + 24x & = & -20 \quad | +48 \\ 28x & = & 28 \quad | :28 \\ x & = & 1 \quad (7) \end{array}$$

Die Variable y bestimmen wir durch Einsetzen in die umgestellte Gleichung (1).

$$y = 8 - 4x = 8 - 4 \cdot 1 = 4 \quad (6)$$

Variante 2: Das **Additions-/Subtraktionsverfahren**. Dazu multipliziere ich Gleichung (1) mit 2. Dann können die Gleichungen addiert werden.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 12x & +3y = 24 \quad | \cdot 2 \\ (2) & 4x & -6y = -20 \\ \hline (1) & 24x & +6y = 48 \quad | \\ (2) & 4x & -6y = -20 \quad | + \\ \hline & 28x & = 28 \quad | :28 \\ & x & = 1 \quad (12) \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein.

$$\begin{array}{rcl} 4x - 6y & = & -20 \\ 4 \cdot 1 - 6y & = & -20 \quad | -4 \\ -6y & = & -24 \quad | :(-6) \\ y & = & 4 \quad (8) \end{array}$$

Variante 3: Die **Cramersche Regel**.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 \\ -20 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{-144 - (-60)}{-72 - 12} = \frac{-84}{-84} = 1 \quad (12)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 24 \\ 4 & -20 \end{vmatrix}}{-84} = \frac{-240 - 96}{-84} = \frac{-336}{-84} = 4 \quad (8)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(1|4)\}$

1.8 LINGLSYS-08

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & \frac{3x}{4} - \frac{5y}{3} & = 1 \\ (2) & \frac{5x}{8} + \frac{2y}{3} & = 7 \end{array}$$

Lösung: Vor Beginn der eigentlichen Lösung sollte man die Brüche im Gleichungssystem auflösen. Das geschieht jeweils durch Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$\begin{array}{rcl} (1) & \frac{3x}{4} - \frac{5y}{3} & = 1 \quad | \cdot 12 \\ (2) & \frac{5x}{8} + \frac{2y}{3} & = 7 \quad | \cdot 24 \\ \hline (1) & 9x - 20y & = 12 \\ (2) & 15x + 16y & = 168 \quad (4) \end{array}$$

Ich wende sich das **Additionsverfahren** an.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 9x - 20y & = 12 \quad | \cdot 4 \\ (2) & 15x + 16y & = 168 \quad | \cdot 5 \\ \hline (1) & 36x - 80y & = 48 \quad | \\ (2) & 75x + 80y & = 840 \quad | + \\ \hline & 111x & = 888 \quad | : 111 \\ & x & = 8 \quad (10) \end{array}$$

Zur Bestimmung von y setze ich das gefundene Ergebnis für x in die umgestellte Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcl} 9x - 20y & = & 12 \\ 9 \cdot 8 - 20y & = & 12 \quad | - 72 \\ -20y & = & -60 \quad | : (-20) \\ y & = & 3 \quad (6) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(8|3)\}$

1.9 LINGLSYS-09

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{7x}{5} - \frac{2y}{3} & = 1 \\ (2) & \frac{2x}{5} + \frac{4y}{9} & = 6 \end{array}$$

Lösung: Vor Beginn der eigentlichen Lösung sollte man das Gleichungssystem in die Normalform bringen.

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{7x}{5} - \frac{2y}{3} & = 1 \quad | \cdot 15 \\ (2) & \frac{2x}{5} + \frac{4y}{9} & = 6 \quad | \cdot 45 \\ \hline (1) & 21x - 10y & = 15 \\ (2) & 18x + 20y & = 270 \quad (4) \end{array}$$

Es bietet sich das **Additionsverfahren** an.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 21x - 10y & = 15 \\ (2) & 18x + 20y & = 270 \quad | : 2 \\ \hline (1) & 21x - 10y & = 15 \quad | \\ (2) & 9x + 10y & = 135 \quad | + \\ \hline & 30x & = 150 \quad | : 30 \\ & x & = 5 \quad (10) \end{array}$$

Zur Bestimmung von y setzen wir den gefundenen x -Wert in die umgestellte Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{lcl} 21x - 10y & = & 15 \quad | \text{ Einsetzen:} \\ 21 \cdot 5 - 10y & = & 15 \\ 105 - 10y & = & 15 \quad | - 105 \\ -10y & = & -90 \quad | : (-10) \\ y & = & 9 \quad (6) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(5|9)\}$

1.10 LINGLSYS-10

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 3x & +2y & -z & = & -1 \\ (2) & 2x & -5y & & = & 14 \\ (3) & -2x & +y & -3z & = & -15 \end{array}$$

Lösung: Bei einem Gleichungssystem in dieser Form bietet sich die **Cramersche Regel** als Lösungsverfahren an.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 14 & -5 & 0 \\ -15 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 14 & -5 \\ -15 & 1 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -2 & 1 \end{matrix}} \\ &= \frac{-15 + 0 - 14 + 75 - 0 + 84}{45 + 0 - 2 + 10 - 0 + 12} \\ &= \frac{130}{65} \\ x &= 2 \quad (10) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Variablen y kann dieses Ergebnis in Gleichung (2) eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rclcl} 2x - 5y & = & 14 \\ 2 \cdot 2 - 5y & = & 14 & | -4 \\ -5y & = & 10 & | : (-5) \\ y & = & -2 & (6) \end{array}$$

Die Ergebnisse für x und y setze ich in Gleichung (1) ein und erhalte z .

$$\begin{array}{rclcl} 3x + 2y - z & = & -1 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) - z & = & -1 \\ 6 - 4 - z & = & -1 & | -2 \\ -z & = & -3 & | \cdot (-1) \\ z & = & 3 & (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(2 | -2 | 3)\}$

1.11 LINGLSYS-11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} (1) & 4x & +2y & -2z & = & 4 \\ (2) & 2x & & -4z & = & -2 \\ (3) & -3x & -y & +4z & = & 1 \end{array}$$

Lösung: Bei einem Gleichungssystem in dieser Form bietet sich die **Cramersche Regel** als Lösungsverfahren an.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{matrix}} \\ &= \frac{0 - 8 - 4 - 0 - 16 + 16}{0 + 24 + 4 - 0 - 16 - 16} \\ &= \frac{-12}{-4} \\ x &= 3 \quad (10) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein, um z zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 2x - 4z & = & -2 \\ 2 \cdot 3 - 4z & = & -2 & | -6 \\ -4z & = & -8 & | : (-4) \\ z & = & 2 & (6) \end{array}$$

Die Ergebnisse für x und z setze ich in Gleichung (1) ein und erhalte y .

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 4x + 2y - 2z & = & 4 \\ 4 \cdot 3 + 2y - 2 \cdot 2 & = & 4 \\ 12 + 2y - 4 & = & 4 & | -8 \\ 2y & = & -4 & | : 2 \\ y & = & -2 & (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(3 | -2 | 2)\}$

1.12 LINGLSYS-12

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 2(x + 2z) - 3(z - y) + 2 & = -2x - 3 \\ (2) & 2(2x + z) + 3(2x - y) - 4(4y - 3z) & = 21 \\ (3) & 5(2x - 4) + 3(y + 5) - 2(z + 4) & = 6 \end{array}$$

Lösung: Zunächst muss das Gleichungssystem in die Normalform gebracht werden.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 2(x + 2z) - 3(z - y) + 2 & = -2x - 3 \\ (2) & 2(2x + z) + 3(2x - y) - 4(4y - 3z) & = 21 \\ (3) & 5(2x - 4) + 3(y + 5) - 2(z + 4) & = 6 \\ \hline (1) & 2x + 4z - 3z + 3y + 2 & = -2x - 3 \quad | + 2x - 2 \\ (2) & 4x + 2z + 6x - 3y - 16y + 12z & = 21 \\ (3) & 10x - 20 + 3y + 15 - 2z - 8 & = 6 \quad | + 13 \\ \hline (1) & 4x + 3y + z & = -5 \\ (2) & 10x - 19y + 14z & = 21 \\ (3) & 10x + 3y - 2z & = 19 \quad (6) \end{array}$$

Für die weitere Lösung gibt es mehrere Lösungsvarianten.

Lösungsvariante 1: Die Cramersche Regel

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 21 & -19 & 14 \\ 19 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 10 & -19 & 14 \\ 10 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-5 \cdot 3 \cdot 1 + 21 \cdot (-19) \cdot 14 + 19 \cdot 3 \cdot (-2)}{4 \cdot 3 \cdot 1 + 10 \cdot (-19) \cdot 14 + 10 \cdot 3 \cdot (-2)} \\ &= \frac{-15 - 7077 - 76}{12 - 2660 - 60} \\ &= \frac{-7158}{-2708} \\ &= \frac{1368}{684} \\ x &= 2 \quad (7) \end{aligned}$$

Entsprechend rechne ich y aus. Dabei setze ich sofort das bekannte Ergebnis für die Nennerdeterminante ein.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 10 & 21 & 14 \\ 10 & 19 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 10 & 21 \\ 10 & 19 \end{vmatrix}}{684} \\
 &= \frac{-168 - 700 + 190 - 210 - 1064 - 100}{684} \\
 &= \frac{-2052}{684} \\
 y &= -3 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von z setze ich die beiden Ergebnisse in die vereinfachte Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned}
 4x + 3y + z &= -5 \\
 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + z &= -5 \\
 8 - 9 + z &= -5 \quad | +1 \\
 z &= -4 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Das Einsetzungsverfahren

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 4x + 3y + z &= -5 \\
 (2) \quad 10x - 19y + 14z &= 21 \\
 (3) \quad 10x + 3y - 2z &= 19
 \end{aligned}$$

Es bietet sich an, die Gleichung (1) nach der Variablen z aufzulösen.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 4x + 3y + z &= -5 \quad | -4x - 3y \\
 z &= -5 - 4x - 3y \quad (2)
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in (2) und (3) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 10x - 19y + 14 \cdot (-5 - 4x - 3y) &= 21 \\
 (3) \quad 10x + 3y - 2 \cdot (-5 - 4x - 3y) &= 19 \\
 \hline
 (4) \quad 10x - 19y - 70 - 56x - 42y &= 21 \quad | +70 \\
 (5) \quad 10x + 3y + 10 + 8x + 6y &= 19 \quad | -10 \\
 \hline
 (4) \quad -46x - 61y &= 91 \\
 (5) \quad 18x + 9y &= 9 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Da sich weder Gleichung (4) noch (5) ohne Brüche bequem nach x oder y auflösen lässt, verwende ich für den nächsten Reduktionsschritt das Additions-/Subtraktionsverfahren.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad -46x - 61y &= 91 \quad | \cdot 9 \\
 (5) \quad 18x + 9y &= 9 \quad | \cdot 23 \\
 \hline
 (4) \quad -414x - 549y &= 819 \quad | \\
 (5) \quad 414x + 207y &= 207 \quad | + \\
 \hline
 -342y &= 1026 \quad | : (-342) \\
 y &= -3 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis setze ich in (5) ein.

$$\begin{array}{rcll} (5) & 18x + 9y & = & 9 \\ & 18x + 9 \cdot (-3) & = & 9 \\ & 18x - 27 & = & 9 \quad | + 27 \\ & 18x & = & 36 \quad | : 18 \\ & x & = & 2 \quad (2) \end{array}$$

Beide Ergebnisse werden in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} z & = & -5 - 4x - 3y \\ & = & -5 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) \\ & = & -5 - 8 + 9 \\ z & = & -4 \quad (2) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(2 | -3 | -4)\}$

1.13 LINGLSYS-13

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3(x + 2z) - 4(y - z) + 2y & = 8z + 11 \\ (2) & -2(-2x + y) + (x - 3z) - 5(2x - z) & = 3 \\ (3) & 4(4x + 2y) + 3(x - 1) - 2(-2y - 2z) & = 0 \end{array}$$

Lösung: Zunächst muss das Gleichungssystem in die Normalform gebracht werden.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3(x + 2z) - 4(y - z) + 2y & = 8z + 11 \\ (2) & -2(-2x + y) + (x - 3z) - 5(2x - z) & = 3 \\ (3) & 4(4x + 2y) + 3(x - 1) - 2(-2y - 2z) & = 0 \\ \hline (1) & 3x + 6z - 4y + 4z + 2y & = 8z + 11 \quad | - 8z \\ (2) & 4x - 2y + x - 3z - 10x + 5z & = 3 \\ (3) & 16x + 8y + 3x - 3 + 4y + 4z & = 0 \quad | + 3 \\ \hline (1) & 3x - 2y + 2z & = 11 \\ (2) & -5x - 2y + 2z & = 3 \\ (3) & 19x + 12y + 4z & = 3 \quad (6) \end{array}$$

Lösungsvariante 1 Cramersche Regel

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 11 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 12 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 11 & -2 \\ 3 & -2 \\ 3 & 12 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & -2 & 2 \\ 19 & 12 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ -5 & -2 \\ 19 & 12 \end{matrix}} \\ &= \frac{-88 - 12 + 72 + 12 - 264 + 24}{-24 - 76 - 120 + 76 - 72 - 40} \\ &= \frac{-256}{-256} \\ x &= 1 \quad (7) \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von y kann ich sofort anstelle der Nennerdeterminante das bekannte Ergebnis einsetzen.

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 11 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 19 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 11 \\ -5 & 3 \\ 19 & 3 \end{matrix}}{-256} \\ &= \frac{36 + 418 - 30 - 114 - 18 + 220}{-256} \\ &= \frac{512}{-256} \\ y &= -2 \quad (4) \end{aligned}$$

Um z zu bestimmen, setze ich die gefundenen Ergebnisse in die vereinfachte Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcl}
 3x - 2y + 2z & = & 11 \\
 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 2z & = & 11 \\
 3 + 4 + 2z & = & 11 \quad | -7 \\
 2z & = & 4 \quad | :2 \\
 z & = & 2 \quad (3)
 \end{array}$$

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 3x & -2y + 2z = 11 \\
 (2) & -5x & -2y + 2z = 3 \\
 (3) & 19x & +12y + 4z = 3
 \end{array}$$

Die Gleichungen (1) und (2) können unmittelbar voneinander subtrahiert werden, so dass z wegfällt.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 3x & -2y + 2z = 11 \quad | \\
 (2) & -5x & -2y + 2z = 3 \quad | - \\
 \hline
 (4) & 8x & = 8 \quad | :8 \\
 & x & = 1 \quad (3)
 \end{array}$$

Hier hatten wir Glück. Nicht nur z ist weggefallen, sondern auch y . Wir haben somit (zufälligerweise) sofort ein Ergebnis für x erhalten.

Das Ergebnis können wir in allen Gleichungen für x einsetzen. Für die weitere Rechnung benötigen wir dann nur noch **zwei** Gleichungen, weil nur noch **zwei** Variablen übrig sind. **Auf jeden Fall muss dabei die Gleichung (2) mit verwendet werden, die wir noch nicht benutzt haben!** Für die weitere Rechnung nehme ich die Gleichungen (1) und (3).

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 3x & -2y + 2z = 11 \\
 (3) & 19x & +12y + 4z = 3 \\
 \hline
 (1) & 3 \cdot 1 & -2y + 2z = 11 \\
 (3) & 19 \cdot 1 & +12y + 4z = 3 \\
 \hline
 (1) & 3 & -2y + 2z = 11 \quad | -3 \\
 (3) & 19 & +12y + 4z = 3 \quad | -19 \\
 \hline
 (1) & & -2y + 2z = 8 \quad | \cdot 2 \\
 (3) & & +12y + 4z = -16 \\
 \hline
 (1) & & -4y + 4z = 16 \quad | \\
 (3) & & +12y + 4z = -16 \quad | - \\
 \hline
 (5) & & -16y = 32 \quad | :(-16) \\
 & y & = -2 \quad (8)
 \end{array}$$

Beide Ergebnisse werden in eine beliebige Gleichung eingesetzt, um z zu erhalten. Ich wähle dafür Gleichung (1).

$$\begin{array}{rcl}
3x - 2y + 2z & = & 11 \\
3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 2z & = & 11 \\
3 + 4 + 2z & = & 11 \\
7 + 2z & = & 11 \quad | -7 \\
2z & = & 4 \quad | :2 \\
z & = & 2 \quad (3)
\end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(1 | -2 | 2)\}$

1.14 LINGLSYS-14

Lösen Sie die Determinante auf!

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Lösung: Die Auflösung erfolgt mit dem **Entwicklungssatz**. Zuvor wird die Determinante so vereinfacht, dass mehrere Nullen in der zweiten Spalte stehen. Sobald nur noch eine dreireihige Determinante übrig bleibt, wende ich den **Satz von Sarrus** an.

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{array}{c} \text{1. Zeile:} = \text{1. Zeile} + 3 \cdot \text{4. Zeile} \\ \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \text{2. Zeile:} = \text{2. Zeile} + 4 \cdot \text{4. Zeile} \\ \begin{vmatrix} 13 & 0 & 12 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \quad (5) \\
 &= \begin{array}{c} \text{Entwickeln nach 2. Spalte} \\ \begin{vmatrix} 13 & 0 & 12 & 7 \\ 22 & 0 & 15 & 6 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \quad (5) \\
 &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 12 & 7 \\ 22 & 15 & 6 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 13 & 12 & 7 \\ 22 & 15 & 6 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 13 \quad 12 \\ 22 \quad 15 \\ -3 \quad -2 \end{array} \quad (5) \\
 &= -(585 - 216 - 308 + 315 + 156 - 792) \\
 &= -(-260) \\
 D &= 260 \quad (5)
 \end{aligned}$$

1.15 LINGLSYS-15

Lösen Sie die Determinante auf!

$$D = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Lösung: Die Auflösung erfolgt mit dem **Entwicklungssatz**. Zuvor wird die Determinante so vereinfacht, dass mehrere Nullen in der dritten Spalte stehen. Sobald nur noch eine dreireihige Determinante übrig bleibt, wende ich den **Satz von Sarrus** an.

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{matrix} 2.Zeile:=2.Zeile+2\cdot4.Zeile \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \end{matrix} \\
 &= \begin{matrix} 4.Zeile:=4.Zeile+(-2)\cdot3.Zeile \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \end{matrix} \quad (5) \\
 &= \begin{matrix} \text{Entwickeln nach 3. Spalte} \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 8 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ 7 & -8 & 0 & 7 \end{vmatrix} \end{matrix} \quad (5) \\
 &= -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \\ 7 & -8 & 7 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \\ 7 & -8 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \\ 7 & -8 \end{matrix} \quad (5) \\
 &= -(14 - 168 + 8 - 7 - 128 + 21) \\
 &= -(-260) \\
 D &= 260 \quad (5)
 \end{aligned}$$

1.16 LINGLSYS-16

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 5x & -12y & = & -9 \\ (2) & -7x & +4y & = & -13 \end{array}$$

Lösung: Bei diesem Gleichungssystem bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an, da die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen leicht betragsmäßig gleich gemacht werden können. Dazu muss Gleichung (2) mit 3 multipliziert werden. Dann können die Gleichungen **addiert** werden.

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 5x & -12y & = & -9 \\ (2) & -7x & +4y & = & -13 \quad | \cdot 3 \\ \hline (1) & 5x & -12y & = & -9 \quad | \\ (2) & -21x & +12y & = & -39 \quad | + \\ \hline & -16x & & = & -48 \quad | : (-16) \\ & x & & = & 3 \quad (14) \end{array}$$

Die Variable y wird durch Einsetzen in eine der beiden Ursprungsgleichungen bestimmt. Ich wähle dazu willkürlich Gleichung (2) aus:

$$\begin{array}{rclcl} & -7x + 4y & = & -13 \\ & -7 \cdot 3 + 4y & = & -13 \\ & -21 + 4y & = & -13 \quad | + 21 \\ & 4y & = & 8 \quad | : 4 \\ & y & = & 2 \quad (6) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(3|2)\}$

Eine Alternative könnte auch die Anwendung der Cramerschen Regel sein.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -13 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -12 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}} & (4) \\ &= \frac{-9 \cdot 4 - (-13) \cdot (-12)}{5 \cdot 4 - (-7) \cdot (-12)} & (4) \\ &= \frac{-36 - 156}{20 - 84} \\ &= \frac{-192}{-64} \\ x &= 3 & (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ -7 & -13 \end{vmatrix}}{-64} & (3) \\
&= \frac{5 \cdot (-13) - (-7) \cdot (-9)}{-64} & (2) \\
&= \frac{-65 - 63}{-64} \\
&= \frac{-128}{-64} \\
y &= 2 & (3)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(3|2)\}$

1.17 LINGLSYS-17

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 6x & -8y = -14 \\ (2) & -7x & +4y = -5 \end{array}$$

Lösung: Bei diesem Gleichungssystem bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an, da die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen leicht betragsmäßig gleich gemacht werden können. Dazu muss Gleichung (2) mit 2 multipliziert werden. Dann können die Gleichungen **addiert** werden.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 6x & -8y = -14 \\ (2) & -7x & +4y = -5 \quad | \cdot 2 \\ \hline (1) & 6x & -8y = -14 \quad | \\ (2) & -14x & +8y = -10 \quad | + \\ \hline & -8x & = -24 \quad | : (-8) \\ & x & = 3 \quad (14) \end{array}$$

Die Variable y wird durch Einsetzen in eine der beiden Ursprungsgleichungen bestimmt. Ich wähle dazu willkürlich Gleichung (2) aus:

$$\begin{array}{rcl} -7x + 4y & = & -5 \\ -7 \cdot 3 + 4y & = & -5 \\ -21 + 4y & = & -5 \quad | + 21 \\ 4y & = & 16 \quad | : 4 \\ y & = & 4 \quad (6) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(3|4)\}$

1.18 LINGLSYS-18

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{2x-3}{y-5} - \frac{3x-10}{y-5} & = 1 \\ (2) & 3 \cdot (2x-y) - 2 \cdot (4x-2y) & = x-8 \end{array}$$

Lösung: Vor Beginn der eigentlichen Lösung sollte man das Gleichungssystem in die Normalform bringen.

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{2x-3}{y-5} - \frac{3x-10}{y-5} & = 1 \quad | \cdot (y-5) \\ (2) & 3 \cdot (2x-y) - 2 \cdot (4x-2y) & = x-8 \\ \hline (1) & 2x-3-3x+10 & = y-5 \quad | -7-y \\ (2) & 6x-3y-8x+4y & = x-8 \quad | -x \\ \hline (1) & -x-y & = -12 \\ (2) & -3x+y & = -8 \quad (8) \end{array}$$

Hier bietet sich das **Additionsverfahren** an, da die Koeffizienten von y (bei unterschiedlichem Vorzeichen) übereinstimmen.

$$\begin{array}{lcl} (1) & -x & -y = -12 \quad | \\ (2) & -3x & +y = -8 \quad | + \\ \hline & -4x & = -20 \quad | : (-4) \\ & x & = 5 \quad (8) \end{array}$$

Zur Bestimmung von y setze ich das gefundene Ergebnis für x in die umgestellte Gleichung (2) ein.

$$\begin{array}{lcl} -3x+y & = & -8 \\ -3 \cdot 5+y & = & -8 \\ -15+y & = & -8 \quad | +15 \\ y & = & 7 \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(5|7)\}$

1.19 LINGLSYS-19

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{2x-3}{y-6} - \frac{3x-10}{y-6} & = 1 \\ (2) & 3 \cdot (2x-y) - 2 \cdot (4x-2y) & = x-5 \end{array}$$

Lösung: Vor Beginn der eigentlichen Lösung sollte man das Gleichungssystem in die Normalform bringen.

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{2x-3}{y-6} - \frac{3x-10}{y-6} & = 1 \quad | \cdot (y-6) \\ (2) & 3 \cdot (2x-y) - 2 \cdot (4x-2y) & = x-5 \\ \hline (1) & 2x-3-3x+10 & = y-6 \quad | -7-y \\ (2) & 6x-3y-8x+4y & = x-5 \quad | -x \\ \hline (1) & -x-y & = -13 \\ (2) & -3x+y & = -5 \quad (8) \end{array}$$

Hier bietet sich das **Additionsverfahren** an, da die Koeffizienten von y (bei unterschiedlichem Vorzeichen) übereinstimmen.

$$\begin{array}{lcl} (1) & -x & -y = -13 \quad | \\ (2) & -3x & +y = -5 \quad | + \\ \hline & -4x & = -18 \quad | : (-4) \\ & x & = 4,5 \quad (8) \end{array}$$

Zur Bestimmung von y setze ich das gefundene Ergebnis für x in die umgestellte Gleichung (2) ein.

$$\begin{array}{lcl} -3x+y & = & -8 \\ -3 \cdot 4,5+y & = & -5 \\ -13,5+y & = & -5 \quad | +13,5 \\ y & = & 8,5 \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(4,5|8,5)\}$

1.20 LINGLSYS-20

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 12x & +20y & +4z & = & 8 \\ (2) & 5x & +8y & +2z & = & 0 \\ (3) & 2x & -2y & -3z & = & 11 \end{array}$$

Lösung: Viele Lösungsverfahren sind möglich. Ich möchte hier einmal das **Einsetzungsverfahren** verwenden. Dazu löse ich Gleichung (1) nach z auf und setze den Ergebnisterm in die Gleichungen (2) und (3) ein.

$$\begin{array}{rclcl} 12x + 20y + 4z & = & 8 & & | -12x - 20y \\ 4z & = & 8 - 12x - 20y & & | :4 \\ z & = & 2 - 3x - 5y & & (3) \end{array}$$

Einsetzen in Gleichung (2):

$$\begin{array}{rclcl} 5x + 8y + 2z & = & 0 & & \\ 5x + 8y + 2 \cdot (2 - 3x - 5y) & = & 0 & & \\ 5x + 8y + 4 - 6x - 10y & = & 0 & & | -4 \\ -x - 2y & = & -4 & & (2) \end{array}$$

Einsetzen in Gleichung (3):

$$\begin{array}{rclcl} 2x - 2y - 3z & = & 11 & & \\ 2x - 2y - 3 \cdot (2 - 3x - 5y) & = & 11 & & \\ 2x - 2y - 6 + 9x + 15y & = & 11 & & | +6 \\ 11x + 13y & = & 17 & & (2) \end{array}$$

Zusammengefasst bleibt nun ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig:

$$\begin{array}{rcl} (2) & -x & -2y = -4 \\ (3) & 11x & +13y = 17 \end{array}$$

Ich verwende auch für den zweiten Reduktionsschritt das **Einsetzungsverfahren**. Ich löse die umgeformte Gleichung (2) nach x auf und setze das Ergebnis in die umgeformte Gleichung (3) ein.

$$\begin{array}{rclcl} -x - 2y & = & -4 & & | +2y \\ -x & = & -4 + 2y & & | \cdot (-1) \\ x & = & 4 - 2y & & (3) \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in die umgeformte Gleichung (3) ein.

$$\begin{array}{rclcl} 11x + 13y & = & 17 & & \\ 11 \cdot (4 - 2y) + 13y & = & 17 & & \\ 44 - 22y + 13y & = & 17 & & | -44 \\ -9y & = & -27 & & | : (-9) \\ y & = & 3 & & (2) \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt und man erhält x .

$$x = 4 - 2y = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \quad (5)$$

Beide Ergebnisse werden in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt und man erhält z .

$$z = 2 - 3x - 5y = 2 - 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 = 2 + 6 - 15 = -7 \quad (3)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(-2|3|-7)\}$

Alternative Lösung (nur für y):

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 11 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 20 & 4 \\ 5 & 8 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 32 + 220 - 0 - 264 + 120}{-288 + 80 - 40 - 64 + 48 + 300} = \frac{108}{36} = 3 \quad (20)$$

1.21 LINGLSYS-21

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 3x & -5y & +4z & = & -1 \\ (2) & 2x & +8y & -2z & = & 0 \\ (3) & 5x & +2y & -3z & = & 26 \end{array}$$

Lösung:

Lösungsvariante 1: Einsetzungsverfahren

Dazu löse ich Gleichung (2) nach x auf und setze den Ergebnisterm in die Gleichungen (1) und (3) ein.

$$\begin{array}{rclcl} 2x + 8y - 2z & = & 0 & & | - 8y + 2z \\ 2x & = & -8y + 2z & & | : 2 \\ x & = & -4y + z & & (3) \end{array}$$

Einsetzen in Gleichung (1):

$$\begin{array}{rclcl} 3x - 5y + 4z & = & -1 \\ 3 \cdot (-4y + z) - 5y + 4z & = & -1 \\ -12y + 3z - 5y + 4z & = & -1 \\ -17y + 7z & = & -1 & & (2) \end{array}$$

Einsetzen in Gleichung (3):

$$\begin{array}{rclcl} 5x + 2y - 3z & = & 26 \\ 5 \cdot (-4y + z) + 2y - 3z & = & 26 \\ -20y + 5z + 2y - 3z & = & 26 \\ -18y + 2z & = & 26 & & (3) \end{array}$$

Zusammengefasst bleibt nun ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig:

$$\begin{array}{rclcl} (1) & -17y & +7z & = & -1 \\ (3) & -18y & +2z & = & 26 \end{array}$$

Ich verwende auch für den zweiten Reduktionsschritt das **Einsetzungsverfahren**. Ich löse die umgeformte Gleichung (3) nach z auf und setze das Ergebnis in die umgeformte Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rclcl} -18y + 2z & = & 26 & & | + 18y \\ 2z & = & 26 + 18y & & | : 2 \\ z & = & 13 + 9y & & (3) \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in die umgeformte Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rclcl} -17y + 7z & = & -1 \\ -17y + 7 \cdot (13 + 9y) & = & -1 \\ -17y + 91 + 63y & = & -1 & & | - 91 \\ 46y & = & -92 & & | : 46 \\ y & = & -2 & & (2) \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (3) eingesetzt und man erhält z .

$$z = 13 + 9y = 13 + 9 \cdot (-2) = -5 \quad (5)$$

Beide Ergebnisse werden in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt und man erhält x .

$$x = -4y + z = -4 \cdot (-2) + (-5) = 8 - 5 = 3 \quad (2)$$

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 3x & -5y & +4z & = & -1 \\ (2) & 2x & +8y & -2z & = & 0 \\ (3) & 5x & +2y & -3z & = & 26 \end{array}$$

Zunächst kombiniere ich Gleichung (1) und (2) so, dass z wegfällt. Dazu wird Gleichung (2) mit 2 multipliziert.

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 3x & -5y & +4z & = & -1 \\ (2) & 2x & +8y & -2z & = & 0 \quad | \cdot 2 \\ \hline (1) & 3x & -5y & +4z & = & -1 \\ (2) & 4x & +16y & -4z & = & 0 \quad | + \\ \hline (4) & 7x & +11y & & = & -1 \quad (4) \end{array}$$

Nun wird Gleichung (2) so mit Gleichung (3) kombiniert, dass **ebenfalls** z wegfällt. Dazu wird Gleichung (2) mit 3 und Gleichung (3) mit 2 multipliziert.

$$\begin{array}{rclcl} (2) & 2x & +8y & -2z & = & 0 \quad | \cdot 3 \\ (3) & 5x & +2y & -3z & = & 26 \quad | \cdot 2 \\ \hline (2) & 6x & +24y & -6z & = & 0 \\ (3) & 10x & +4y & -6z & = & 52 \quad | - \\ \hline (5) & -4x & +20y & & = & -52 \quad (4) \end{array}$$

Übrig bleibt ein Gleichungssystem zweiter Ordnung.

$$\begin{array}{rclcl} (4) & 7x & +11y & = & -1 \\ (5) & -4x & +20y & = & -52 \end{array}$$

Auch für den zweiten Reduktionsschritt verwende ich das Additions-/Subtraktionsverfahren. Hier soll so kombiniert werden, dass x entfällt.

$$\begin{array}{rclcl} (4) & 7x & +11y & = & -1 \quad | \cdot 4 \\ (5) & -4x & +20y & = & -52 \quad | \cdot 7 \\ \hline (4) & 28x & +44y & = & -4 \\ (5) & -28x & +140y & = & -364 \quad | + \\ \hline & & 184y & = & -368 \quad | : 184 \\ & & y & = & -2 \quad (6) \end{array}$$

Dieses Ergebnis setze ich in Gleichung (5) ein.

$$\begin{array}{rcl}
 -4x + 20y & = & -52 \\
 -4x + 20 \cdot (-2) & = & -52 \\
 -4x - 40 & = & -52 \quad | + 40 \\
 -4x & = & -12 \quad | : (-4) \\
 x & = & 3 \quad (3)
 \end{array}$$

Beide Ergebnisse setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcl}
 3x - 5y + 4z & = & -1 \\
 3 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) + 4z & = & -1 \\
 9 + 10 + 4z & = & -1 \\
 19 + 4z & = & -1 \quad | - 19 \\
 4z & = & -20 \quad | : 4 \\
 z & = & -5 \quad (3)
 \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(3 | -2 | -5)\}$

Alternative Lösung (nur für z):

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & 26 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{624 + 0 - 4 + 40 - 0 + 260}{-72 + 50 + 16 - 160 + 12 - 30} = \frac{920}{-184} = -5 \quad (20)$$

1.22 LINGLSYS-22

Berechnen Sie die nachfolgende Determinante!

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

Lösung: Zur Vereinfachung der Rechnung sollte man möglichst viele Nullen in eine Zeile oder Spalte bringen. In dieser Form ist es maximal eine einzige Null.

Ich will versuchen, drei Nullen in Zeile 1 zu erzeugen. Dazu addiere ich zunächst das 2-fache der 1. Spalte zu Spalte 2.

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Als nächstes möchte ich ganz oben links eine weitere Null haben. Dazu addiere ich zur 1. Spalte das 1,5-fache der 4. Spalte.

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3,5 & 7 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Jetzt kann ich die Determinante bequem nach der 1. Zeile entwickeln. Da drei Unterdeterminanten dann mit Null multipliziert werden, kann ich die auch gleich weglassen.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3,5 & 7 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -3,5 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Diese **dreireihige** Determinante kann nun mit dem **Satz von Sarrus** berechnet werden. Dazu schreibe ich die vorderen beiden Spalten als Hilfe zum Rechnen noch einmal dahinter.

$$\begin{aligned} D &= -2 \cdot \begin{vmatrix} -3,5 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3,5 & 7 \\ 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{matrix} \\ &= -2 \cdot (-31,5 + 105 - 30 + 30 + 31,5 - 105) \\ &= -2 \cdot 0 \\ D &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

1.23 LINGLSYS-23

Berechnen Sie die nachfolgende Determinante!

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \dots$$

Lösung: Zur Vereinfachung der Rechnung sollte man möglichst viele Nullen in eine Zeile oder Spalte bringen. In dieser Form ist es maximal eine einzige Null.

Ich will versuchen, drei Nullen in Zeile 1 zu erzeugen. Dazu addiere ich zunächst das 2-fache der 3. Spalte zu Spalte 1.

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 5 \\ 8 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Als nächstes möchte ich eine Null oben rechts haben. Dazu addiere ich das $(-2,5)$ -fache der 3. Spalte zur 4. Spalte.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 5 \\ 8 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 3 & -5,5 \\ 5 & 4 & 3 & -3,5 \\ -3 & 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Jetzt kann ich die Determinante bequem nach der 1. Zeile entwickeln. Da drei Unterdeterminanten dann mit Null multipliziert werden, kann ich die auch gleich weglassen.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -1 & 3 & -5,5 \\ 5 & 4 & 3 & -3,5 \\ -3 & 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 & -5,5 \\ 5 & 4 & -3,5 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Diese **dreireihige** Determinante kann nun mit dem **Satz von Sarrus** berechnet werden. Dazu schreibe ich die vorderen beiden Spalten als Hilfe zum Rechnen noch einmal dahinter.

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 & -5,5 \\ 5 & 4 & -3,5 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 8 & -1 \\ 5 & 4 \\ -3 & 5 \end{matrix} \\ &= 2 \cdot (64 - 10,5 - 137,5 - 66 + 140 + 10) \\ &= 2 \cdot 0 \\ D &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

1.24 LINGLSYS-24

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{2x+3y}{y+3} - 4 & = \frac{4x+8y}{y+3} \\ (2) & \frac{-3x+2-y}{x-4} - 5 & = 0 \end{array}$$

Lösung: Zunächst sollte das System in die Normalform gebracht werden. Dazu wird Gleichung (1) mit $(y+3)$ und die Gleichung (2) mit $(x-4)$ multipliziert, damit sich die Brüche auflösen.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 2x+3y-4y-12 & = 4x+8y \quad | +12-4x-8y \\ (2) & -3x+2-y-5x+20 & = 0 \quad | -22 \\ \hline (1) & -2x-9y & = 12 \\ (2) & -8x-y & = -22 \quad (6) \end{array}$$

Jetzt kann das Gleichungssystem mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Das **Einsetzungsverfahren** bietet sich an, denn Gleichung (2) kann bequem nach y umgestellt werden.

$$\begin{array}{lcl} (2) & -8x-y & = -22 \quad | +8x \\ (2) & -y & = -22+8x \quad | \cdot (-1) \\ (2) & y & = 22-8x \quad (5) \end{array}$$

Dieser Term wird nun in Gleichung (1) für y eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} (1) & -2x-9y & = 12 \\ & -2x-9 \cdot (22-8x) & = 12 \\ & -2x-198+72x & = 12 \quad | +198 \\ & 70x & = 210 \quad | :70 \\ & x & = 3 \quad (5) \end{array}$$

Das Ergebnis kann in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt werden. Damit erhält man dann die noch fehlende Variable y .

$$y = 22 - 8x = 22 - 8 \cdot 3 = -2 \quad (4)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(3|-2)\}$

1.25 LINGLSYS-25

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & \frac{3}{7}x + \frac{4}{9}y & = 7 \\ (2) & \frac{5}{14}x - \frac{2}{9}y & = \frac{1}{2} \end{array}$$

Lösung: Es ist sicher sinnvoll, zunächst die Brüche in den Gleichungen zu beseitigen, indem man jede Gleichung mit dem jeweiligen Hauptnenner multipliziert.

$$\begin{array}{rcl} (1) & \frac{3}{7}x + \frac{4}{9}y & = 7 \quad | \cdot 7 \cdot 9 \\ (2) & \frac{5}{14}x - \frac{2}{9}y & = \frac{1}{2} \quad | \cdot 14 \cdot 9 \\ \hline (1) & 27x + 28y & = 441 \\ (2) & 45x - 28y & = 63 \quad (4) \end{array}$$

Die Koeffizienten von y stimmen in beiden Gleichungen (bis auf das Vorzeichen) überein. Daher bietet sich das **Additionsverfahren** an.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 27x + 28y & = 441 \quad | \\ (2) & 45x - 28y & = 63 \quad | + \\ \hline & 72x & = 504 \quad | : 72 \\ & x & = 7 \quad (10) \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in die umgestellte Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcl} 27x + 28y & = & 441 \\ 27 \cdot 7 + 28y & = & 441 \\ 189 + 28y & = & 441 \quad | - 189 \\ 28y & = & 252 \quad | : 28 \\ y & = & 9 \quad (6) \end{array}$$

Ergebnis: $L = \{(7|9)\}$

1.26 LINGLSYS-26

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & \frac{4}{5}x + \frac{2}{9}y & = 6 \\ (2) & \frac{9}{10}x - \frac{4}{9}y & = \frac{1}{2} \end{array}$$

Lösung: Es ist sicher sinnvoll, zunächst die Brüche in den Gleichungen zu beseitigen, indem man jede Gleichung mit dem jeweiligen Hauptnenner multipliziert.

$$\begin{array}{rcl} (1) & \frac{4}{5}x + \frac{2}{9}y & = 6 \quad | \cdot 5 \cdot 9 \\ (2) & \frac{9}{10}x - \frac{4}{9}y & = \frac{1}{2} \quad | \cdot 10 \cdot 9 \\ \hline (1) & 36x + 10y & = 270 \\ (2) & 81x - 40y & = 45 \quad (4) \end{array}$$

Multipliziert man Gleichung (1) mit 4, dann stimmen die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen (bis auf die Vorzeichen) überein. Daher bietet sich das **Additionsverfahren** an.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 36x + 10y & = 270 \quad | \cdot 4 \\ (2) & 81x - 40y & = 45 \\ \hline (1) & 144x + 40y & = 1080 \quad | \\ (2) & 81x - 40y & = 45 \quad | + \\ \hline & 225x & = 1125 \quad | : 225 \\ & x & = 5 \quad (10) \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in die umgestellte Gleichung (2) ein.

$$\begin{array}{rcl} 81x - 40y & = & 45 \\ 81 \cdot 5 - 40y & = & 45 \\ 405 - 40y & = & 45 \quad | - 405 \\ -40y & = & -360 \quad | : (-40) \\ y & = & 9 \quad (6) \end{array}$$

Ergebnis: $L = \{(5|9)\}$

1.27 LINGLSYS-27

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 2w & +3x & -3y & = & 8 \\ (2) & 3w & -2x & & -2z & = & 1 \\ (3) & -2w & & +2y & +z & = & -2 \\ (4) & & +x & +3y & +2z & = & 2 \end{array}$$

Lösung: Für den ersten Reduktionsschritt wähle ich das Einsetzungsverfahren. Man kann gut Gleichung (3) nach z oder Gleichung (4) nach x auflösen. Beides bietet sich an; ich stelle willkürlich Gleichung (3) nach z um.

$$\begin{array}{rcl} (3) & -2w + 2y + z & = -2 \quad | +2w - 2y \\ & z & = 2w - 2y - 2 \end{array}$$

Dieser Term muss in **alle anderen** Gleichungen eingesetzt werden, also in die Gleichungen (1), (2) und (4).

$$\begin{array}{rcl} (1) & 2w + 3x - 3y & = 8 \\ (2a) & 3w - 2x - 2 \cdot (2w - 2y - 2) & = 1 \\ (4a) & x + 3y + 2 \cdot (2w - 2y - 2) & = 2 \\ \hline (1) & 2w + 3x - 3y & = 8 \\ (2a) & 3w - 2x - 4w + 4y + 4 & = 1 \quad | -4 \\ (4a) & x + 3y + 4w - 4y - 4 & = 2 \quad | +4 \\ \hline (1) & 2w + 3x - 3y & = 8 \\ (2a) & -w - 2x + 4y & = -3 \\ (4a) & 4w + x - y & = 6 \quad (6) \end{array}$$

Für die weitere Lösung wähle ich die **Cramersche Regel**.

$$\begin{aligned} w &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{16 + 72 + 9 - 36 - 32 - 9}{4 + 48 + 3 - 24 - 8 - 3} \\ &= \frac{20}{20} \\ w &= 1 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{6 + 128 + 18 - 36 - 48 - 8}{20} \\
 &= \frac{60}{20} \\
 x &= 3 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Die Lösung für y bestimme ich durch Einsetzen der Ergebnisse in Gleichung (4a).

$$\begin{aligned}
 (4a) \quad 4w + x - y &= 6 \\
 4 \cdot 1 + 3 - y &= 6 \quad | -7 \\
 -y &= -1 \quad | : (-1) \\
 y &= 1 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Zum Schluss muss noch z bestimmt werden. Dazu bietet sich die umgestellte Gleichung (3) an.

$$z = 2w - 2y - 2 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 = 2 - 2 - 2 = -2 \quad (2)$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $L = \{(1|3|1| - 2)\}$

1.28 LINGLSYS-28

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 2w & +2x & +3y & +z & = & 7 \\ (2) & 2w & +5x & & & = & 12 \\ (3) & 3w & +3x & & +2z & = & 5 \\ (4) & & 4x & +2y & +2z & = & 6 \end{array}$$

Lösung: Für den ersten Reduktionsschritt wähle ich das Einsetzungsverfahren. Man kann gut Gleichung (2) nach w auflösen.

$$\begin{array}{rcl} (2) & 2w + 5x & = 12 \quad | - 5x \\ & 2w & = 12 - 5x \quad | : 2 \\ & w & = 6 - 2,5x \end{array}$$

Das Ergebnis wird in **alle anderen** Gleichungen eingesetzt, also in die Gleichungen (1), (3) und (4).

$$\begin{array}{rcl} (1a) & 2 \cdot (6 - 2,5x) + 2x + 3y + z & = 7 \\ (3a) & 3 \cdot (6 - 2,5x) + 3x + 2z & = 5 \\ (4) & 4x + 2y + 2z & = 6 \\ \hline (1a) & 12 - 5x + 2x + 3y + z & = 7 \quad | - 12 \\ (3a) & 18 - 7,5x + 3x + 2z & = 5 \quad | - 18 \\ (4) & 4x + 2y + 2z & = 6 \\ \hline (1a) & -3x + 3y + z & = -5 \\ (3a) & -4,5x + 2z & = -13 \\ (4) & 4x + 2y + 2z & = 6 \quad (6) \end{array}$$

Zur weitere Lösung verwende ich die **Cramersche Regel**. Ich beginne mit der Bestimmung von x .

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -13 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4,5 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{36 - 26 + 20 + 78}{24 - 9 + 12 + 27} \\ &= \frac{108}{54} \\ x &= 2 \quad (7) \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann in Gleichung (3a) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 -4,5x + 2z &= -13 \\
 -4,5 \cdot 2 + 2z &= -13 \\
 -9 + 2z &= -13 \quad | + 9 \\
 2z &= -4 \quad | : 2 \\
 z &= -2 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für x und z werden in Gleichung (4) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 4x + 2y + 2z &= 6 \\
 4 \cdot 2 + 2y + 2 \cdot (-2) &= 6 \\
 8 + 2y - 4 &= 6 \quad | - 4 \\
 2y &= 2 \quad | : 2 \\
 y &= 1 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Zum Schluss dient die umgestellte Gleichung (2) zur Bestimmung von w .

$$w = 6 - 2,5x = 6 - 2,5 \cdot 2 = 6 - 5 = 1 \quad (2)$$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{(1|2|1|-2)\}$

1.29 LINGSYS-29

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rclclcl} (1) & 3w & +x & +2y & +2z & = & 7 \\ (2) & & 2x & +3y & & = & 1 \\ (3) & 2w & & +2y & +3z & = & 6 \\ (4) & & 4x & +2y & +2z & = & 10 \end{array}$$

Lösung: Für den ersten Reduktionsschritt wähle ich das Einsetzungsverfahren. Man kann gut Gleichung (2) nach x auflösen.

$$\begin{array}{rcl} (2) & 2x + 3y & = 1 \quad | -3y \\ & 2x & = 1 - 3y \quad | :2 \\ & x & = 0,5 - 1,5y \end{array}$$

Das Ergebnis wird in **alle anderen** Gleichungen eingesetzt, also in die Gleichungen (1), (3) und (4).

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 3w + x + 2y + 2z & = 7 \\
 (3) & 2w + 2y + 3z & = 6 \\
 (4) & 4x + 2y + 2z & = 10 \\
 \hline
 (1a) & 3w + 0, 5 - 1, 5y + 2y + 2z & = 7 \\
 (3) & 2w + 2y + 3z & = 6 \\
 (4a) & 4 \cdot (0, 5 - 1, 5y) + 2y + 2z & = 10 \\
 \hline
 (1a) & 3w + 0, 5 + 0, 5y + 2z & = 7 \quad | + 0, 5 \\
 (3) & 2w + 2y + 3z & = 6 \\
 (4a) & 2 - 6y + 2y + 2z & = 10 \quad | - 2 \\
 \hline
 (1a) & 3w + 0, 5y + 2z & = 6, 5 \\
 (3) & 2w + 2y + 3z & = 6 \\
 (4a) & -4y + 2z & = 8 \quad (6)
 \end{array}$$

Zur weitere Lösung verwende ich die **Cramersche Regel**. Ich beginne mit der Bestimmung von y .

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6,5 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 0,5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{36 + 32 - 72 - 26}{12 - 16 + 36 - 2} \\
 &= \frac{-30}{30} \\
 y &= -1 \quad (7)
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann in Gleichung (4a) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 -4y + 2z &= 8 \\
 -4 \cdot (-1) + 2z &= 8 \\
 4 + 2z &= 8 \quad | -4 \\
 2z &= 4 \quad | :2 \\
 z &= 2 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für y und z werden in Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 2w + 2y + 3z &= 6 \\
 2w + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 &= 6 \\
 2w - 2 + 6 &= 6 \quad | -4 \\
 2w &= 2 \quad | :2 \\
 w &= 1 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Zum Schluss dient die umgestellte Gleichung (2) zur Bestimmung von x .

$$x = 0,5 - 1,5y = x = 0,5 - 1,5 \cdot (-1) = 0,5 + 1,5 = 2 \quad (2)$$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{(1|2|-1|2)\}$

1.30 LINGLSYS-30

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Lineargleichungssystem!

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} (1) & 2x & -3y & +2z & = & 6 \\ (2) & -3x & +5y & -2z & = & -3 \\ (3) & 5x & & -3z & = & -10 \end{array}$$

Lösung: Bei einem Gleichungssystem in dieser Form bietet sich die **Cramersche Regel** als Lösungsverfahren an.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -10 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix}} \begin{array}{cc} 6 & -3 \\ -3 & 5 \\ -10 & 0 \end{array} \\ &= \frac{-90 - 60 + 100 + 27}{-30 + 30 - 50 + 27} \\ &= \frac{-23}{-23} \\ x &= 1 \quad (10) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setze ich in Gleichung (3) ein, um z zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 5x - 3z & = & -10 \\ 5 \cdot 1 - 3z & = & -10 & | -5 \\ -3z & = & -15 & | : (-3) \\ z & = & 5 & (6) \end{array}$$

Die Ergebnisse für x und z setze ich in Gleichung (1) ein und erhalte y .

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x - 3y + 2z & = & 6 \\ 2 \cdot 1 - 3y + 2 \cdot 5 & = & 6 & | -12 \\ -3y & = & -6 & | : (-3) \\ y & = & 2 & (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(1|2|5)\}$

1.31 LINGLSYS-31a

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 8x - 6y & = 6 \\ (2) & 11x - 6y & = 15 \end{array}$$

Lösung: Bei diesem Gleichungssystem bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an, da die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen übereinstimmen. Da die Vorzeichen **gleich** sind, muss **subtrahiert** werden. Ich subtrahiere Gleichung (1) von Gleichung (2).

$$\begin{array}{rcl} (1) & 8x & -6y = 6 \quad | - \\ (2) & 11x & -6y = 15 \quad | - \\ \hline & 3x & = 9 \quad | : 3 \\ & x & = 3 \end{array} \quad (12)$$

Die Variable y wird durch Einsetzen in eine der beiden Ursprungsgleichungen bestimmt. Ich wähle dazu willkürlich Gleichung (1) aus:

$$\begin{array}{rcl} 8x - 6y & = & 6 \\ 8 \cdot 3 - 6y & = & 6 \\ 24 - 6y & = & 6 \quad | - 24 \\ -6y & = & -18 \quad | : (-6) \\ y & = & 3 \end{array} \quad (8)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(3|3)\}$

1.32 LINGLSYS-31b

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 7x - 3y & = 2 \\ (2) & 13x - 3y & = 14 \end{array}$$

Lösung: Bei diesem Gleichungssystem bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an, da die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen übereinstimmen. Da die Vorzeichen **gleich** sind, muss **subtrahiert** werden. Ich subtrahiere Gleichung (1) von Gleichung (2).

$$\begin{array}{rcll} (1) & 7x & -3y & = 2 & | - \\ (2) & 13x & -3y & = 14 & | \\ \hline & 6x & & = 12 & | : 6 \\ & x & & = 2 & \text{(12)} \end{array}$$

Die Variable y wird durch Einsetzen in eine der beiden Ursprungsgleichungen bestimmt. Ich wähle dazu willkürlich Gleichung (1) aus:

$$\begin{array}{rcll} 7x - 3y & = & 2 \\ 7 \cdot 2 - 3y & = & 2 \\ 14 - 3y & = & 2 & | - 14 \\ -3y & = & -12 & | : (-3) \\ y & = & 4 & \text{(8)} \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(2|4)\}$

1.33 LINGLSYS-31c

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 6x - 5y & = 49 \\ (2) & 11x - 5y & = 69 \end{array}$$

Lösung: Bei diesem Gleichungssystem bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an, da die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen übereinstimmen. Da die Vorzeichen **gleich** sind, muss **subtrahiert** werden. Ich subtrahiere Gleichung (1) von Gleichung (2).

$$\begin{array}{rclcl} (1) & 6x & -5y & = & 49 & | - \\ (2) & 11x & -5y & = & 69 & | \\ \hline & 5x & & = & 20 & | : 5 \\ & x & & = & 4 & \end{array} \quad (12)$$

Die Variable y wird durch Einsetzen in eine der beiden Ursprungsgleichungen bestimmt. Ich wähle dazu willkürlich Gleichung (1) aus:

$$\begin{array}{rclcl} & 6x - 5y & = & 49 \\ & 6 \cdot 4 - 5y & = & 49 \\ & 24 - 5y & = & 49 & | - 24 \\ & -5y & = & 25 & | : (-5) \\ & y & = & -5 & \end{array} \quad (8)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(4 | -5)\}$

1.34 LINGLSYS-32

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 12x & +3y = 27 \\ (2) & 4x & -6y = -26 \end{array}$$

Lösung: Gleichung (2) kann leicht durch 2 dividiert werden; dann sind die Koeffizienten von y betragsmäßig gleich, womit sich das Additionsverfahren anbietet.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 12x & +3y = 27 \\ (2) & 4x & -6y = -26 \quad | : 2 \\ \hline (1) & 12x & +3y = 27 \quad | \\ (2) & 2x & -3y = -13 \quad | + \\ \hline & 14x & = 14 \quad | : 14 \\ & x & = 1 \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (1) ein, um y zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} 12x + 3y & = & 27 \\ 12 \cdot 1 + 3y & = & 27 \\ 12 + 3y & = & 27 \quad | - 12 \\ 3y & = & 15 \quad | : 3 \\ y & = & 5 \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(1|5)\}$

1.35 LINGLSYS-33

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem! (20 P.)

$$\begin{array}{l} (1) \quad 8x + 3y = 4 \\ (2) \quad 4x - y = -8 \end{array}$$

Lösung:

Lösungsvariante 1: Einsetzungsverfahren Bei Gleichung (2) steht vor dem y kein Koeffizient. Sie kann daher bequem nach y umgestellt werden.

$$\begin{array}{lcl} 4x - y & = & -8 \\ -y & = & -8 - 4x \\ y & = & 8 + 4x \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 4x \\ | \cdot (-1) \\ \end{array} \quad (5)$$

Dieser Term wird für y in (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} 8x + 3y & = & 4 \\ 8x + 3 \cdot (8 + 4x) & = & 4 \\ 8x + 24 + 12x & = & 4 \\ 20x + 24 & = & 4 \\ 20x & = & -20 \\ x & = & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 24 \\ | : 20 \\ \end{array} \quad (10)$$

Dieses Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} y & = & 8 + 4x \\ & = & 8 + 4 \cdot (-1) \\ & = & 8 - 4 \\ y & = & 4 \end{array} \quad (5)$$

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren Gleichung (2) kann leicht mit 3 multipliziert werden; dann sind die Koeffizienten von y betragsmäßig gleich. Wegen der **unterschiedlichen** Vorzeichen vor y werden die Gleichungen anschließend **addiert**.

$$\begin{array}{lcl} (1) \quad 8x + 3y & = & 4 \\ (2) \quad 4x - y & = & -8 \quad | \cdot 3 \\ \hline (1) \quad 8x + 3y & = & 4 \\ (2) \quad 12x - 3y & = & -24 \quad | + \\ \hline 20x & = & -20 \\ x & = & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \\ | \\ | : 20 \\ \end{array} \quad (12)$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein, um y zu bestimmen.

$$\begin{array}{lcl} 4x - y & = & -8 \\ 4 \cdot (-1) - y & = & -8 \\ -4 - y & = & -8 \\ -y & = & -4 \\ y & = & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} | + 4 \\ | : (-1) \\ \end{array} \quad (8)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(-1|4)\}$

1.36 LINGLSYS-34

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 7x & -5y = 29 \\ (2) & 4x & -y = 11 \end{array}$$

Lösung: In Gleichung (2) steht y ohne Koeffizienten. Daher verwende ich das Einsetzungsverfahren und löse Gleichung (2) nach y auf.

$$\begin{array}{rcl} 4x - y & = & 11 \quad | + y - 11 \\ 4x - 11 & = & y \end{array} \quad (7)$$

Dieser Term wird in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 7x - 5 \cdot (4x - 11) & = & 29 \\ 7x - 20x + 55 & = & 29 \\ -13x + 55 & = & 29 \quad | - 55 \\ -13x & = & -26 \quad | : (-13) \\ x & = & 2 \end{array} \quad (7)$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$y = 4x - 11 = 4 \cdot 2 - 11 = -3 \quad (6)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(2 | -3)\}$

1.37 LINGLSYS-35a

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 9x - 4y & = 35 \\ (2) & x - 7y & = 17 \end{array}$$

Lösung: In Gleichung (2) steht x ohne Koeffizienten. Daher bietet sich das Einsetzungsverfahren an. Ich löse Gleichung (2) nach x auf.

$$\begin{array}{rcl} x - 7y & = & 17 \\ x & = & 7y + 17 \end{array} \quad \begin{array}{l} | + 7y \\ \\ \end{array} \quad (7)$$

Dieser Term wird in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 9x - 4y & = & 35 \\ 9 \cdot (7y + 17) - 4y & = & 35 \\ 63y + 153 - 4y & = & 35 \quad | - 153 \\ 59y & = & -118 \quad | : 59 \\ y & = & -2 \end{array} \quad (7)$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$x = 7y + 17 = 7 \cdot (-2) + 17 = 3 \quad (6)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(3 | -2)\}$

1.38 LINGLSYS-35b

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & x - 7y & = 19 \\ (2) & 6x - 4y & = 38 \end{array}$$

Lösung: In Gleichung (1) steht x ohne Koeffizienten. Daher verwende ich das Einsetzungsverfahren und löse Gleichung (1) nach x auf.

$$\begin{array}{rcl} x - 7y & = & 19 \\ x & = & 19 + 7y \end{array} \quad \begin{array}{l} | + 7y \\ \\ \end{array} \quad (7)$$

Dieser Term wird in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 6x - 4y & = & 38 \\ 6 \cdot (19 + 7y) - 4y & = & 38 \\ 114 + 42y - 4y & = & 38 \\ 114 + 38y & = & 38 \quad | - 114 \\ 38y & = & -76 \quad | : 38 \\ y & = & -2 \end{array} \quad (7)$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$x = 19 + 7y = 19 + 7 \cdot (-2) = 19 - 14 = 5 \quad (6)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(5 | -2)\}$

1.39 LINGLSYS-35c

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 4x + 5y & = 1 \\ (2) & 5x - y & = 23 \end{array}$$

Lösung: In Gleichung (2) steht y ohne Koeffizienten. Daher verwende ich das Einsetzungsverfahren und löse Gleichung (2) nach y auf.

$$\begin{array}{rcl} 5x - y & = & 23 \quad | -5x \\ -y & = & -5x + 23 \quad | \cdot (-1) \\ y & = & 5x - 23 \end{array} \quad (7)$$

Der Ergebnisterm wird in (1) eingesetzt:

$$\begin{array}{rcl} 4x + 5y & = & 1 \\ 4x + 5 \cdot (5x - 23) & = & 1 \\ 4x + 25x - 115 & = & 1 \quad | + 115 \\ 29x & = & 116 \quad | : 29 \\ x & = & 4 \end{array} \quad (7)$$

Dieses Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$y = 5x - 23 = 5 \cdot 4 - 23 = 20 - 23 = -3 \quad (6)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(4 | -3)\}$

1.40 LINGLSYS-36

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x & -5y = -47 \\ (2) & 4x & +10y = 54 \end{array}$$

Lösung: Gleichung (2) kann leicht durch 2 dividiert werden; dann sind die Koeffizienten von y betragsmäßig gleich, womit sich das Additionsverfahren anbietet.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x & -5y = -47 \\ (2) & 4x & +10y = 54 \quad | : 2 \\ \hline (1) & 3x & -5y = -47 \quad | \\ (2) & 2x & +5y = 27 \quad | + \\ \hline & 5x & = -20 \quad | : 5 \\ & x & = -4 \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} & 3x - 5y & = -47 \\ 3 \cdot (-4) - 5y & = -47 \\ -12 - 5y & = -47 \quad | + 12 \\ -5y & = -35 \quad | : (-5) \\ y & = 7 \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(-4|7)\}$

1.41 LINGLSYS-37

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 4x & -7y = -47 \\ (2) & 3x & +14y = 61 \end{array}$$

Lösung: Ich möchte das Additionsverfahren anwenden. Das geht leicht, wenn Gleichung (1) mit 2 multipliziert wird. Dann sind die Koeffizienten von y betragsmäßig gleich.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 4x & -7y = -47 \quad | \cdot 2 \\ (2) & 3x & +14y = 61 \\ \hline (1) & 8x & -14y = -94 \quad | \\ (2) & 3x & +14y = 61 \quad | + \\ \hline & 11x & = -33 \quad | : 11 \\ & x & = -3 \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} & 4x - 7y & = -47 \\ & 4 \cdot (-3) - 7y & = -47 \\ & -12 - 7y & = -47 \quad | + 12 \\ & -7y & = -35 \quad | : (-7) \\ & y & = 5 \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(-3|5)\}$

1.42 LINGLSYS-38

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 2x - 3y + 2z & = 6 \\ (2) & -3x + 5y - 2z & = -3 \\ (3) & 5x + 3y - 3z & = -4 \end{array}$$

Lösung: Bei diesem Gleichungssystem bietet sich die Cramersche Regel an, da wir nicht nur zwei, sondern drei Gleichungen mit drei Variablen haben. Andere Lösungsvarianten sind aber auch sinnvoll möglich.

Lösungsvariante 1: Cramersche Regel

Bestimmen wir zuerst die Variable x .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}}$$

Zum Auflösen der Determinanten verwende ich im Zähler und im Nenner jeweils den Satz von Sarrus. Damit der übersichtlicher angewendet werden kann, schreibe ich jeweils die erste und zweite Spalte noch einmal hinter die Determinanten.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 & 6 & -3 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & 5 \\ -4 & 3 & -3 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & -2 & -3 & 5 \\ 5 & 3 & -3 & 5 & 3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-90 - 24 - 18 + 40 + 36 + 27}{-30 + 30 - 18 - 50 + 12 + 27} \\ &= \frac{-29}{-29} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von y kann der gleiche Nenner wie bei der Bestimmung von x verwendet werden.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 6 \\ -3 & -3 \\ 5 & -4 \end{matrix}}{-29} \\
 &= \frac{18 - 60 + 24 + 30 - 16 - 54}{-29} \\
 &= \frac{-58}{-29} \\
 y &= 2
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von z werden die gefundenen Werte für x und y in eine beliebige Gleichung eingesetzt. Ich wähle dazu Gleichung (1).

$$\begin{aligned}
 2x - 3y + 2z &= 6 \\
 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2z &= 6 \\
 -4 + 2z &= 6 & | +4 \\
 2z &= 10 & | :2 \\
 z &= 5
 \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 2x - 3y + 2z &= 6 \\
 (2) \quad -3x + 5y - 2z &= -3 \\
 (3) \quad 5x + 3y - 3z &= -4
 \end{aligned}$$

Zuerst werden die Gleichungen (1) und (2) so kombiniert, dass z wegfällt. Dazu können sie unmittelbar addiert werden.

$$\begin{array}{rcll}
 (1) & 2x & -3y & +2z = 6 & | \\
 (2) & -3x & +5y & -2z = -3 & | + \\
 \hline
 (4) & -x & +2y & & = 3 & \textcolor{red}{(3)}
 \end{array}$$

Nun kombiniere ich (1) und (3) so, dass ebenfalls z wegfällt. Dazu müssen beide mit einem geeigneten Faktor multipliziert werden.¹

$$\begin{array}{rcll}
 (1) & 2x & -3y & +2z = 6 & | \cdot 3 \\
 (3) & 5x & +3y & -3z = -4 & | \cdot 2 \\
 \hline
 (1) & 6x & -9y & +6z = 18 & | \\
 (3) & 10x & +6y & -6z = -8 & | + \\
 \hline
 (5) & 16x & -3y & & = 10 & \textcolor{red}{(5)}
 \end{array}$$

Die Gleichungen (4) und (5) stellen nun ein Lineargleichungssystem nur noch **zweiter** Ordnung dar.

¹Würde man die Gleichungen unmittelbar addieren, dann würde zwar y wegfallen, aber das hilft uns nicht weiter.

$$\begin{array}{rcl} (4) & -x & +2y = 3 \\ (5) & 16x & -3y = 10 \end{array}$$

Für den nächsten Reduktionsschritt bietet sich das Einsetzungsverfahren an, weil in Gleichung (4) die Variable x alleine steht. Diese Gleichung wird nach x aufgelöst.

$$\begin{array}{rcl} -x + 2y & = & 3 \quad | -2y \\ -x & = & 3 - 2y \quad | : (-1) \\ x & = & -3 + 2y \quad (3) \end{array}$$

Dieser Term wird in (5) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 16x - 3y & = & 10 \\ 16 \cdot (-3 + 2y) - 3y & = & 10 \\ -48 + 32y - 3y & = & 10 \quad | + 48 \\ 29y & = & 58 \quad | : 29 \\ y & = & 2 \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (4) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} x & = & -3 + 2y \\ & = & -3 + 2 \cdot 2 \\ x & = & 1 \quad (2) \end{array}$$

Beide Ergebnisse müssen nun in eine der drei Ursprungsgleichungen eingesetzt werden. Willkürlich wähle ich dazu Gleichung (1).

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3y + 2z & = & 6 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2z & = & 6 \\ 2 - 6 + 2z & = & 6 \quad | + 4 \\ 2z & = & 10 \quad | : 2 \\ z & = & 5 \quad (3) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(1|2|5)\}$

1.43 LINGLSYS-39

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{z-4}{x+y} + 3 = 4 \\ (2) \quad & \frac{y-7}{2x-z} = \frac{2y+1}{2x-z} + 2 \\ (3) \quad & 3 - \frac{x+1}{4y-z} = \frac{3x-1}{8y-2z} \end{aligned}$$

1.44 LINGLSYS-40a

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{3x}{5} - \frac{2y}{7} & = 1 \\ (2) & \frac{7}{10}x + \frac{5}{7}y & = \frac{17}{2} \end{array}$$

Lösung: Damit die Brüche verschwinden, multipliziert man die Gleichungen zunächst jeweils mit dem Hauptnenner.

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{3x}{5} - \frac{2y}{7} & = 1 \quad | \cdot 35 \\ (2) & \frac{7}{10}x + \frac{5}{7}y & = \frac{17}{2} \quad | \cdot 70 \\ \hline (1) & 21x - 10y & = 35 \\ (2) & 49x + 50y & = 595 \quad (4) \end{array}$$

Die weitere Lösung führe ich mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren durch.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 21x - 10y & = 35 \quad | \cdot 5 \\ (2) & 49x + 50y & = 595 \\ \hline (1) & 105x - 50y & = 175 \quad | \\ (2) & 49x + 50y & = 595 \quad | + \\ \hline & 154x & = 770 \quad | : 154 \\ & x & = 5 \quad (10) \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in die vereinfachte Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{lcl} 21x - 10y & = & 35 \\ 21 \cdot 5 - 10y & = & 35 \\ 105 - 10y & = & 35 \quad | - 105 \\ -10y & = & -70 \quad | : (-10) \\ y & = & 7 \quad (6) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(5|7)\}$

1.45 LINGLSYS-40b

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{2}{7} \cdot x - \frac{4}{13} \cdot y & = -2 \\ (2) & \frac{1}{14} \cdot x + \frac{5}{26} \cdot y & = 3 \end{array}$$

Lösung: Damit die Brüche verschwinden, multipliziert man die Gleichungen sinnvollerweise zunächst jeweils mit dem Hauptnenner.

$$\begin{array}{lcl} (1) & \frac{2}{7} \cdot x - \frac{4}{13} \cdot y & = -2 \quad | \cdot 91 \\ (2) & \frac{1}{14} \cdot x + \frac{5}{26} \cdot y & = 3 \quad | \cdot 182 \\ \hline (1) & 26x - 28y & = -182 \\ (2) & 13x + 35y & = 546 \quad (4) \end{array}$$

Für die weitere Lösung bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 26x - 28y & = -182 \\ (2) & 13x + 35y & = 546 \quad | \cdot 2 \\ \hline (1) & 26x - 28y & = -182 \quad | - \\ (2) & 26x + 70y & = 1092 \quad | \\ \hline & 98y & = 1274 \quad | : 98 \\ & y & = 13 \quad (10) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in eine beliebige Gleichung eingesetzt. Ich wähle dafür die aufgelöste Gleichung (2).

$$\begin{array}{lcl} 13x + 35y & = & 546 \\ 13x + 35 \cdot 13 & = & 546 \\ 13x + 455 & = & 546 \quad | - 455 \\ 13x & = & 91 \quad | : 13 \\ x & = & 7 \quad (6) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(7|13)\}$

1.46 LINGLSYS-41

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3 \cdot (2x - 3z) - 4 \cdot (z - 2y) + 4 & = 3y + 1 \\ (2) & 2 \cdot (4x + z) - 3 \cdot (2x - y) + 4 \cdot (3y - 2z) & = -39 \\ (3) & -5 \cdot (x - 4) + 2 \cdot (3x + 2z) - 3 \cdot (4x - 2y) & = -20 \end{array}$$

Lösung: Die Gleichungen müssen zunächst in die Normalform umgeformt werden.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3 \cdot (2x - 3z) - 4 \cdot (z - 2y) + 4 & = 3y + 1 \\ (2) & 2 \cdot (4x + z) - 3 \cdot (2x - y) + 4 \cdot (3y - 2z) & = -41 \\ (3) & -5 \cdot (x - 4) + 2 \cdot (3x + 2z) - 3 \cdot (4x - 2y) & = -20 \\ \hline (1) & 6x - 9z - 4z + 8y + 4 & = 3y + 1 \quad | - 3y - 4 \\ (2) & 8x + 2z - 6x + 3y + 12y - 8z & = -41 \\ (3) & -5x + 20 + 6x + 4z - 12x + 6y & = -20 \quad | - 20 \\ \hline (1) & 6x + 5y - 13z & = -3 \\ (2) & 2x + 15y - 6z & = -41 \\ (3) & -11x + 6y + 4z & = -40 \end{array} \quad (6)$$

Für die Lösung kommen mehrere Verfahren in Frage.

Lösungsvariante 1: Cramersche Regel

Bestimmen wir zuerst die Variable x .

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 5 & -13 \\ -41 & 15 & -6 \\ -40 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 5 & -13 \\ 2 & 15 & -6 \\ -11 & 6 & 4 \end{vmatrix}}$$

Zum Auflösen der Determinanten verwende ich im Zähler und im Nenner jeweils den Satz von Sarrus. Damit der übersichtlicher angewendet werden kann, schreibe ich jeweils die erste und zweite Spalte noch einmal hinter die Determinanten.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -3 & 5 & -13 & -3 & 5 \\ -41 & 15 & -6 & -41 & 15 \\ -40 & 6 & 4 & -40 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 5 & -13 & 6 & 5 \\ 2 & 15 & -6 & 2 & 15 \\ -11 & 6 & 4 & -11 & 6 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-180 + 1200 + 3198 - 7800 - 108 + 820}{360 + 330 - 156 - 2145 + 216 - 40} \\ &= \frac{-2870}{-1435} \\ x &= 2 \quad (7) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von y kann der gleiche Nenner wie bei der Bestimmung von x verwendet werden.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 & -13 \\ 2 & -41 & -6 \\ -11 & -40 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & -3 \\ 2 & -41 \\ -11 & -40 \end{matrix}}{-1\,435} \\
 &= \frac{-984 - 198 + 1\,040 + 5\,863 - 1\,440 + 24}{-1\,435} \\
 &= \frac{4\,305}{-1\,435} \\
 y &= -3 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von z werden die gefundenen Werte für x und y in eine beliebige Gleichung eingesetzt. Ich wähle dazu Gleichung (1).

$$\begin{aligned}
 6x + 5y - 13z &= -3 \\
 6 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) - 13z &= -3 \\
 12 - 15 - 13z &= -3 \\
 -3 - 13z &= -3 \quad | +3 \\
 -13z &= 0 \quad | : (-13) \\
 z &= 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 6x + 5y - 13z &= -3 \\
 (2) \quad 2x + 15y - 6z &= -41 \\
 (3) \quad -11x + 6y + 4z &= -40
 \end{aligned}$$

Ich möchte die Variable y eliminieren. Dazu kombiniere ich zunächst die Gleichungen (1) und (2).

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 6x & +5y -13z = -3 \quad | \cdot 3 \\
 (2) & 2x & +15y -6z = -41 \\
 \hline
 (1) & 18x & +15y -39z = -9 \quad | \\
 (2) & 2x & +15y -6z = -41 \quad | - \\
 \hline
 (4) & 16x & -33z = 32 \quad (3)
 \end{array}$$

Nun kombiniere ich (1) und (3) so, dass ebenfalls y wegfällt.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 6x & +5y -13z = -3 \quad | \cdot 6 \\
 (3) & -11x & +6y +4z = -40 \quad | \cdot 5 \\
 \hline
 (1) & 36x & +30y -78z = -18 \quad | \\
 (3) & -55x & +30y +20z = -200 \quad | - \\
 \hline
 (5) & 91x & -98z = 182 \quad (3)
 \end{array}$$

Wir haben ein Gleichungssystem nur noch zweiter Ordnung erhalten.

$$\begin{array}{rcl} (4) & 16x & -33z = 32 \\ (5) & 91x & -98z = 182 \end{array}$$

Für den nächsten Reduktionsschritt verwende ich ebenfalls das Additions-/Subtraktionsverfahren.

$$\begin{array}{rcl} (4) & 16x & -33z = 32 & | \cdot 91 \\ (5) & 91x & -98z = 182 & | \cdot 16 \\ \hline (4) & 1\,729x & -3\,003z = 2\,912 & | \\ (5) & 1\,729x & -1\,568z = 2\,912 & | - \\ \hline & & -1\,435z = 0 & | : (-1\,435) \\ & & z = 0 & (4) \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (4) ein.

$$\begin{array}{rcl} 16x - 33z & = & 32 \\ 16x - 33 \cdot 0 & = & 32 \\ 16x & = & 32 & | : 16 \\ x & = & 2 & (2) \end{array}$$

Beide Ergebnisse setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcl} 6x + 5y - 13z & = & -3 \\ 6 \cdot 2 + 5y - 13 \cdot 0 & = & -3 & | - 12 \\ 5y & = & -15 & | : 5 \\ y & = & -3 & (2) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(2 | -3 | 0)\}$

1.47 LINGLSYS-42

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x - 4 + 2y & = -6 \\ (2) & 5x - 5 - 3y & = x + 15 \end{array}$$

Lösung: Zunächst muss das Gleichungssystem in die **Normalform** umgewandelt werden.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x - 4 + 2y & = -6 \quad | + 4 \\ (2) & 5x - 5 - 3y & = x + 15 \quad | + 5 - x \\ \hline (1) & 3x + 2y & = -2 \\ (2) & 4x - 3y & = 20 \quad (4) \end{array}$$

Das Additions-/Subtraktionsverfahren kann verwendet werden.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x + 2y & = -2 \\ (2) & 4x - 3y & = 20 \quad | \cdot 2 \\ \hline (1) & 9x + 6y & = -6 \quad | \\ (2) & 8x - 6y & = 40 \quad | + \\ \hline & 17x & = 34 \quad | : 17 \\ & x & = 2 \quad (10) \end{array}$$

Einsetzen in vereinfachte Gleichung (1):

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & -2 \\ 3 \cdot 2 + 2y & = & -2 \\ 6 + 2y & = & -2 \quad | - 6 \\ 2y & = & -8 \quad | : 2 \\ y & = & -4 \quad (6) \end{array}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(2 | -4)\}$

1.48 LINGLSYS-43

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 5x + 5 & = 2y - 20 \\ (2) & 3 - 3y + x & = 3x - 6 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcl} (1) & 5x + 5 & = 2y - 20 \quad | -5 - 2y \\ (2) & 3 - 3y + x & = 3x - 6 \quad | -3 - 3x \\ \hline (1) & 5x - 2y & = -25 \\ (2) & -2x - 3y & = -9 \end{array} \quad (4)$$

Das Additions-/Subtraktionsverfahren kann verwendet werden.

$$\begin{array}{rcl} (1) & 5x & -2y = -25 \quad | \cdot 2 \\ (2) & -2x & -3y = -9 \quad | \cdot 5 \\ \hline (1) & 10x & -4y = -50 \quad | \\ (2) & -10x & -15y = -45 \quad | + \\ \hline & & -19y = -95 \quad | : (-19) \\ & & y = 5 \end{array} \quad (10)$$

Einsetzen in vereinfachte Gleichung (1):

$$\begin{array}{rcl} 5x - 2y & = & -25 \\ 5x - 2 \cdot 5 & = & -25 \\ 5x - 10 & = & -25 \quad | + 10 \\ 5x & = & -15 \quad | : 5 \\ x & = & -3 \end{array} \quad (6)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(-3|5)\}$

1.49 LINGLSYS-44

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem! (20 P.)

$$\begin{array}{lcl} (1) & 5x + 3y - 4 & = 2x - 7 \\ (2) & 2x + 5y + 2 & = y - 6 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 5x + 3y - 4 & = 2x - 7 \quad | + 4 - 2x \\ (2) & 2x + 5y + 2 & = y - 6 \quad | - 2 - y \\ \hline (1) & 3x + 3y & = -3 \\ (2) & 2x + 4y & = -8 \end{array} \quad (4)$$

Das Additions-/Subtraktionsverfahren kann verwendet werden.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3x & + 3y = -3 \quad | \cdot 2 \\ (2) & 2x & + 4y = -8 \quad | \cdot 3 \\ \hline (1) & 6x & + 6y = -6 \quad | \\ (2) & 6x & + 12y = -24 \quad | - \\ \hline & & -6y = 18 \quad | : (-6) \\ & & y = -3 \end{array} \quad (10)$$

Einsetzen in vereinfachte Gleichung (1):

$$\begin{array}{lcl} & 3x + 3y & = -3 \\ & 3x + 3 \cdot (-3) & = -3 \\ & 3x - 9 & = -3 \quad | + 9 \\ & 3x & = 6 \quad | : 3 \\ & x & = 2 \end{array} \quad (6)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(2 | -3)\}$

1.50 LINGLSYS-45

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem! (20 P.)

$$\begin{array}{lcl} (1) & 6x + 4y - 3 & = 2x + 9 \\ (2) & 3x + 6y + 4 & = y + 9 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 6x + 4y - 3 & = 2x + 9 \quad | + 3 - 2x \\ (2) & 3x + 6y + 4 & = y + 9 \quad | - 4 - y \\ \hline (1) & 4x + 4y & = 12 \\ (2) & 3x + 5y & = 5 \end{array} \quad (4)$$

Das Additions-/Subtraktionsverfahren kann verwendet werden.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 4x & + 4y = 12 \quad | \cdot 3 \\ (2) & 3x & + 5y = 5 \quad | \cdot 4 \\ \hline (1) & 12x & + 12y = 36 \quad | \\ (2) & 12x & + 20y = 20 \quad | - \\ \hline & & -8y = 16 \quad | : (-8) \\ & & y = -2 \end{array} \quad (10)$$

Einsetzen in vereinfachte Gleichung (1):

$$\begin{array}{lcl} & 4x + 4y & = 12 \\ & 4x + 4 \cdot (-2) & = 12 \\ & 4x - 8 & = 12 \quad | + 8 \\ & 4x & = 20 \quad | : 4 \\ & x & = 5 \end{array} \quad (6)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(5 | -2)\}$

1.51 LINGLSYS-46

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem! (20 P.)

$$\begin{array}{lcl} (1) & 5x - 4y - 2 & = 2x + 7 \\ (2) & 5x - 6y - 7 & = 3y + 22 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 5x - 4y - 2 & = 2x + 7 \quad | + 2 - 2x \\ (2) & 5x - 6y - 7 & = 3y + 22 \quad | + 7 - 3y \\ \hline (1) & 3x - 4y & = 9 \\ (2) & 5x - 9y & = 29 \end{array} \quad (4)$$

Das Gleichungssystem kann beispielsweise mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren gelöst werden.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3x & -4y = 9 \quad | \cdot 5 \\ (2) & 5x & -9y = 29 \quad | \cdot 3 \\ \hline (1) & 15x & -20y = 45 \quad | \\ (2) & 15x & -27y = 87 \quad | - \\ \hline & & 7y = -42 \quad | : 7 \\ & & y = -6 \end{array} \quad (10)$$

Einsetzen in vereinfachte Gleichung (1):

$$\begin{array}{lcl} & 3x - 4y & = 9 \\ & 3x - 4 \cdot (-6) & = 9 \\ & 3x + 24 & = 9 \quad | - 24 \\ & 3x & = -15 \quad | : 3 \\ & x & = -5 \end{array} \quad (6)$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $L = \{(-5 | -6)\}$

2 Nur Einsetzungsverfahren

2.1 LINGLSYS-47a

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 2 \cdot (2x + 3) + 4y & = 18 \\ (2) & 3 \cdot (x - 3y) + 47 & = 2x \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 2 \cdot (2x + 3) + 4y & = 18 \\ (2) & 3 \cdot (x - 3y) + 47 & = 2x \\ \hline (1) & 4x + 6 + 4y & = 18 & | -6 \\ (2) & 3x - 9y + 47 & = 2x & | -47 - 2x \\ \hline (1) & 4x + 4y & = 12 \\ (2) & x - 9y & = -47 & (6) \end{array}$$

Gleichung (2) wird nach x umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} x - 9y & = & -47 & | + 9y \\ x & = & -47 + 9y & (4) \end{array}$$

Einsetzen in (1):

$$\begin{array}{lcl} 4x + 4y & = & 12 \\ 4(-47 + 9y) + 4y & = & 12 \\ -188 + 36y + 4y & = & 12 \\ -188 + 40y & = & 12 & | + 188 \\ 40y & = & 200 & | : 40 \\ y & = & 5 & (5) \end{array}$$

Einsetzen in umgestellte Gleichung (2):

$$\begin{array}{lcl} x & = & -47 + 9y \\ & = & -47 + 9 \cdot 5 \\ x & = & -2 & (5) \end{array}$$

Ergebnis: $x = -2$ $y = 5$

2.2 LINGLSYS-47b

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & (5x - 3) \cdot 2 - 9(x + y) & = 33 \\ (2) & -3 \cdot (2x - 3y) + 69 & = 5x \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & (5x - 3) \cdot 2 - 9(x + y) & = 33 \\ (2) & -3 \cdot (2x - 3y) + 69 & = 5x \\ \hline (1) & 10x - 6 - 9x - 9y & = 33 \\ (2) & -6x + 9y + 69 & = 5x \quad | - 69 \\ \hline (1) & x - 6 - 9y & = 33 \quad | + 6 \\ (2) & -6x + 9y & = 5x - 69 \quad | - 5x \\ \hline (1) & x - 9y & = 39 \\ (2) & -11x + 9y & = -69 \quad (6) \\ \hline \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach x umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} x - 9y & = & 39 \quad | + 9y \\ x & = & 39 + 9y \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (2) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} -11x + 9y & = & -69 \\ -11 \cdot (39 + 9y) + 9y & = & -69 \\ -429 - 99y + 9y & = & -69 \\ -429 - 90y & = & -69 \quad | + 429 \\ -90y & = & 360 \quad | : (-90) \\ y & = & -4 \quad (5) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte (1) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} x & = & 39 + 9y \\ & = & 39 + 9 \cdot (-4) \\ x & = & 3 \quad (5) \end{array}$$

Ergebnis: $x = 3$ $y = -4$

2.3 LINGLSYS-47c

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & (5x - 2) \cdot 3 - 14(x - y) & = 47 \\ (2) & -4 \cdot (4x - 2y) - 95 & = 5x \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & (5x - 2) \cdot 3 - 14(x - y) & = 47 \\ (2) & -4 \cdot (4x - 2y) - 95 & = 5x \\ \hline (1) & 15x - 6 - 14x + 14y & = 47 \\ (2) & -16x + 8y - 95 & = 5x \quad | + 95 \\ \hline (1) & x - 6 + 14y & = 47 \quad | + 6 \\ (2) & -16x + 8y & = 5x + 59 \quad | - 5x \\ \hline (1) & x + 14y & = 53 \\ (2) & -21x + 8y & = 95 \quad (6) \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach x umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} x + 14y & = & 53 \quad | - 14y \\ x & = & 53 - 14y \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (2) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} -21x + 8y & = & 95 \\ -21 \cdot (53 - 14y) + 8y & = & 95 \\ -1113 + 294y + 8y & = & 95 \\ -1113 + 302y & = & 95 \quad | + 1113 \\ 302y & = & 1208 \\ y & = & 4 \quad (5) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte (1) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} x & = & 53 - 14y \\ & = & 53 - 14 \cdot 4 \\ x & = & -3 \quad (5) \end{array}$$

Ergebnis: $x = -3$ $y = 4$

2.4 LINGLSYS-47d

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & (6x + 12) \cdot 2 - 13(-y + x) & = -26 \\ (2) & -5 \cdot (3x - 2y) + 2 & = 4x \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & (6x + 12) \cdot 2 - 13(-y + x) & = -26 \\ (2) & -5 \cdot (3x - 2y) + 2 & = 4x \\ \hline (1) & 12x + 24 + 13y - 13x & = -26 \\ (2) & -15x + 10y + 2 & = 4x \quad | -2 \\ \hline (1) & -x + 24 + 13y & = -26 \quad | -24 \\ (2) & -15x + 10y & = 4x - 2 \quad | -4x \\ \hline (1) & -x + 13y & = -50 \\ (2) & -19x + 10y & = -2 \quad (6) \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach x umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} -x + 13y & = & -50 \quad | -13y \\ -x & = & -50 - 13y \quad | \cdot (-1) \\ x & = & 50 + 13y \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (2) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} -19x + 10y & = & -2 \\ -19 \cdot (50 + 13y) + 10y & = & -2 \\ -950 - 247y + 10y & = & -2 \\ -950 - 237y & = & -2 \quad | +950 \\ -237y & = & 948 \quad | : (-237) \\ y & = & -4 \quad (5) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte (1) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} x & = & 50 + 13y \\ x & = & 50 + 13 \cdot (-4) \\ & = & 50 - 52 \\ x & = & -2 \quad (5) \end{array}$$

Ergebnis: $x = -2$ $y = -4$

2.5 LINGLSYS-48a

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & (x + 2y) \cdot 2 - (x - 5y) & = -6 \\ (2) & (3x - 5y) - (x + 3y) \cdot 7 & = 14 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & (x + 2y) \cdot 2 - (x - 5y) & = -6 \\ (2) & (3x - 5y) - (x + 3y) \cdot 7 & = 14 \\ \hline (1) & 2x + 4y - x + 5y & = -6 \\ (2) & 3x - 5y - 7x - 21y & = 14 \\ \hline (1) & x + 9y & = -6 \\ (2) & -4x - 26y & = 14 \quad (6) \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach x umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} x + 9y & = & -6 \quad | -9y \\ x & = & -6 - 9y \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (2) für x eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} -4x - 26y & = & 14 \\ -4 \cdot (-6 - 9y) - 26y & = & 14 \\ 24 + 36y - 26y & = & 14 \\ 24 + 10y & = & 14 \quad | -24 \\ 10y & = & -10 \quad | :10 \\ y & = & -1 \quad (5) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} x & = & -6 - 9y \\ x & = & -6 - 9 \cdot (-1) \\ x & = & -6 + 9 \\ x & = & 3 \quad (5) \end{array}$$

Ergebnis: $x = 3$ $y = -1$

2.6 LINGLSYS-48b

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & (2x + 3y) \cdot 2 - (3x - 2y) & = -22 \\ (2) & (3x - 5y) - (3x - 2y) \cdot 4 & = -27 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & (2x + 3y) \cdot 2 - (3x - 2y) & = -22 \\ (2) & (3x - 5y) - (3x - 2y) \cdot 4 & = -27 \\ \hline (1) & 4x + 6y - 3x + 2y & = -22 \\ (2) & 3x - 5y - 12x + 8y & = -27 \\ \hline (1) & x + 8y & = -22 \\ (2) & -9x + 3y & = -27 \quad (6) \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach x umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} x + 8y & = & -22 \quad | - 8y \\ x & = & -22 - 8y \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (2) für x eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} -9x + 3y & = & -27 \\ -9 \cdot (-22 - 8y) + 3y & = & -27 \\ 198 + 72y + 3y & = & -27 \\ 198 + 75y & = & -27 \quad | - 198 \\ 75y & = & -225 \quad | : 75 \\ y & = & -3 \quad (5) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} x & = & -22 - 8y \\ x & = & -22 - 8 \cdot (-3) \\ & = & -22 + 24 \\ x & = & 2 \quad (5) \end{array}$$

Ergebnis: $x = 2$ $y = -3$

2.7 LINGLSYS-48c

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & (4x - 2y) \cdot 2 - (2x - 3y) & = 22 \\ (2) & (6x - 2y) - (2x - y) \cdot 4 & = -14 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & (4x - 2y) \cdot 2 - (2x - 3y) & = 22 \\ (2) & (6x - 2y) - (2x - y) \cdot 4 & = -14 \\ \hline (1) & 8x - 4y - 2x + 3y & = 22 \\ (2) & 6x - 2y - 8x + 4y & = -14 \\ \hline (1) & 6x - y & = 22 \\ (2) & -2x + 2y & = -14 \quad (6) \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach y umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} 6x - y & = & 22 \quad | -6x \\ -y & = & 22 - 6x \quad | \cdot (-1) \\ y & = & -22 + 6x \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (2) für y eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} -2x + 2y & = & -14 \\ -2x + 2 \cdot (-22 + 6x) & = & -14 \\ -2x - 44 + 12x & = & -14 \\ 10x - 44 & = & -14 \quad | +44 \\ 10x & = & 30 \quad | :10 \\ x & = & 3 \quad (5) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt:

$$\begin{array}{lcl} y & = & -22 + 6x \\ y & = & -22 + 6 \cdot 3 \\ & = & -22 + 18 \\ y & = & -4 \quad (5) \end{array}$$

Ergebnis: $x = 3$ $y = -4$

2.8 LINGLSYS-48d

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & (6x - 3y) \cdot 4 - (5x - 11y) & = 94 \\ (2) & (2x - 6y) - (x - 5y) \cdot 6 & = 4 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcl} (1) & (6x - 3y) \cdot 4 - (5x - 11y) & = 94 \\ (2) & (2x - 6y) - (x - 5y) \cdot 6 & = 4 \\ \hline (1) & 24x - 12y - 5x + 11y & = 94 \\ (2) & 2x - 6y - 6x + 30y & = 4 \\ \hline (1) & 19x - y & = 94 \\ (2) & -4x + 24y & = 4 \quad (6) \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach y umgestellt:

$$\begin{array}{rcl} 19x - y & = & 94 \quad | -19x \\ -y & = & 94 - 19x \quad | \cdot (-1) \\ y & = & -94 + 19x \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (2) für y eingesetzt:

$$\begin{array}{rcl} -4x + 24y & = & 4 \\ -4x + 24 \cdot (-94 + 19x) & = & 4 \\ -4x - 2256 + 456x & = & 4 \\ 452x - 2256 & = & 4 \quad | +2256 \\ 452x & = & 2260 \quad | : 452 \\ x & = & 5 \quad (5) \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt:

$$\begin{array}{rcl} y & = & -94 + 19x \\ y & = & -94 + 19 \cdot 5 \\ & = & -94 + 95 \\ y & = & 1 \quad (5) \end{array}$$

Ergebnis: $x = 3$ $y = -4$

2.9 LINGLSYS-49a

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 5(x-3) - 4(2x+y) & = 9(2x+2y) - 6(3x-5y) - 217 \\ (2) & 12 - 2(-x-2) - 3(2-2y) & = 5(2x+y) - 3(-4x+8) + 78 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 5(x-3) - 4(2x+y) & = 9(2x+2y) - 6(3x-5y) - 217 \\ (2) & 12 - 2(-x-2) - 3(2-2y) & = 5(2x+y) - 3(-4x+8) + 78 \\ \hline (1) & 5x - 15 - 8x - 4y & = 18x + 18y - 18x + 30y - 217 \\ (2) & 12 + 2x + 4 - 6 + 6y & = 10x + 5y + 12x - 24 + 78 \\ \hline (1) & -3x - 15 - 4y & = 48y - 217 & | + 15 - 48y \\ (2) & 10 + 2x + 6y & = 22x + 5y + 54 & | - 10 - 22x - 5y \\ \hline (1) & -3x - 52y & = -202 \\ (2) & -20x + y & = 44 & (8) \end{array}$$

Gleichung (2) wird nach y umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} -20x + y & = & 44 & | + 20x \\ y & = & 44 + 20x & (4) \end{array}$$

Einsetzen in (1):

$$\begin{array}{lcl} -3x - 52y & = & -202 \\ -3x - 52 \cdot (44 + 20x) & = & -202 \\ -3x - 2288 - 1040x & = & -202 \\ -1043x - 2288 & = & -202 & | + 2288 \\ -1043x & = & 2086 & | : (-1043) \\ x & = & -2 & (5) \end{array}$$

Einsetzen in umgestellte (2):

$$\begin{array}{lcl} y & = & 44 + 20x \\ y & = & 44 + 20 \cdot (-2) \\ y & = & 44 - 40 \\ y & = & 4 & (3) \end{array}$$

Ergebnis: $x = -2$ $y = 4$

2.10 LINGLSYS-49b

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{l} (1) \quad 5(x-2) - 3(2x-9y) - 27 = 8(3x+2y) - 4(2x-3y) \\ (2) \quad 11 - 3(-x-4) - 4(3-2y) = 5(2x+y) - 4(-3x-5) + 20 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 5(x-2) - 3(2x-9y) - 27 = 8(3x+2y) - 4(2x-3y) \\ (2) \quad 11 - 3(-x-4) - 4(3-2y) = 5(2x+y) - 4(-3x-5) + 20 \\ \hline (1) \quad 5x - 10 - 6x + 27y - 27 = 24x + 16y - 8x + 12y \\ (2) \quad 11 + 3x + 12 - 12 + 8y = 10x + 5y + 12x + 20 + 20 \\ \hline (1) \quad -x + 27y - 37 = 16x + 28y \quad | + 37 - 16x - 28y \\ (2) \quad 3x + 8y + 11 = 22x + 5y + 40 \quad | - 11 - 22x - 5y \\ \hline (1) \quad -17x - y = 37 \\ (2) \quad -19x + 3y = 29 \quad (8) \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach y umgestellt:

$$\begin{array}{l} -17x - y = 37 \quad | + 17x \\ -y = 37 + 17x \quad | \cdot (-1) \\ y = -37 - 17x \quad (4) \end{array}$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{array}{l} -19x + 3y = 29 \\ -19x + 3(-37 - 17x) = 29 \\ -19x - 111 - 51x = 29 \\ -70x - 111 = 29 \quad | + 111 \\ -70x = 140 \quad | : (-70) \\ x = -2 \quad (5) \end{array}$$

Einsetzen in umgestellte (1):

$$\begin{array}{l} y = -37 - 17x \\ y = -37 - 17 \cdot (-2) \\ = -37 + 34 \\ y = -3 \quad (3) \end{array}$$

Ergebnis: $x = -2$ $y = -3$

2.11 LINGLSYS-49c

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3(x-5) - 4(3x-2y) - 75 & = 3(4x+3y) - 5(-3x-4) \\ (2) & -3(-x-7) - 2(2-3y) & = 4(2x+y) - 5(-3x-4) + 53 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3(x-5) - 4(3x-2y) - 75 & = 3(4x+3y) - 5(-3x-4) \\ (2) & -3(-x-7) - 2(2-3y) & = 4(2x+y) - 5(-3x-4) + 53 \\ \hline (1) & 3x - 15 - 12x + 8y - 75 & = 12x + 9y + 15x + 20 \\ (2) & 3x + 21 - 4 + 6y & = 8x + 4y + 15x + 20 + 53 \\ \hline (1) & -9x - 90 + 8y & = 27x + 9y + 20 & | + 90 - 27x - 9y \\ (2) & 3x + 17 + 6y & = 23x + 4y + 73 & | - 17 - 23x - 4y \\ \hline (1) & -36x - y & = 110 \\ (2) & -20x + 2y & = 56 & (8) \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach y umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} -36x - y & = & 110 & | + 36x \\ -y & = & 110 + 36x & | \cdot (-1) \\ y & = & -110 - 36x & (4) \end{array}$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{array}{lcl} -20x + 2y & = & 56 \\ -20x + 2 \cdot (-110 - 36x) & = & 56 \\ -20x - 220 - 72x & = & 56 \\ -92x - 220 & = & 56 & | + 220 \\ -92x & = & 276 & | : (-92) \\ x & = & -3 & (5) \end{array}$$

Einsetzen in umgestellte (1):

$$\begin{array}{lcl} y & = & -110 - 36x \\ y & = & -110 - 36 \cdot (-3) \\ & = & -110 + 108 \\ y & = & -2 & (3) \end{array}$$

Ergebnis: $x = -3$ $y = -2$

2.12 LINGLSYS-49d

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 4(x-2) - 3(4x-3y) - 82 & = 5(4x+2y) - 4(-2x-5) \\ (2) & -5(-x-3) - 3(2-3y) & = 5(2x+y) - 3(-2x-5) + 19 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 4(x-2) - 3(4x-3y) - 82 & = 5(4x+2y) - 4(-2x-5) \\ (2) & -5(-x-3) - 3(2-3y) & = 5(2x+y) - 3(-2x-5) + 19 \\ \hline (1) & 4x - 8 - 12x + 9y - 82 & = 20x + 10y + 8x + 20 \\ (2) & 5x + 15 - 6 + 9y & = 10x + 5y + 6x + 15 + 19 \\ \hline (1) & -8x - 90 + 9y & = 28x + 10y + 20 & | + 90 - 28x - 10y \\ (2) & 5x + 9 + 9y & = 16x + 5y + 34 & | - 9 - 16x - 5y \\ \hline (1) & -36x - y & = 110 \\ (2) & -11x + 4y & = 25 & (8) \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach y umgestellt:

$$\begin{array}{lcl} -36x - y & = & 110 & | + 36x \\ -y & = & 110 + 36x & | \cdot (-1) \\ y & = & -110 - 36x & (4) \end{array}$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{array}{lcl} -11x + 4y & = & 25 \\ -11x + 4 \cdot (-110 - 36x) & = & 25 \\ -11x - 440 - 144x & = & 25 \\ -155x - 440 & = & 25 & | + 440 \\ -155x & = & 465 & | : (-155) \\ x & = & -3 & (5) \end{array}$$

Einsetzen in umgestellte (1):

$$\begin{array}{lcl} y & = & -110 - 36x \\ y & = & -110 - 36 \cdot (-3) \\ & = & -110 + 108 \\ y & = & -2 & (3) \end{array}$$

Ergebnis: $x = -3$ $y = -2$

2.13 LINGLSYS-50a

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x - 4y + 2z & = -13 \\ (2) & 5x - y + 4z & = -6 \\ (3) & -2x + 3y - 11z & = 29 \end{array}$$

Lösung: Gleichung (2) wird nach y umgestellt:

$$\begin{array}{rcl} 5x - y + 4z & = & -6 \quad | -5x - 4z \\ -y & = & -6 - 5x - 4z \quad | \cdot (-1) \\ y & = & 6 + 5x + 4z \quad (4) \end{array}$$

Einsetzen in (1) und in (3):

$$\begin{array}{rcl} (1a) & 3x - 4 \cdot (6 + 5x + 4z) + 2z & = -13 \\ (3a) & -2x + 3 \cdot (6 + 5x + 4z) - 11z & = 29 \\ \hline (1a) & 3x - 24 - 20x - 16z + 2z & = -13 \\ (3a) & -2x + 18 + 15x + 12z - 11z & = 29 \\ \hline (1a) & -17x - 24 - 14z & = -13 \quad | +24 \\ (3a) & 13x + 18 + z & = 29 \quad | -18 \\ \hline (1a) & -17x - 14z & = 11 \\ (3a) & 13x + z & = 11 \quad (6) \end{array}$$

Gleichung (3a) nach z umstellen:

$$\begin{array}{rcl} 13x + z & = & 11 \quad | -13x \\ z & = & 11 - 13x \quad (2) \end{array}$$

Das Ergebnis in (1a) einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} -17x - 14z & = & 11 \\ -17x - 14 \cdot (11 - 13x) & = & 11 \\ -17x - 154 + 182x & = & 11 \\ 165x - 154 & = & 11 \quad | +154 \\ 165x & = & 165 \quad | :165 \\ x & = & 1 \quad (4) \end{array}$$

Das Ergebnis in umgestellte (3a) einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} z & = & 11 - 13x \\ z & = & 11 - 13 \cdot 1 \\ z & = & -2 \quad (2) \end{array}$$

Beide Ergebnisse in die umgestellte (2) einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 6 + 5x + 4z \\ y & = & 6 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \\ y & = & 3 \quad (2) \end{array}$$

Ergebnis: $x = 1$ $y = 3$ $z = -2$

2.14 LINGLSYS-50b

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3x - 2y + 3z & = 16 \\ (2) & 5x + 3y - 3z & = -10 \\ (3) & 2x - 6y - z & = 11 \end{array}$$

Lösung: Gleichung (3) wird nach z umgestellt:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 6y - z & = & 11 \\ -z & = & 11 - 2x + 6y \\ z & = & -11 + 2x - 6y \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 2x + 6y \\ | \cdot (-1) \end{array} \quad (4)$$

Einsetzen in (1) und in (2):

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x - 2y + 3z & = 16 \\ (2) & 5x + 3y - 3z & = -10 \\ \hline (1a) & 3x - 2y + 3 \cdot (-11 + 2x - 6y) & = 16 \\ (2a) & 5x + 3y - 3 \cdot (-11 + 2x - 6y) & = -10 \\ \hline (1a) & 3x - 2y - 33 + 6x - 18y & = 16 \\ (2a) & 5x + 3y + 33 - 6x + 18y & = -10 \\ \hline (1a) & 9x - 20y - 33 & = 16 \\ (2a) & -x + 21y + 33 & = -10 \\ \hline (1a) & 9x - 20y & = 49 \\ (2a) & -x + 21y & = -43 \end{array} \quad \begin{array}{l} | + 33 \\ | - 33 \end{array} \quad (6)$$

Gleichung (2a) nach x umstellen:

$$\begin{array}{rcl} -x + 21y & = & -43 \\ -x & = & -43 - 21y \\ x & = & 43 + 21y \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 21y \\ | \cdot (-1) \end{array} \quad (2)$$

Das Ergebnis in (1a) einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} 9x - 20y & = & 49 \\ 9 \cdot (43 + 21y) - 20y & = & 49 \\ 387 + 189y - 20y & = & 49 \\ 387 + 169y & = & 49 \\ 169y & = & -338 \\ y & = & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 387 \\ | : 169 \end{array} \quad (4)$$

Das Ergebnis in die umgestellte (2a) einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 43 + 21y \\ x & = & 43 + 21 \cdot (-2) \\ & = & 43 - 42 \\ x & = & 1 \end{array} \quad (2)$$

Beide Ergebnisse in die umgestellte (3) einsetzen:

$$\begin{aligned} z &= -11 + 2x - 6y \\ z &= -11 + 2 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) \\ &= -11 + 2 + 12 \\ z &= 3 \end{aligned} \quad (2)$$

Ergebnis: $x = 1$ $y = -2$ $z = 3$

2.15 LINGLSYS-50c

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 8x - 3y - 2z & = 13 \\ (2) & 3x - y + 3z & = 16 \\ (3) & 2x + 2y - 4z & = -10 \end{array}$$

Lösung: Gleichung (2) wird nach y umgestellt:

$$\begin{array}{rcl} 3x - y + 3z & = & 16 \\ -y & = & 16 - 3x - 3z \\ y & = & -16 + 3x + 3z \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 3x - 3z \\ | \cdot (-1) \end{array} \quad (4)$$

Einsetzen in (1) und in (3):

$$\begin{array}{rcl} (1) & 8x - 3y - 2z & = 13 \\ (3) & 2x + 2y - 4z & = -10 \\ \hline (1a) & 8x - 3 \cdot (-16 + 3x + 3z) - 2z & = 13 \\ (3a) & 2x + 2 \cdot (-16 + 3x + 3z) - 4z & = -10 \\ \hline (1a) & 8x + 48 - 9x - 9z - 2z & = 13 \\ (3a) & 2x - 32 + 6x + 6z - 4z & = -10 \\ \hline (1a) & -x + 48 - 11z & = 13 \quad | - 48 \\ (3a) & 8x - 32 + 2z & = -10 \quad | + 32 \\ \hline (1a) & -x - 11z & = -35 \\ (3a) & 8x + 2z & = 22 \end{array} \quad (6)$$

Gleichung (1a) nach x umstellen:

$$\begin{array}{rcl} -x - 11z & = & -35 \\ -x & = & -35 + 11z \\ x & = & 35 - 11z \end{array} \quad \begin{array}{l} | + 11z \\ | \cdot (-1) \end{array} \quad (2)$$

Das Ergebnis in (3a) einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} 8x + 2z & = & 22 \\ 8 \cdot (35 - 11z) + 2z & = & 22 \\ 280 - 88z + 2z & = & 22 \\ 280 - 86z & = & 22 \quad | - 280 \\ -86z & = & -258 \quad | : (-86) \\ z & = & 3 \end{array} \quad (4)$$

Das Ergebnis in die umgestellte (1a) einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 35 - 11z \\ x & = & 35 - 11 \cdot 3 \\ & = & 35 - 33 \\ x & = & 2 \end{array} \quad (2)$$

Beide Ergebnisse in die umgestellte (2) einsetzen:

$$\begin{aligned}y &= -16 + 3x + 3z \\y &= -16 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\y &= -16 + 6 + 9 \\y &= -1\end{aligned}\tag{2}$$

Ergebnis: $x = 2$ $y = -1$ $z = 3$

2.16 LINGLSYS-50d

Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das nachfolgende Gleichungssystem!

$$\begin{array}{rcl} (1) & 5x - 3y + 3z & = -10 \\ (2) & 3x + 3y - 2z & = 16 \\ (3) & 2x - y - 6z & = 11 \end{array}$$

Lösung: Gleichung (3) wird nach y umgestellt:

$$\begin{array}{rcl} 2x - y - 6z & = & 11 \\ -y & = & 11 - 2x + 6z \\ y & = & -11 + 2x - 6z \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 2x + 6z \\ | \cdot (-1) \\ (4) \end{array}$$

Einsetzen in (1) und in (2):

$$\begin{array}{rcl} (1) & 5x - 3y + 3z & = -10 \\ (2) & 3x + 3y - 2z & = 16 \\ \hline (1a) & 5x - 3 \cdot (-11 + 2x - 6z) + 3z & = -10 \\ (2a) & 3x + 3 \cdot (-11 + 2x - 6z) - 2z & = 16 \\ \hline (1a) & 5x + 33 - 6x + 18z + 3z & = -10 \\ (2a) & 3x - 33 + 6x - 18z - 2z & = 16 \\ \hline (1a) & -x + 33 + 21z & = -10 \\ (2a) & 9x - 33 - 20z & = 16 \\ \hline (1a) & -x + 21z & = -43 \\ (2a) & 9x - 20z & = 49 \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 33 \\ | + 33 \\ \\ \\ \\ (6) \end{array}$$

Gleichung (1a) nach x umstellen:

$$\begin{array}{rcl} -x + 21z & = & -43 \\ -x & = & -43 - 21z \\ x & = & 43 + 21z \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 21z \\ | \cdot (-1) \\ (2) \end{array}$$

Das Ergebnis in (2a) einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} 9x - 20z & = & 49 \\ 9 \cdot (43 + 21z) - 20z & = & 49 \\ 387 + 189z - 20z & = & 49 \\ 387 + 169z & = & 49 \\ 169z & = & -338 \\ z & = & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} | - 387 \\ | : 169 \\ (4) \end{array}$$

Das Ergebnis in die umgestellte (1a) einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 43 + 21z \\ x & = & 43 + 21 \cdot (-2) \\ & = & 43 - 42 \\ x & = & 1 \end{array} \quad (2)$$

Beide Ergebnisse in die umgestellte (3) einsetzen:

$$\begin{aligned}y &= -11 + 2x - 6z \\y &= -11 + 2 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) \\&= -11 + 2 + 12 \\y &= 3\end{aligned}\tag{2}$$

Ergebnis: $x = 1$ $y = 3$ $z = -2$