

Musterlösungen Kurvendiskussionen

Inhaltsverzeichnis

1	Komplettaufgaben	2
1.1	KURVENDI-01	2
1.2	KURVENDI-02	7
1.3	KURVENDI-03	11
1.4	KURVENDI-04	15
1.5	KURVENDI-05	19
1.6	KURVENDI-06	25
1.7	KURVENDI-07	30
1.8	KURVENDI-08	36
1.9	KURVENDI-09	41
1.10	KURVENDI-10	48
1.11	KURVENDI-11	51
1.12	KURVENDI-12	55
1.13	KURVENDI-13	59
1.14	KURVENDI-14	62
1.15	KURVENDI-15	65
1.16	KURVENDI-16	69
1.17	KURVENDI-17	74
1.18	KURVENDI-18	79
1.19	KURVENDI-19	83
1.20	KURVENDI-20	88
1.21	KURVENDI-21	92
1.22	KURVENDI-22	96
1.23	KURVENDI-23	100
1.24	KURVENDI-24	104
1.25	KURVENDI-25	107
2	Ohne Wendestellen und Definitionsbereich	110
2.1	KURVENDI-51	110
2.2	KURVENDI-52	112
2.3	KURVENDI-60	114
2.4	KURVENDI-61	116
2.5	KURVENDI-62	118
2.6	KURVENDI-63	120
2.7	KURVENDI-64	122
2.8	KURVENDI-70	124
2.9	KURVENDI-71	126
2.10	KURVENDI-72	128

Köpfe

Klassenarbeit Mathematik Nr. 1

Klasse: FOS 21	Name:	Datum: 12.03.2013
Punkte:	von 40 Ordnungsfaktor:	%
Blätterzahl:	Note:	

*Zu allen Aufgaben muss immer ein **vollständiger** und **nachvollziehbarer** Lösungsweg mit angegeben werden. Bitte achten Sie auf die korrekte Verwendung mathematischer Zeichen wie Gleichheitszeichen, Bruchstriche, Klammern usw. Es droht **Punktabzug**!*

Bitte tragen Sie Ihren Namen sowie die Zahl der eigenen Blätter oben ein. Ordnen Sie die Blätter in eine vernünftigen Reihenfolge, bevor Sie diese zur Abgabe zusammenheften.

1 Komplettaufgaben

1.1 KURVENDI-01

Diskutieren Sie die Funktion $f(x)$ und skizzieren Sie ihren Graphen!

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keinerlei einschränkende Merkmale wie Brüche oder Wurzeln erkennbar sind, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null. Wir erhalten dann eine Gleichung vierten Grades, die wir allgemein nicht analytisch lösen können. Allerdings können wir x_0^2 ausklammern.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^4 - 8x_0^3 + 18x_0^2 &= 0 \\ x_0^2 \cdot (x_0^2 - 8x_0 + 18) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad (1)$$

Die weiteren Nullstellen erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned}x_0^2 - 8x_0 + 18 &= 0 \\x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 18} \\x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{-2}\end{aligned}$$

Die Wurzel hat keine (reelle) Lösung. Die Funktion hat also nur die einzige Nullstelle:

$$x_0 = 0 \quad (1)$$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$y_0 = f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 18 \cdot 0^2 = 0$$

Das fassen wir zusammen und erhalten:

$$y_0 = 0 \quad (1)$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^4 - 8x^3 + 18x^2 \\f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 36x \quad (1) \\f''(x) &= 12x^2 - 48x + 36 \quad (1) \\f'''(x) &= 24x - 48 \quad (1)\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned}f'(x_e) &= 0 \\4x_e^3 - 24x_e^2 + 36x_e &= 0 \quad | : 4 \\x_e^3 - 6x_e^2 + 9x_e &= 0 \\x_e \cdot (x_e^2 - 6x_e + 9) &= 0\end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der **linke** Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste mögliche Extremstelle:

$$x_{e1} = 0 \quad (1)$$

Die weiteren Kandidaten erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned}x_e^2 - 6x_e + 9 &= 0 \\x_{e2/3} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 9} \\x_{e2} &= 3 \quad (1)\end{aligned}$$

Was genau an welcher Stelle los ist, muss jetzt im einzelnen untersucht werden.

Was ist bei $x_{e1} = 0$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 36 = 36 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x = 0 \quad (1)$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{e1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_T = f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 18 \cdot 0^2 = 0$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(0|0)$** (1)

Was ist bei $x_{e2} = 3$?

Die Prüfung führe ich ebenfalls mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 48 \cdot 3 + 36 = 108 - 144 + 36 = 0 \Rightarrow \text{Keine Aussage möglich!} \quad (1)$$

Da diese Methode zu keinem Ergebnis geführt hat, verwenden wir die alternative Methode, die mit der ersten Ableitung auskommt, zur Untersuchung. Als „Nachbarwerte“ zu $x_{e2} = 3$ wähle ich 2 und 4 aus.

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 8 > 0 \\ f'(4) = 4 \cdot 4^3 - 24 \cdot 4^2 + 36 \cdot 4 = 16 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

Da **kein** Vorzeichenwechsel vorliegt, haben wir einen **Sattelpunkt**. (1)

Den y -Wert des Sattelpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{e2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_s = f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 = 27$$

Damit können wir den Sattelpunkt angeben: **Sattelpunkt $S(3|27)$** (1)

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f''(x_w) &= 0 \\ 12x_w^2 - 48x_w + 36 &= 0 \quad | : 12 \\ x_w^2 - 4x_w + 3 &= 0 \quad (1) \\ x_{w1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_{w1/2} &= 2 \pm 1 \\ x_{w1} &= 1 \quad x_{w2} = 3 \quad (1) \end{aligned}$$

Wir haben zwei Kandidaten für Wendepunkte gefunden. Was dort jeweils tatsächlich los ist, prüfe ich im einzelnen jeweils mit Hilfe der dritten Ableitung.

Was ist bei $x_{w1} = 1$?

$$f'''(1) = 24 \cdot 1 - 48 = -24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = 1 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{w1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(1) = 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 18 \cdot 1^2 = 11$$

Damit können wir den ersten Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W_1(1|11)$** (1)

Was ist bei $x_{w2} = 3$?

$$f'''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = 3 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{w2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 = 27$$

Damit können wir den zweiten Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W_2(3|27)$** (1)

4. Skizze: Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$ dargestellt: (4)



1.2 KURVENDI-02

Diskutieren Sie die Funktion $f(x)$ und skizzieren Sie ihren Graphen!

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keinerlei einschränkende Merkmale wie Brüche oder Wurzeln erkennbar sind, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null. Wir erhalten dann eine Gleichung vierten Grades, die wir allgemein nicht analytisch lösen können. Allerdings können wir x_0^2 ausklammern.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^4 + 8x_0^3 + 18x_0^2 &= 0 \\ x_0^2 \cdot (x_0^2 + 8x_0 + 18) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der **linke** Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad (1)$$

Die weiteren Nullstellen erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned} x_0^2 + 8x_0 + 18 &= 0 \\ x_{02/3} &= -4 \pm \sqrt{4^2 - 18} \\ x_{02/3} &= -4 \pm \sqrt{-2} \end{aligned}$$

Die Wurzel hat keine (reelle) Lösung. Die Funktion hat also nur die einzige Nullstelle:

$$x_0 = 0 \quad (1)$$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$y_0 = f(0) = 0^4 + 8 \cdot 0^3 + 18 \cdot 0^2 = 0$$

Das fassen wir zusammen und erhalten:

$$y_0 = 0 \quad (1)$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 8x^3 + 18x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 + 24x^2 + 36x \quad (1) \\ f''(x) &= 12x^2 + 48x + 36 \quad (1) \\ f'''(x) &= 24x + 48 \quad (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f'(x_e) &= 0 \\ 4x_e^3 + 24x_e^2 + 36x_e &= 0 \quad | : 4 \\ x_e^3 + 6x_e^2 + 9x_e &= 0 \\ x_e \cdot (x_e^2 + 6x_e + 9) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste mögliche Extremstelle:

$$x_{e1} = 0 \quad (1)$$

Die weiteren Kandidaten erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned} x_e^2 + 6x_e + 9 &= 0 \\ x_{e2/3} &= -3 \pm \sqrt{3^2 - 9} \\ x_{e2} &= -3 \quad (1) \end{aligned}$$

Was genau an welcher Stelle los ist, muss jetzt im einzelnen untersucht werden.

Was ist bei $x_{e1} = 0$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 + 48 \cdot 0 + 36 = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x = 0 \quad (1)$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{e1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_T = f(0) = 0^4 + 8 \cdot 0^3 + 18 \cdot 0^2 = 0$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(0|0)$** (1)

Was ist bei $x_{e2} = -3$?

Die Prüfung führe ich ebenfalls mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(-3) = 12 \cdot (-3)^2 + 48 \cdot (-3) + 36 = 108 - 144 + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Aussage möglich!} \quad (1)$$

Da diese Methode zu keinem Ergebnis geführt hat, verwenden wir die alternative Methode, die mit der ersten Ableitung auskommt, zur Untersuchung. Als „Nachbarwerte“ zu $x_{e2} = -3$ wähle ich -4 und -2 aus.

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(-4) = 4 \cdot (-4)^3 + 24 \cdot (-4)^2 + 36 \cdot (-4) = -16 < 0 \\ f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 24 \cdot (-2)^2 + 36 \cdot (-2) = -8 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

Da **kein** Vorzeichenwechsel vorliegt, haben wir einen **Sattelpunkt**. (1)

Den y -Wert des Sattelpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{e2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_s = f(-3) = (-3)^4 + 8 \cdot (-3)^3 + 18 \cdot (-3)^2 = 27$$

Damit können wir den Sattelpunkt angeben: **Sattelpunkt $S(-3|27)$** (1)

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f''(x_w) &= 0 \\ 12x_w^2 + 48x_w + 36 &= 0 \quad | : 12 \\ x_w^2 + 4x_w + 3 &= 0 \quad (1) \\ x_{w1/2} &= -2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_{w1/2} &= -2 \pm 1 \\ x_{w1} &= -1 \quad x_{w2} = -3 \quad (1) \end{aligned}$$

Wir haben zwei Kandidaten für Wendepunkte gefunden. Was dort jeweils tatsächlich los ist, prüfe ich im einzelnen jeweils mit Hilfe der dritten Ableitung.

Was ist bei $x_{w1} = -1$?

$$f'''(-1) = 24 \cdot (-1) + 48 = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = -1 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{w1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(-1) = (-1)^4 + 8 \cdot (-1)^3 + 18 \cdot (-1)^2 = 11$$

Damit können wir den ersten Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W_1(-1|11)$** (1)

Was ist bei $x_{w2} = -3$?

$$f'''(-3) = 24 \cdot (-3) + 48 = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = -3 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{w2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(-3) = (-3)^4 + 8 \cdot (-3)^3 + 18 \cdot (-3)^2 = 27$$

Damit können wir den zweiten Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W_2(-3|27)$** (1)

4. Skizze: Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2$ dargestellt: (4)



1.3 KURVENDI-03

Untersuchen Sie die angegebene Funktion $f(x)$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Hoch- /Tief- /Sattelpunkte, Wendepunkte und skizzieren Sie den Graphen!

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenschnittpunkte

Nullstellen Zur Bestimmung der Nullstellen wird die Funktionsgleichung gleich Null gesetzt.

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0^3 - 9x_0^2 + 24x_0 - 16 = 0$$

Hier haben wir eine Kubische Gleichung, für die wir keine analytische Lösung zur Verfügung haben. Durch **planvolles** Raten (in Frage kommen alle Teiler des absoluten Gliedes, also von 16) erhalten wir die erste Lösung:

$$x_{01} = 1 \quad (1)$$

Zur Bestimmung der weiteren Nullstellen lässt sich bekanntlich der Term $(x - x_{01})$ ausklammern. Dazu führen wir eine **Polynomdivision** durch und erhalten:

$$(x_0^3 - 9x_0^2 + 24x_0 - 16) : (x - 1) = x^2 - 8x + 16 \quad (2)$$

Die Funktion $f(x)$ lässt sich demnach so faktorisieren:

$$f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 8x + 16) \quad (1)$$

Bekanntlich ist ein Produkt genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Da wir die Nullstelle des ersten Faktors schon bestimmt haben, können wir die weiteren aus dem zweiten Faktor erhalten.

$$\begin{aligned} x_0^2 - 8x_0 + 16 &= 0 \\ x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \\ x_{02} &= 4 \quad (2) \end{aligned}$$

Wir haben also die Nullstellen: $x_{01} = 1$ und $x_{02} = 4$

y-Achsenabschnitt Zur Bestimmung des y -Achsenabschnittes setzt man Null in die Funktionsgleichung ein.

$$y_0 = f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 - 16 = -16$$

Der y -Achsenabschnitt lautet: $y_0 = -16$ (1)

3. Extrema Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 & (1) \\ f''(x) &= 6x - 18 & (1) \\ f'''(x) &= 6 & (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f'(x_e) &= 0 \\ 3x_e^2 - 18x_e + 24 &= 0 \quad | :3 \\ x_e^2 - 6x_e + 8 &= 0 \\ x_{e1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\ x_{e1/2} &= 3 \pm 1 \\ x_{e1} = 2 \quad x_{e2} &= 4 & (2) \end{aligned}$$

Wir haben damit **zwei Kandidaten** für Extrema gefunden. An welcher Stelle welches Verhalten vorliegt, muss jetzt einzeln untersucht werden. Ich verwende das Kriterium, das die zweite Ableitung verwendet, weil wir die ja ohnehin schon bestimmt haben.

Was ist los bei $x_{e1} = 2$?

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

Den y -Wert des Hochpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{e1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_h = f(x_{e1}) = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 16 = 4$$

Damit können wir den Hochpunkt angeben: $\text{Hochpunkt } H(2|4)$ (2)

Was ist los bei $x_{e2} = 4$?

$$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{e2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_t = f(x_{e2}) = f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 16 = 0$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(4|0)$** (2)

4. Wendepunktbestimmung Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f''(x_w) &= 0 \\ 6x_w - 18 &= 0 \quad | +18 \\ 6x_w &= 18 \quad | :6 \\ x_w &= 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Bei $x_w = 3$ könnte also ein Wendepunkt liegen. Ob das tatsächlich der Fall ist, prüfe ich mit Hilfe der dritten Ableitung.

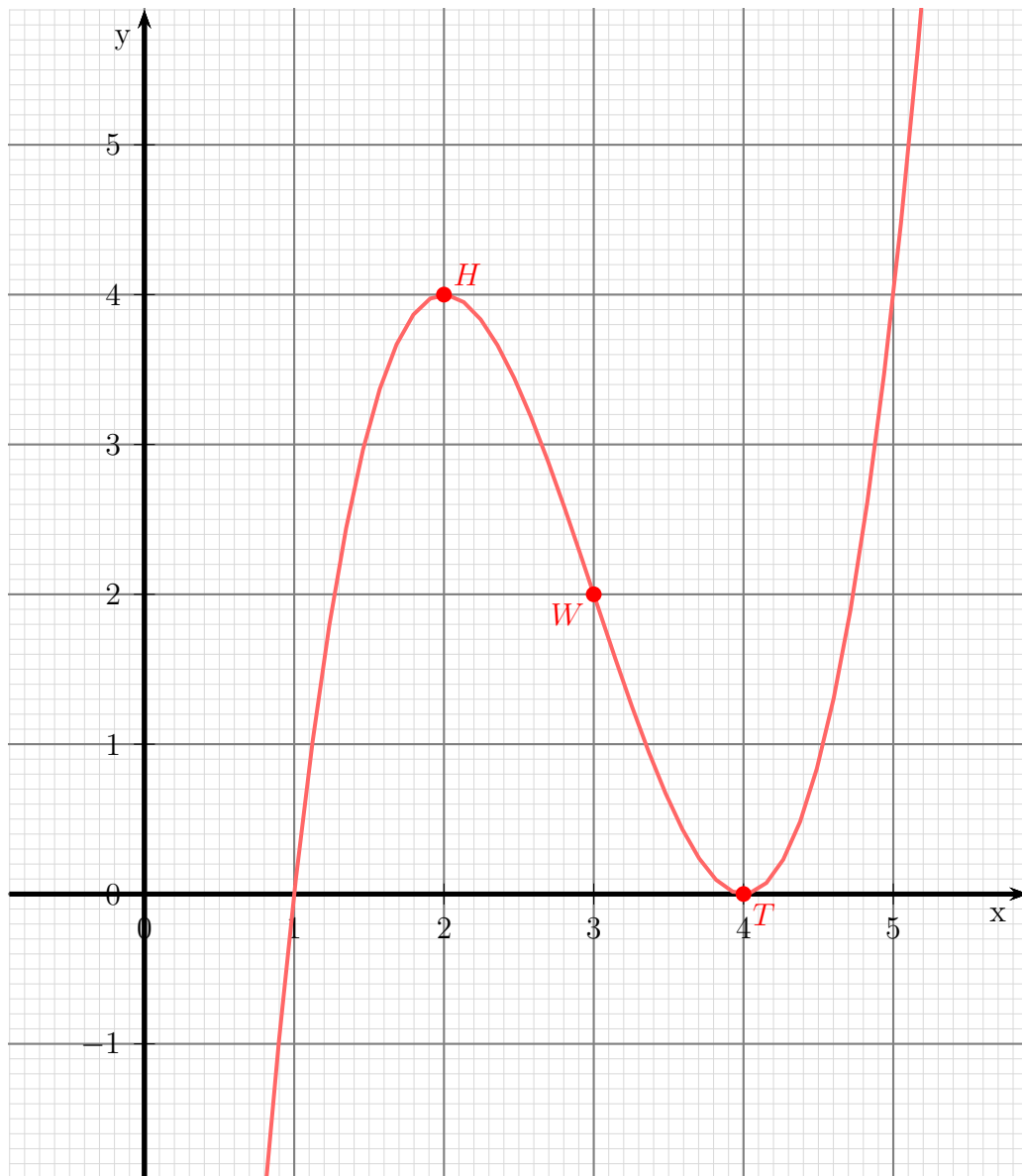
$$f'''(x_w) = f'''(3) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_w in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_w = f(x_w) = f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 - 16 = 2$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W(3|2)$** (2)

5. Skizze Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ dargestellt: (4)



1.4 KURVENDI-04

Untersuchen Sie die angegebene Funktion $f(x)$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Hoch- /Tief- /Sattelpunkte, Wendepunkte und skizzieren Sie den Graphen!

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenschnittpunkte

Nullstellen Zur Bestimmung der Nullstellen wird die Funktionsgleichung gleich Null gesetzt.

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0^3 - 9x_0^2 + 24x_0 - 20 = 0$$

Hier haben wir eine Kubische Gleichung, für die wir keine analytische Lösung zur Verfügung haben. Durch **planvolles** Raten (in Frage kommen alle Teiler des absoluten Gliedes, also von 20) erhalten wir die erste Lösung:

$$x_{01} = 2 \quad (1)$$

Zur Bestimmung der weiteren Nullstellen lässt sich bekanntlich der Term $(x - x_{01})$ ausklammern. Dazu führen wir eine **Polynomdivision** durch und erhalten:

$$(x_0^3 - 9x_0^2 + 24x_0 - 20) : (x - 2) = x^2 - 7x + 10 \quad (2)$$

Die Funktion $f(x)$ lässt sich demnach so faktorisieren:

$$f(x) = (x - 2) \cdot (x^2 - 7x + 10) \quad (1)$$

Bekanntlich ist ein Produkt genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Da wir die Nullstelle des ersten Faktors schon bestimmt haben, können wir die weiteren aus dem zweiten Faktor erhalten.

$$\begin{aligned} x_0^2 - 7x_0 + 10 &= 0 \\ x_{02/3} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10} \\ x_{02/3} &= \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{02} = 5 \quad x_{03} &= 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Wir haben also die Nullstellen: $x_{01} = 2$ und $x_{02} = 5$

y-Achsenabschnitt Zur Bestimmung des y -Achsenabschnittes setzt man Null in die Funktionsgleichung ein.

$$y_0 = f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 - 20 = -20 \quad (1)$$

Der y -Achsenabschnitt lautet: $y_0 = -20$

3. Extrema Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \quad (1) \\ f''(x) &= 6x - 18 \quad (1) \\ f'''(x) &= 6 \quad (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f'(x_e) &= 0 \\ 3x_e^2 - 18x_e + 24 &= 0 \quad | :3 \\ x_e^2 - 6x_e + 8 &= 0 \\ x_{e1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\ x_{e1/2} &= 3 \pm 1 \\ x_{e1} = 2 \quad x_{e2} &= 4 \quad (2) \end{aligned}$$

Wir haben damit **zwei Kandidaten** für Extrema gefunden. An welcher Stelle welches Verhalten vorliegt, muss jetzt einzeln untersucht werden. Ich verwende das Kriterium, das die zweite Ableitung verwendet, weil wir die ja ohnehin schon bestimmt haben.

Was ist los bei $x_{e1} = 2$?

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

Den y -Wert des Hochpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{e1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_h = f(x_{e1}) = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 20 = 0$$

Damit können wir den Hochpunkt angeben: **Hochpunkt $H(2|0)$** (2)

Was ist los bei $x_{e2} = 4$?

$$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{e2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_t = f(x_{e2}) = f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 20 = -4$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(4|-4)$** (2)

4. Wendepunktbestimmung Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f''(x_w) &= 0 \\ 6x_w - 18 &= 0 \quad | +18 \\ 6x_w &= 18 \quad | :6 \\ x_w &= 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Bei $x_w = 3$ könnte also ein Wendepunkt liegen. Ob das tatsächlich der Fall ist, prüfe ich mit Hilfe der dritten Ableitung.

$$f'''(x_w) = f'''(3) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

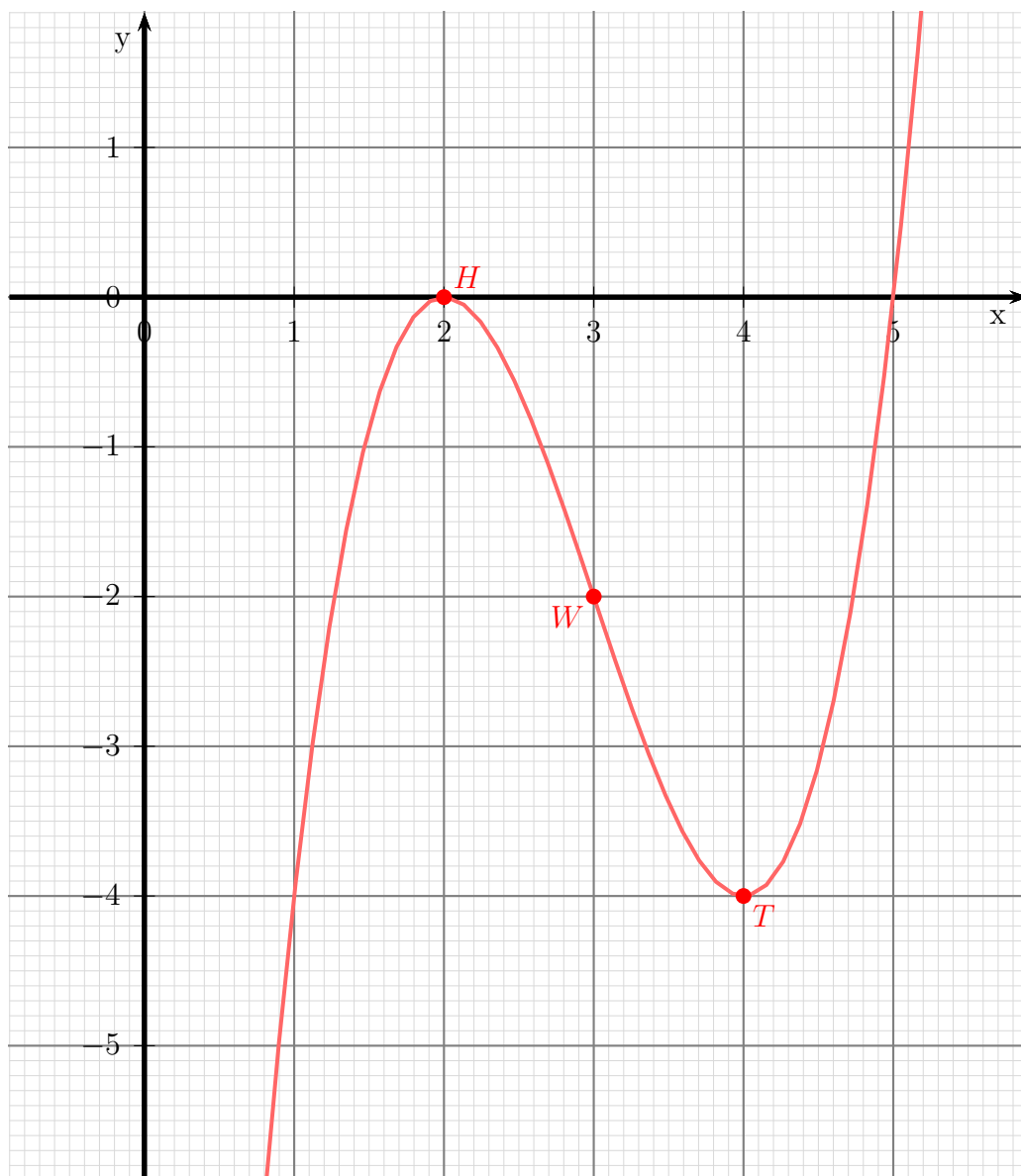
Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_w in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_w = f(x_w) = f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 - 20 = -2$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W(3|-2)$** (2)

5. Skizze

Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ dargestellt: (4)



1.5 KURVENDI-05

Untersuchen Sie die Funktion auf Definitionsbereich, Pole/Lücken, Achsenabschnitte, Hoch-/ Tief-/ Sattelpunkte, Asymptote sowie Wendepunkte. Skizzieren sie auch den Funktionsgraphen!

$$f(x) = \frac{4x^2}{9x^2 + 27}$$

Lösung (25)

Definitionsbereich: Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen die Nullstellen des Nenners ermittelt werden.

$$\begin{aligned} 9x^2 + 27 &= 0 \\ x^2 + 3 &= 0 \\ x^2 &= -3 \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{-3} \end{aligned}$$

Hierzu gibt es keine (reellen) Lösungen. Daher gibt es keine Einschränkungen im Definitionsbereich. Damit gibt es auch weder **Polstellen** noch **Lücken**.

$$D = \mathbb{R}$$

Achsenabschnitte: Zunächst bestimmen wir den Abschnitt y_0 auf der y -Achse. Man erhält ihn, indem man 0 für x einsetzt.

$$y_0 = f(0) = \frac{4 \cdot 0^2}{9 \cdot 0^2 + 27} = \frac{0}{27} = 0$$

$$y\text{-Achsenabschnitt: } y_0 = 0$$

Der Abschnitt auf der x -Achse ergibt sich für den (oder die) x -Wert(e), wo der Funktionswert 0 ist.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ \frac{4x_0^2}{9x_0^2 + 27} &= 0 \quad | \cdot (9x_0^2 + 27) \\ 4x_0^2 &= 0 \quad | : 4 \\ x_0^2 &= 0 \quad | \sqrt{} \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$x\text{-Achsenabschnitt: } x_0 = 0$$

Ableitungen: Die erste Ableitung wird mit der *Quotientenregel* bestimmt. Dabei ist $u(x) = 4x^2$ und $v(x) = 9x^2 + 27$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{8x}^{u'} \cdot \underbrace{(9x^2 + 27)}_v - \overbrace{4x^2}^u \cdot \overbrace{18x}^{v'}}{\underbrace{(9x^2 + 27)^2}_{v^2}} \\ &= \frac{72x^3 + 216x - 72x^3}{(9x^2 + 27)^2} \\ &= \frac{216x}{(9x^2 + 27)^2} \end{aligned}$$

Die erste Ableitung lautet: $f'(x) = \frac{216x}{(9x^2 + 27)^2}$

Die zweite Ableitung muss ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt werden. Dabei sind natürlich *nicht* u und v von der Bestimmung der ersten Ableitung zu verwenden, sondern es gibt völlig andere Terme. Es ist hier $u(x) = 216x$ und $v(x) = (9x^2 + 27)^2$.

Da die Hilfsableitung $v'(x)$ etwas knifflig zu bestimmen ist, führe ich das in einer Nebenrechnung vorweg durch. Wegen der Aufbau von $v(x)$ kommt hier die *Kettenregel* zum Einsatz. Die innere Funktion $g(x)$ ist dann der Klammerinhalt.

$$\begin{aligned} g(x) = 9x^2 + 27 &\Rightarrow g'(x) = 18x \\ v(g) = g^2 &\Rightarrow v'(g) = 2g = 2 \cdot (9x^2 + 27) \\ v'(x) &= \underbrace{18x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{2 \cdot (9x^2 + 27)}_{v'(g)} \end{aligned}$$

Ich fasse das noch etwas zusammen und erhalte:

$$v'(x) = 36x \cdot (9x^2 + 27)$$

Dabei sollte man **auf keinen Fall** auch noch die Klammer ausmultiplizieren. Dann sieht man nämlich im nächsten Schritt nicht mehr, dass man den Bruch kürzen – also

erheblich vereinfachen – kann. Bilden wir nun die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{\overbrace{216}^{u'} \cdot \overbrace{(9x^2 + 27)^2}^v - \overbrace{216x}^u \cdot \overbrace{36x \cdot (9x^2 + 27)}^{v'}}{\underbrace{(9x^2 + 27)^4}_{v^2}} \quad | \text{ Ausklammern: } (9x^2 + 27) \\
 &= \frac{(9x^2 + 27) \cdot \left(216 \cdot (9x^2 + 27) - 216x \cdot 36x \right)}{(9x^2 + 27)^4} \quad | \text{ Kürzen} \\
 &= \frac{216 \cdot (9x^2 + 27) - 216x \cdot 36x}{(9x^2 + 27)^3} \quad | \text{ Zusammenfassen} \\
 &= \frac{1944x^2 + 5832 - 7776x^2}{(9x^2 + 27)^3} \\
 f''(x) &= \frac{-5832x^2 + 5832}{(9x^2 + 27)^3}
 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung lautet also: $f''(x) = \frac{-5832x^2 + 5832}{(9x^2 + 27)^3}$

Extrema: Jetzt können wir die Hoch- Tief- und Sattelpunkte bestimmen. Notwendige Bedingung für ein Extremum ist, dass die erste Ableitung Null wird.

$$\begin{aligned}
 f'(x_E) &= 0 \\
 \frac{216x_E}{(9x_E^2 + 27)^2} &= 0 \quad | \cdot (9x_E^2 + 27)^2 \\
 216x_E &= 0 \quad | : 216 \\
 x_E &= 0
 \end{aligned}$$

Damit haben wir einen Kandidaten für einen Hoch- Tief- oder Sattelpunkt gefunden. Was genau dort los ist, können wir am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung bestimmen, denn die haben wir ja schon.

$$f''(0) = \frac{-5832 \cdot 0^2 + 5832}{(9 \cdot 0^2 + 27)^3} = \frac{8}{27} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0$$

Berechnen wir schnell noch den y -Wert für den Tiefpunkt:

$$y_E = f(x_E) = \frac{4 \cdot 0^2}{9 \cdot 0^2 + 27} = 0$$

Der Tiefpunkt lautet also: $T(0|0)$

Wendepunkte: Widmen wir uns nun den möglichen Wendepunkten. Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist, dass die zweite Ableitung dort Null ist.

$$\begin{aligned}
 f''(x_w) &= 0 \\
 \frac{-5832x_w^2 + 5832}{(9x_w^2 + 27)^3} &= 0 \quad | \cdot (9x_w^2 + 27)^3 \\
 -5832x_w^2 + 5832 &= 0 \quad | -5832 \\
 -5832x_w^2 &= -5832 \quad | : (-5832) \\
 x_w^2 &= 1 \quad | \sqrt{} \\
 x_{w1/2} &= \pm 1 \\
 x_{w1} = -1 & \quad x_{w2} = 1
 \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei Kandidaten für Wendepunkte erhalten. Für beide müssen wir prüfen, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen. Das kann man bekanntlich mit zwei verschiedenen Methoden überprüfen. Da ich keine Lust habe, noch die dritte Ableitung zu bilden, verwende ich die andere Methode, die mit der zweiten Ableitung auskommt. Ich muss dann prüfen, ob zwei Nachbarstellen links und rechts von dem zu untersuchenden Kandidaten unterschiedliches Vorzeichen bei der zweiten Ableitung ergeben. Wenn ich die Nachbarstellen näher, als die nächste Nullstelle (oder Polstelle) der zweiten Ableitung wähle, kann ich dann schließen, dass die zweite Ableitung an der zu untersuchenden Stelle einen Vorzeichenwechsel hat. Als Nachbarn zu $x_{w1} = -1$ wähle ich -2 und 0 , als Nachbarn zu $x_{w2} = 1$ wähle ich 0 und 2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(-2) = \frac{-5832 \cdot (-2)^2 + 5832}{(9 \cdot (-2)^2 + 27)^3} = -\frac{17496}{250047} < 0 \\ f''(0) = \frac{-5832 \cdot 0^2 + 5832}{(9 \cdot 0^2 + 27)^3} = \frac{8}{27} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(0) = \frac{-5832 \cdot 0^2 + 5832}{(9 \cdot 0^2 + 27)^3} = \frac{8}{27} > 0 \\ f''(2) = \frac{-5832 \cdot 2^2 + 5832}{(9 \cdot 2^2 + 27)^3} = -\frac{17496}{250047} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = 1$$

Da wir in beiden Fällen einen Vorzeichenwechsel hatten, ergeben beide Kandidaten einen Wendepunkt. Es fehlen dann noch die zugehörigen y -Werte.

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = \frac{4x_{w1}^2}{9x_{w1}^2 + 27} = \frac{4 \cdot (-1)^2}{9 \cdot (-1)^2 + 27} = \frac{1}{9}$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = \frac{4x_{w2}^2}{9x_{w2}^2 + 27} = \frac{4 \cdot 1^2}{9 \cdot 1^2 + 27} = \frac{1}{9}$$

Wir erhalten also die Wendepunkte: $W_1 \left(-1 \mid \frac{1}{9} \right)$ und $W_2 \left(1 \mid \frac{1}{9} \right)$

Asymptote: Um den Graphen einfach skizzieren zu können, ist es zweckmäßig, die Asymptote zu bestimmen. Bekanntlich macht man das, indem man den Funktionsterm, der ja einen Bruch darstellt, als Polynomdivision ansetzt.

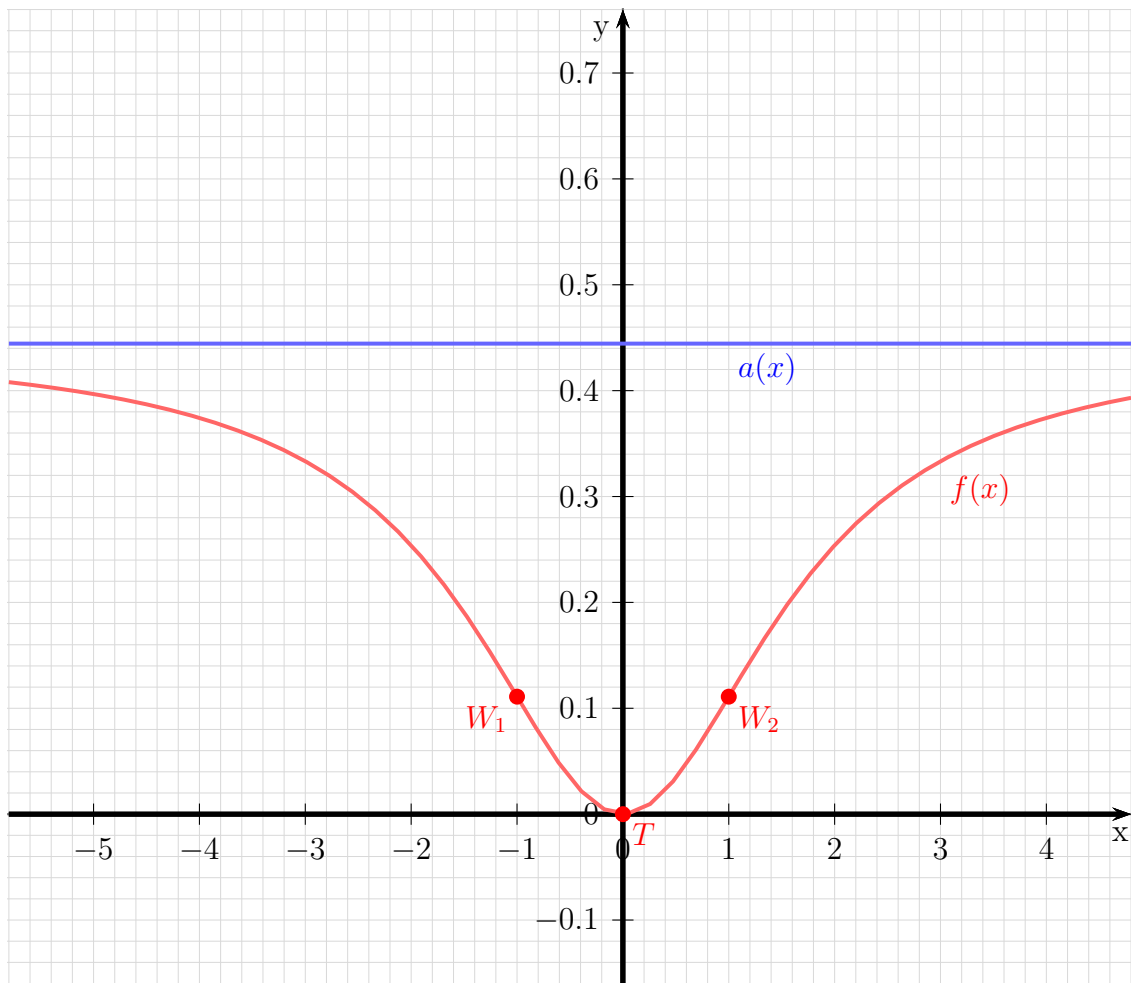
$$\begin{array}{r} (4x^2 \quad \quad) : (9x^2 + 27) = \frac{4}{9} - \frac{36}{9x^2 + 27} \\ \underline{-(4x^2 \quad +36)} \\ -36 \end{array}$$

Die Asymptote ist dann das Divisionsergebnis ohne den „Rest“, also nur der Bruch $\frac{4}{9}$

ohne den Term $-\frac{36}{9x^2 + 27}$.

Asyptote: $a(x) = \frac{4}{9}$

Skizze: Die Asymptote stellt eine Parallele zur x -Achse auf der Höhe von $\frac{4}{9} \approx 0,444$ dar. Den Tiefpunkt (identisch mit den Achsenschnittpunkten) und die Wendepunkte trägt man ein, dann ergibt sich sofort der Kurvenverlauf.



1.6 KURVENDI-06

$$f(x) = \frac{8x^2}{7x^2 + 21}$$

Lösung (25)

Definitionsbereich: Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen die Nullstellen des Nenners ermittelt werden.

$$\begin{aligned} 7x^2 + 21 &= 0 \\ x^2 + 3 &= 0 \\ x^2 &= -3 \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{-3} \end{aligned}$$

Hierzu gibt es keine (reellen) Lösungen. Daher gibt es keine Einschränkungen im Definitionsbereich. Damit gibt es auch weder **Polstellen** noch **Lücken**.

$$D = \mathbb{R}$$

Achsenabschnitte: Zunächst bestimmen wir den Abschnitt y_0 auf der y -Achse. Man erhält ihn, indem man 0 für x einsetzt.

$$y_0 = f(0) = \frac{8 \cdot 0^2}{7 \cdot 0^2 + 21} = \frac{0}{21} = 0$$

$$y\text{-Achsenabschnitt: } y_0 = 0$$

Der Abschnitt auf der x -Achse ergibt sich für den (oder die) x -Wert(e), wo der Funktionswert 0 ist.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ \frac{8x_0^2}{7x_0^2 + 21} &= 0 \quad | \cdot (7x_0^2 + 21) \\ 8x_0^2 &= 0 \quad | : 8 \\ x_0^2 &= 0 \quad | \sqrt{} \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$x\text{-Achsenabschnitt: } x_0 = 0$$

Ableitungen: Die erste Ableitung wird mit der *Quotientenregel* bestimmt. Dabei ist $u(x) = 8x^2$ und $v(x) = 7x^2 + 21$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{16x}^{u'} \cdot \underbrace{(7x^2 + 21)}_v - \overbrace{8x^2}^u \cdot \overbrace{14x}^{v'}}{\underbrace{(7x^2 + 21)^2}_{v^2}} \\ &= \frac{112x^3 + 336x - 112x^3}{(7x^2 + 21)^2} \\ &= \frac{336x}{(7x^2 + 21)^2} \end{aligned}$$

Die erste Ableitung lautet: $f'(x) = \frac{336x}{(7x^2 + 21)^2}$

Die zweite Ableitung muss ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt werden. Dabei sind natürlich *nicht* u und v von der Bestimmung der ersten Ableitung zu verwenden, sondern es gibt völlig andere Terme. Es ist hier $u(x) = 336x$ und $v(x) = (7x^2 + 21)^2$.

Da die Hilfsableitung $v'(x)$ etwas knifflig zu bestimmen ist, führe ich das in einer Nebenrechnung vorweg durch. Wegen der Aufbau von $v(x)$ kommt hier die *Kettenregel* zum Einsatz. Die innere Funktion $g(x)$ ist dann der Klammerinhalt.

$$\begin{aligned} g(x) = 7x^2 + 21 &\Rightarrow g'(x) = 14x \\ v(g) = g^2 &\Rightarrow v'(g) = 2g = 2 \cdot (7x^2 + 21) \\ v'(x) &= \underbrace{14x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{2 \cdot (7x^2 + 21)}_{v'(g)} \end{aligned}$$

Ich fasse das noch etwas zusammen und erhalte:

$$v'(x) = 28x \cdot (7x^2 + 21)$$

Dabei sollte man **auf keinen Fall** auch noch die Klammer ausmultiplizieren. Dann sieht man nämlich im nächsten Schritt nicht mehr, dass man den Bruch kürzen – also

erheblich vereinfachen – kann. Bilden wir nun die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{\overbrace{336}^{u'} \cdot \overbrace{(7x^2 + 21)^2}^v - \overbrace{336x}^u \cdot \overbrace{28x \cdot (7x^2 + 21)}^{v'}}{\underbrace{(7x^2 + 21)^4}_{v^2}} \quad | \text{ Ausklammern: } (7x^2 + 21) \\
 &= \frac{(7x^2 + 21) \cdot \left(336 \cdot (7x^2 + 21) - 336x \cdot 28x \right)}{(7x^2 + 21)^4} \quad | \text{ Kürzen} \\
 &= \frac{336 \cdot (7x^2 + 21) - 336x \cdot 28x}{(7x^2 + 21)^3} \quad | \text{ Zusammenfassen} \\
 &= \frac{2352x^2 + 7056 - 9408x^2}{(7x^2 + 21)^3} \\
 f'(x) &= \frac{-7056x^2 + 7056}{(7x^2 + 21)^3}
 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung lautet also: $f''(x) = \frac{-7056x^2 + 7056}{(7x^2 + 21)^3}$

Extrema: Jetzt können wir die Hoch- Tief- und Sattelpunkte bestimmen. Notwendige Bedingung für ein Extremum ist, dass die erste Ableitung Null wird.

$$\begin{aligned}
 f'(x_E) &= 0 \\
 \frac{336x_E}{(7x_E^2 + 21)^2} &= 0 \quad | \cdot (7x_E^2 + 21)^2 \\
 336x_E &= 0 \quad | : 336 \\
 x_E &= 0
 \end{aligned}$$

Damit haben wir einen Kandidaten für einen Hoch- Tief- oder Sattelpunkt gefunden. Was genau dort los ist, können wir am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung bestimmen, denn die haben wir ja schon.

$$f''(0) = \frac{-7056 \cdot 0^2 + 7056}{(7 \cdot 0^2 + 21)^3} = \frac{16}{21} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0$$

Berechnen wir schnell noch den y -Wert für den Tiefpunkt:

$$y_E = f(x_E) = \frac{8 \cdot 0^2}{7 \cdot 0^2 + 21} = 0$$

Der Tiefpunkt lautet also: $T(0|0)$

Wendepunkte: Widmen wir uns nun den möglichen Wendepunkten. Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist, dass die zweite Ableitung dort Null ist.

$$\begin{aligned}
 f''(x_w) &= 0 \\
 \frac{-7056x_w^2 + 7056}{(7x_w^2 + 21)^3} &= 0 \quad | \cdot (7x_w^2 + 21)^3 \\
 -7056x_w^2 + 7056 &= 0 \quad | -7056 \\
 -7056x_w^2 &= -7056 \quad | : (-7056) \\
 x_w^2 &= 1 \quad | \sqrt{} \\
 x_{w1/2} &= \pm 1 \\
 x_{w1} = -1 & \quad x_{w2} = 1
 \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei Kandidaten für Wendepunkte erhalten. Für beide müssen wir prüfen, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen. Das kann man bekanntlich mit zwei verschiedenen Methoden überprüfen. Da ich keine Lust habe, noch die dritte Ableitung zu bilden, verwende ich die andere Methode, die mit der zweiten Ableitung auskommt. Ich muss dann prüfen, ob zwei Nachbarstellen links und rechts von dem zu untersuchenden Kandidaten unterschiedliches Vorzeichen bei der zweiten Ableitung ergeben. Wenn ich die Nachbarstellen näher, als die nächste Nullstelle (oder Polstelle) der zweiten Ableitung wähle, kann ich dann schließen, dass die zweite Ableitung an der zu untersuchenden Stelle einen Vorzeichenwechsel hat. Als Nachbarn zu $x_{w1} = -1$ wähle ich -2 und 0 , als Nachbarn zu $x_{w2} = 1$ wähle ich 0 und 2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(-2) = \frac{-7056 \cdot (-2)^2 + 7056}{(7 \cdot (-2)^2 + 21)^3} = -\frac{21168}{117649} < 0 \\ f''(0) = \frac{-7056 \cdot 0^2 + 7056}{(7 \cdot 0^2 + 21)^3} = \frac{8}{21} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(0) = \frac{-7056 \cdot 0^2 + 7056}{(7 \cdot 0^2 + 21)^3} = \frac{8}{21} > 0 \\ f''(2) = \frac{-7056 \cdot 2^2 + 7056}{(7 \cdot 2^2 + 21)^3} = -\frac{21168}{117649} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = 1$$

Da wir in beiden Fällen einen Vorzeichenwechsel hatten, ergeben beide Kandidaten einen Wendepunkt. Es fehlen dann noch die zugehörigen y -Werte.

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = \frac{8x_{w1}^2}{7x_{w1}^2 + 21} = \frac{8 \cdot (-1)^2}{7 \cdot (-1)^2 + 21} = \frac{2}{7}$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = \frac{8x_{w2}^2}{7x_{w2}^2 + 21} = \frac{8 \cdot 1^2}{7 \cdot 1^2 + 21} = \frac{2}{7}$$

Wir erhalten also die Wendepunkte: $W_1 \left(-1 \mid \frac{2}{7} \right)$ und $W_2 \left(1 \mid \frac{2}{7} \right)$

Asymptote: Um den Graphen einfach skizzieren zu können, ist es zweckmäßig, die Asymptote zu bestimmen. Bekanntlich macht man das, indem man den Funktionsterm, der ja einen Bruch darstellt, als Polynomdivision ansetzt.

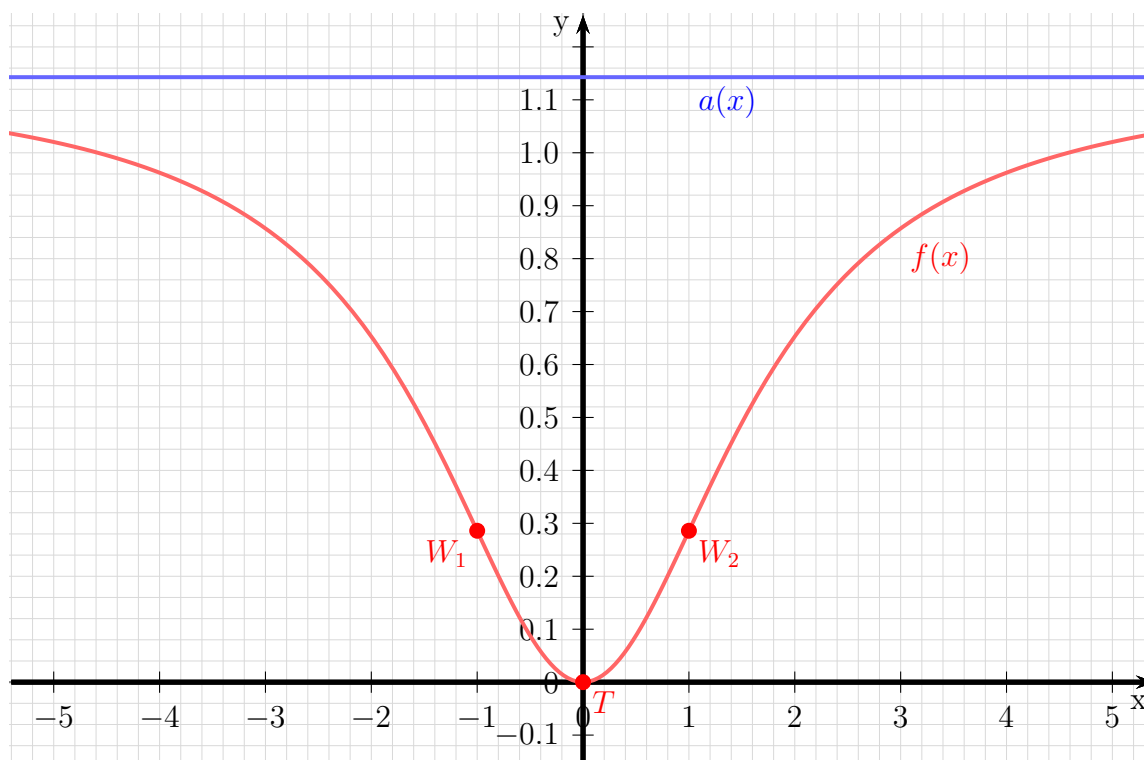
$$\frac{(8x^2) : (7x^2 + 21) = \frac{8}{7} - \frac{24}{7x^2 + 21}}{-24}$$

Die Asymptote ist dann das Divisionsergebnis ohne den „Rest“, also nur der Bruch $\frac{8}{7}$

ohne den Term $-\frac{24}{7x^2 + 21}$.

Asyptote: $a(x) = \frac{8}{7}$

Skizze: Die Asymptote stellt eine Parallele zur x -Achse auf der Höhe von $\frac{8}{7} \approx 1,143$ dar. Den Tiefpunkt (identisch mit den Achsenschnittpunkten) und die Wendepunkte trägt man ein, dann ergibt sich sofort der Kurvenverlauf.



1.7 KURVENDI-07

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 3}$$

Lösung (25)

Definitionsbereich: Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen die Nullstellen des Nenners ermittelt werden.

$$\begin{aligned}x^2 + 3 &= 0 \\x^2 &= -3 \\x_{1/2} &= \pm\sqrt{-3}\end{aligned}$$

Hierzu gibt es keine (reellen) Lösungen. Daher gibt es keine Einschränkungen im Definitionsbereich. Damit gibt es auch weder **Polstellen** noch **Lücken**.

$$D = \mathbb{R}$$

Achsenabschnitte: Zunächst bestimmen wir den Abschnitt y_0 auf der y -Achse. Man erhält ihn, indem man 0 für x einsetzt.

$$y_0 = f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 3}{0^2 + 3} = 1$$

$$y\text{-Achsenabschnitt: } y_0 = 1$$

Der Abschnitt auf der x -Achse ergibt sich für den (oder die) x -Wert(e), wo der Funktionswert 0 ist.

$$\begin{aligned}f(x_0) &= 0 \\ \frac{2x_0^2 + 3}{x_0^2 + 3} &= 0 \quad | \cdot (x_0^2 + 3) \\ 2x_0^2 + 3 &= 0 \quad | - 3 \\ 2x_0^2 &= -3 \quad | : 2 \\ x_0^2 &= -\frac{3}{2} \quad | \sqrt{} \\ x_0 &= \pm\sqrt{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Da es hierfür keine (reelle) Lösung gibt, hat die Funktion **keine Nullstellen.**

Ableitungen: Die erste Ableitung wird mit der *Quotientenregel* bestimmt. Dabei ist $u(x) = 2x^2 + 3$ und $v(x) = x^2 + 3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{4x}^{u'} \cdot \overbrace{(x^2 + 3)}^v - \overbrace{(2x^2 + 3)}^u \cdot \overbrace{2x}^{v'}}{\underbrace{(x^2 + 3)^2}_{v^2}} \\ &= \frac{4x^3 + 12x - 4x^3 - 6x}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

Die erste Ableitung lautet: $f'(x) = \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}$

Die zweite Ableitung muss ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt werden. Dabei sind natürlich *nicht* u und v von der Bestimmung der ersten Ableitung zu verwenden, sondern es gibt völlig andere Terme. Es ist hier $u(x) = 6x$ und $v(x) = (x^2 + 3)^2$.

Da die Hilfsableitung $v'(x)$ etwas knifflig zu bestimmen ist, führe ich das in einer Nebenrechnung vorweg durch. Wegen der Aufbau von $v(x)$ kommt hier die *Kettenregel* zum Einsatz. Die innere Funktion $g(x)$ ist dann der Klammerinhalt.

$$\begin{aligned} g(x) = x^2 + 3 &\Rightarrow g'(x) = 2x \\ v(g) = g^2 &\Rightarrow v'(g) = 2g = 2 \cdot (x^2 + 3) \\ v'(x) &= \underbrace{2x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{2 \cdot (x^2 + 3)}_{v'(g)} \end{aligned}$$

Ich fasse das noch etwas zusammen und erhalte:

$$v'(x) = 4x \cdot (x^2 + 3)$$

Dabei sollte man **auf keinen Fall** auch noch die Klammer ausmultiplizieren. Dann sieht man nämlich im nächsten Schritt nicht mehr, dass man den Bruch kürzen – also

erheblich vereinfachen – kann. Bilden wir nun die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{\overbrace{6}^{u'} \cdot \overbrace{(x^2+3)^2}^v - \overbrace{6x}^u \cdot \overbrace{4x \cdot (x^2+3)}^{v'}}{\underbrace{(x^2+3)^4}_{v^2}} \quad | \text{ Ausklammern: } (x^2+3) \\
 &= \frac{(x^2+3) \cdot \left(6 \cdot (x^2+3) - 6x \cdot 4x \right)}{(x^2+3)^4} \quad | \text{ Kürzen} \\
 &= \frac{6 \cdot (x^2+3) - 6x \cdot 4x}{(x^2+3)^3} \quad | \text{ Zusammenfassen} \\
 &= \frac{6x^2 + 18 - 24x^2}{(x^2+3)^3} \\
 f'(x) &= \frac{-18x^2 + 18}{(x^2+3)^3}
 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung lautet also: $f''(x) = \frac{-18x^2 + 18}{(x^2+3)^3}$

Extrema: Jetzt können wir die Hoch- Tief- und Sattelpunkte bestimmen. Notwendige Bedingung für ein Extremum ist, dass die erste Ableitung Null wird.

$$\begin{aligned}
 f'(x_E) &= 0 \\
 \frac{6x_E}{(x_E^2+3)^2} &= 0 \quad | \cdot (x_E^2+3)^2 \\
 6x_E &= 0 \quad | : 6 \\
 x_E &= 0
 \end{aligned}$$

Damit haben wir einen Kandidaten für einen Hoch- Tief- oder Sattelpunkt gefunden. Was genau dort los ist, können wir am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung bestimmen, denn die haben wir ja schon.

$$f''(0) = \frac{-18 \cdot 0^2 + 18}{(0^2+3)^3} = \frac{2}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0$$

Berechnen wir schnell noch den y -Wert für den Tiefpunkt:

$$y_E = f(x_E) = \frac{2 \cdot 0^2 + 3}{0^2 + 3} = 1$$

Der Tiefpunkt lautet also: $T(0|1)$

Wendepunkte: Widmen wir uns nun den möglichen Wendepunkten. Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist, dass die zweite Ableitung dort Null ist.

$$\begin{aligned}
 f''(x_w) &= 0 \\
 \frac{-18x_w^2 + 18}{(x_w^2 + 3)^3} &= 0 \quad | \cdot (x_w^2 + 3)^3 \\
 -18x_w^2 + 18 &= 0 \quad | -18 \\
 -18x_w^2 &= -18 \quad | : (-18) \\
 x_w^2 &= 1 \quad | \sqrt{} \\
 x_{w1/2} &= \pm 1 \\
 x_{w1} &= -1 \quad x_{w2} = 1
 \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei Kandidaten für Wendepunkte erhalten. Für beide müssen wir prüfen, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen. Das kann man bekanntlich mit zwei verschiedenen Methoden überprüfen. Da ich keine Lust habe, noch die dritte Ableitung zu bilden, verwende ich die andere Methode, die mit der zweiten Ableitung auskommt. Ich muss dann prüfen, ob zwei Nachbarstellen links und rechts von dem zu untersuchenden Kandidaten unterschiedliches Vorzeichen bei der zweiten Ableitung ergeben. Wenn ich die Nachbarstellen näher, als die nächste Nullstelle (oder Polstelle) der zweiten Ableitung wähle, kann ich dann schließen, dass die zweite Ableitung an der zu untersuchenden Stelle einen Vorzeichenwechsel hat. Als Nachbarn zu $x_{w1} = -1$ wähle ich -2 und 0 , als Nachbarn zu $x_{w2} = 1$ wähle ich 0 und 2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(-2) = \frac{-18 \cdot (-2)^2 + 18}{((-2)^2 + 3)^3} = -\frac{54}{343} < 0 \\ f''(0) = \frac{-18 \cdot 0^2 + 18}{(0^2 + 3)^3} = \frac{2}{3} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(0) = \frac{-18 \cdot 0^2 + 18}{(0^2 + 3)^3} = \frac{2}{3} > 0 \\ f''(2) = \frac{-18 \cdot 2^2 + 18}{(2^2 + 3)^3} = -\frac{54}{343} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = 1$$

Da wir in beiden Fällen einen Vorzeichenwechsel hatten, ergeben beide Kandidaten einen Wendepunkt. Es fehlen dann noch die zugehörigen y -Werte.

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = \frac{2x_{w1}^2 + 3}{x_{w1}^2 + 3} = \frac{2 \cdot (-1)^2 + 3}{(-1)^2 + 3} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = \frac{2x_{w2}^2 + 3}{x_{w2}^2 + 3} = \frac{2 \cdot 1^2 + 3}{1^2 + 3} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Wir erhalten also die Wendepunkte: $W_1(-1|1,25)$ und $W_2(1|1,25)$

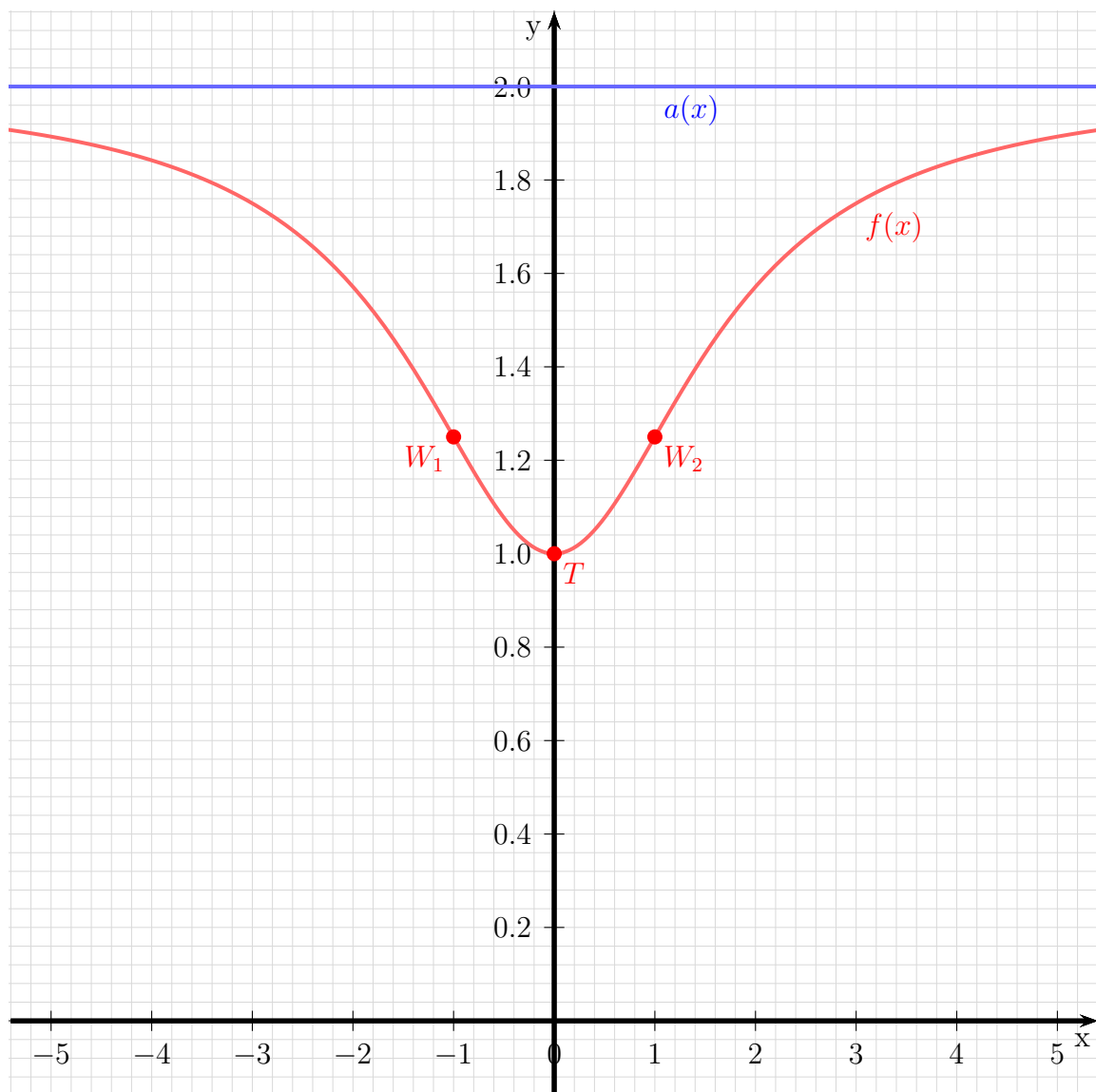
Asymptote: Um den Graphen einfach skizzieren zu können, ist es zweckmäßig, die Asymptote zu bestimmen. Bekanntlich macht man das, indem man den Funktionsterm, der ja einen Bruch darstellt, als Polynomdivision ansetzt.

$$\begin{array}{r} (2x^2 + 3) : (x^2 + 3) = 2 - \frac{3}{x^2 + 3} \\ \underline{-(2x^2 + 6)} \\ -3 \end{array}$$

Die Asymptote ist dann das Divisionsergebnis ohne den „Rest“, also nur die Zahl 2 ohne den Term $-\frac{3}{x^2 + 3}$.

Asyptote: $a(x) = 2$

Skizze: Die Asymptote stellt eine Parallele zur x -Achse auf der Höhe von $y = 2$ dar. Den Tiefpunkt $T(0|1)$ und die Wendepunkte W_1 und W_2 trägt man ein, dann ergibt sich sofort der Kurvenverlauf.



1.8 KURVENDI-08

$$f(x) = \frac{4x^2 + 6}{x^2 + 3}$$

Lösung (25)

Definitionsbereich: Zur Bestimmung des Definitionsbereiches müssen die Nullstellen des Nenners ermittelt werden.

$$\begin{aligned}x^2 + 3 &= 0 \\x^2 &= -3 \\x_{1/2} &= \pm\sqrt{-3}\end{aligned}$$

Hierzu gibt es keine (reellen) Lösungen. Daher gibt es keine Einschränkungen im Definitionsbereich. Damit gibt es auch weder **Polstellen** noch **Lücken**.

$$D = \mathbb{R}$$

Achsenabschnitte: Zunächst bestimmen wir den Abschnitt y_0 auf der y -Achse. Man erhält ihn, indem man 0 für x einsetzt.

$$y_0 = f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 + 6}{0^2 + 3} = 2$$

$$y\text{-Achsenabschnitt: } y_0 = 2$$

Der Abschnitt auf der x -Achse ergibt sich für den (oder die) x -Wert(e), wo der Funktionswert 0 ist.

$$\begin{aligned}f(x_0) &= 0 \\ \frac{4x_0^2 + 6}{x_0^2 + 3} &= 0 \quad | \cdot (x_0^2 + 3) \\ 4x_0^2 + 6 &= 0 \quad | -6 \\ 4x_0^2 &= -6 \quad | :4 \\ x_0^2 &= -\frac{3}{2} \quad | \sqrt{} \\ x_0 &= \pm\sqrt{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Da es hierfür keine (reelle) Lösung gibt, hat die Funktion **keine Nullstellen.**

Ableitungen: Die erste Ableitung wird mit der *Quotientenregel* bestimmt. Dabei ist $u(x) = 4x^2 + 6$ und $v(x) = x^2 + 3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{8x}^{u'} \cdot \overbrace{(x^2 + 3)}^v - \overbrace{(4x^2 + 6)}^u \cdot \overbrace{2x}^{v'}}{\underbrace{(x^2 + 3)^2}_{v^2}} \\ &= \frac{8x^3 + 24x - 8x^3 - 12x}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{12x}{(x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

Die erste Ableitung lautet: $f'(x) = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

Die zweite Ableitung muss ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt werden. Dabei sind natürlich *nicht* u und v von der Bestimmung der ersten Ableitung zu verwenden, sondern es gibt völlig andere Terme. Es ist hier $u(x) = 12x$ und $v(x) = (x^2 + 3)^2$.

Da die Hilfsableitung $v'(x)$ etwas knifflig zu bestimmen ist, führe ich das in einer Nebenrechnung vorweg durch. Wegen der Aufbau von $v(x)$ kommt hier die *Kettenregel* zum Einsatz. Die innere Funktion $g(x)$ ist dann der Klammerinhalt.

$$\begin{aligned} g(x) = x^2 + 3 &\Rightarrow g'(x) = 2x \\ v(g) = g^2 &\Rightarrow v'(g) = 2g = 2 \cdot (x^2 + 3) \\ v'(x) &= \underbrace{2x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{2 \cdot (x^2 + 3)}_{v'(g)} \end{aligned}$$

Ich fasse das noch etwas zusammen und erhalte:

$$v'(x) = 4x \cdot (x^2 + 3)$$

Dabei sollte man **auf keinen Fall** auch noch die Klammer ausmultiplizieren. Dann sieht man nämlich im nächsten Schritt nicht mehr, dass man den Bruch kürzen – also

erheblich vereinfachen – kann. Bilden wir nun die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{\overbrace{12}^{u'} \cdot \overbrace{(x^2+3)^2}^v - \overbrace{12x}^u \cdot \overbrace{4x \cdot (x^2+3)}^{v'}}{\underbrace{(x^2+3)^4}_{v^2}} \quad | \text{ Ausklammern: } (x^2+3) \\
 &= \frac{(x^2+3) \cdot \left(12 \cdot (x^2+3) - 12x \cdot 4x \right)}{(x^2+3)^4} \quad | \text{ Kürzen} \\
 &= \frac{12 \cdot (x^2+3) - 12x \cdot 4x}{(x^2+3)^3} \quad | \text{ Zusammenfassen} \\
 &= \frac{12x^2 + 36 - 48x^2}{(x^2+3)^3} \\
 f'(x) &= \frac{-36x^2 + 36}{(x^2+3)^3}
 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung lautet also: $f''(x) = \frac{-36x^2 + 36}{(x^2+3)^3}$

Extrema: Jetzt können wir die Hoch- Tief- und Sattelpunkte bestimmen. Notwendige Bedingung für ein Extremum ist, dass die erste Ableitung Null wird.

$$\begin{aligned}
 f'(x_E) &= 0 \\
 \frac{12x_E}{(x_E^2+3)^2} &= 0 \quad | \cdot (x_E^2+3)^2 \\
 12x_E &= 0 \quad | : 12 \\
 x_E &= 0
 \end{aligned}$$

Damit haben wir einen Kandidaten für einen Hoch- Tief- oder Sattelpunkt gefunden. Was genau dort los ist, können wir am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung bestimmen, denn die haben wir ja schon.

$$f''(0) = \frac{-36 \cdot 0^2 + 36}{(0^2+3)^3} = \frac{4}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0$$

Berechnen wir schnell noch den y -Wert für den Tiefpunkt:

$$y_E = f(x_E) = \frac{4 \cdot 0^2 + 6}{0^2 + 3} = 2$$

Der Tiefpunkt lautet also: $T(0|2)$

Wendepunkte: Widmen wir uns nun den möglichen Wendepunkten. Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist, dass die zweite Ableitung dort Null ist.

$$\begin{aligned}
 f''(x_w) &= 0 \\
 \frac{-36x_w^2 + 36}{(x_w^2 + 3)^3} &= 0 \quad | \cdot (x_w^2 + 3)^3 \\
 -36x_w^2 + 36 &= 0 \quad | -36 \\
 -36x_w^2 &= -36 \quad | : (-36) \\
 x_w^2 &= 1 \quad | \sqrt{} \\
 x_{w1/2} &= \pm 1 \\
 x_{w1} &= -1 \quad x_{w2} = 1
 \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei Kandidaten für Wendepunkte erhalten. Für beide müssen wir prüfen, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen. Das kann man bekanntlich mit zwei verschiedenen Methoden überprüfen. Da ich keine Lust habe, noch die dritte Ableitung zu bilden, verwende ich die andere Methode, die mit der zweiten Ableitung auskommt. Ich muss dann prüfen, ob zwei Nachbarstellen links und rechts von dem zu untersuchenden Kandidaten unterschiedliches Vorzeichen bei der zweiten Ableitung ergeben. Wenn ich die Nachbarstellen näher, als die nächste Nullstelle (oder Polstelle) der zweiten Ableitung wähle, kann ich dann schließen, dass die zweite Ableitung an der zu untersuchenden Stelle einen Vorzeichenwechsel hat. Als Nachbarn zu $x_{w1} = -1$ wähle ich -2 und 0 , als Nachbarn zu $x_{w2} = 1$ wähle ich 0 und 2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(-2) = \frac{-36 \cdot (-2)^2 + 36}{((-2)^2 + 3)^3} = -\frac{108}{343} < 0 \\ f''(0) = \frac{-36 \cdot 0^2 + 36}{(0^2 + 3)^3} = \frac{2}{3} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(0) = \frac{-36 \cdot 0^2 + 36}{(0^2 + 3)^3} = \frac{4}{3} > 0 \\ f''(2) = \frac{-36 \cdot 2^2 + 36}{(2^2 + 3)^3} = -\frac{108}{343} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = 1$$

Da wir in beiden Fällen einen Vorzeichenwechsel hatten, ergeben beide Kandidaten einen Wendepunkt. Es fehlen dann noch die zugehörigen y -Werte.

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = \frac{4x_{w1}^2 + 6}{x_{w1}^2 + 3} = \frac{4 \cdot (-1)^2 + 6}{(-1)^2 + 3} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = \frac{4x_{w2}^2 + 6}{x_{w2}^2 + 3} = \frac{4 \cdot 1^2 + 6}{1^2 + 3} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Wir erhalten also die Wendepunkte: $W_1(-1|2,5)$ und $W_2(1|2,5)$

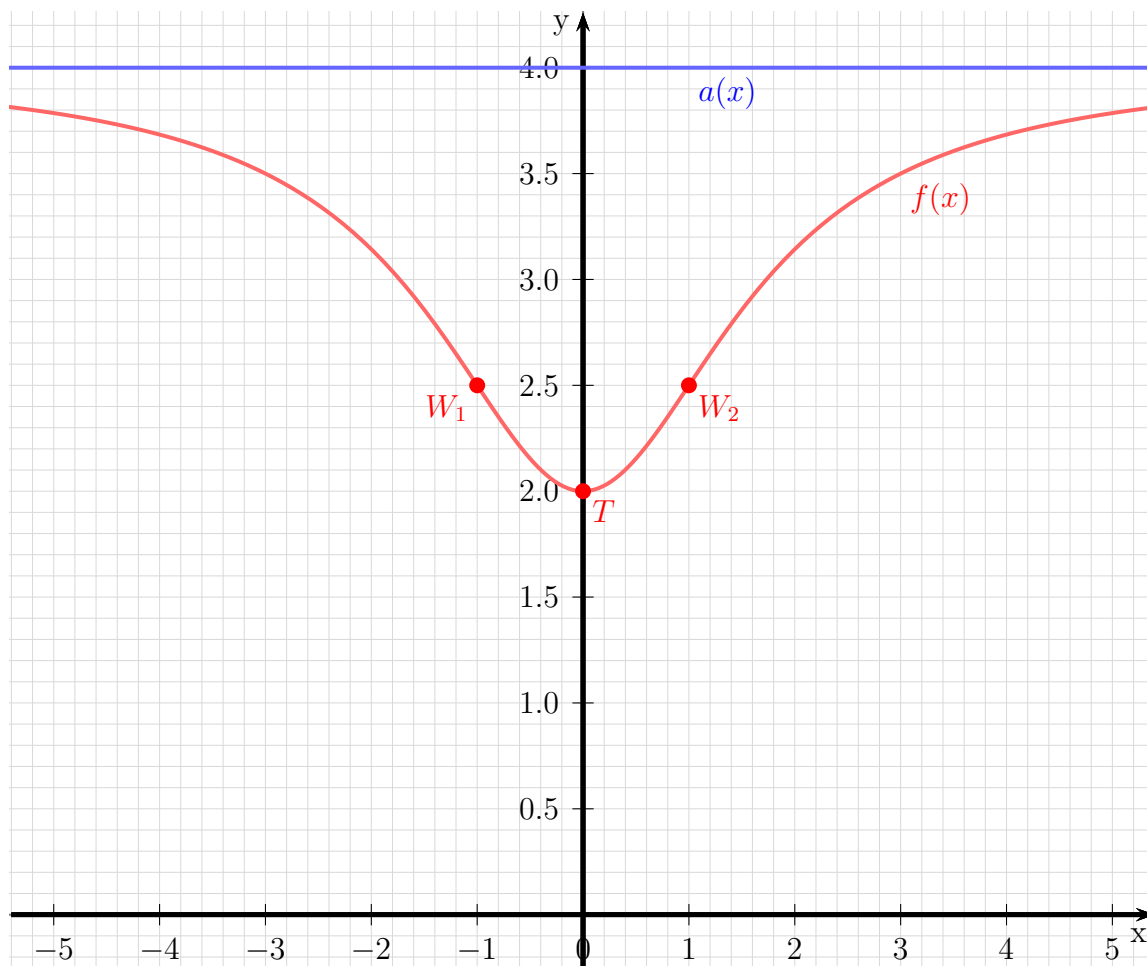
Asymptote: Um den Graphen einfach skizzieren zu können, ist es zweckmäßig, die Asymptote zu bestimmen. Bekanntlich macht man das, indem man den Funktionsterm, der ja einen Bruch darstellt, als Polynomdivision ansetzt.

$$\frac{\begin{array}{r} (4x^2 + 6) : (x^2 + 3) = 4 - \frac{6}{x^2 + 3} \\ -(4x^2 + 12) \\ \hline -6 \end{array}}{-6}$$

Die Asymptote ist dann das Divisionsergebnis ohne den „Rest“, also nur die Zahl 4 ohne den Term $-\frac{6}{x^2 + 3}$.

Asyptote: $a(x) = 4$

Skizze: Die Asymptote stellt eine Parallele zur x -Achse auf der Höhe von $y = 2$ dar. Den Tiefpunkt $T(0|1)$ und die Wendepunkte W_1 und W_2 trägt man ein, dann ergibt sich sofort der Kurvenverlauf.



1.9 KURVENDI-09

Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf

- Definitionsbereich
- Achsenabschnitte
- Hoch-/Tief-/Sattelpunkte
- Wendepunkte

und skizzieren Sie ihren Graphen!

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keinerlei einschränkende Merkmale wie Brüche oder Wurzeln erkennbar sind, gilt:

$$D = \mathbb{R}$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null. Wir erhalten dann eine Gleichung dritten Grades, die wir jedoch allgemein nicht analytisch lösen können.

$$x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0$$

Durch **planvolles Probieren** gefunden:

$$x_{01} = -1$$

Man kann dann $(x - x_{01})$ – hier also $(x + 1)$ – ausklammern. Dazu führen wir eine Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{r} (x^3 \quad -3x^2 \quad \quad +4) : (x+1) = x^2 - 4x + 4 \\ -(x^3 \quad +x^2) \\ \hline -4x^2 +4 \\ - (-4x^2 \quad -4x) \\ \hline 4x +4 \\ (4x +4) \\ \hline 0 \end{array}$$

Ergebnis: $f(x) = (x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 4)$

Die restlichen Nullstellen der Funktion ergeben sich aus dem 2. Klammerterm.

$$\begin{aligned}x_0^2 - 4x_0 + 4 &= 0 \\x_{02/03} &= 2 \pm \sqrt{4 - 4} \\x_{02} &= 2\end{aligned}$$

Nullstellen: $x_{01} = -1$ und $x_{02} = 2$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$y_0 = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

Das fassen wir zusammen und erhalten:

$$y_0 = 4$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x \\f''(x) &= 6x - 6 \\f'''(x) &= 6\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned}3x_E^2 - 6x_E &= 0 \\x_E \cdot (3x_E - 6) &= 0\end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste mögliche Extremstelle:

$$x_{E1} = 0$$

Die weiteren Kandidaten erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned}3x_{E2} - 6 &= 0 & | + 6 \\3x_{E2} &= 6 & | : 3 \\x_{E2} &= 2\end{aligned}$$

Was genau an welcher Stelle los ist, muss jetzt im einzelnen untersucht werden.

Was ist bei $x_{E1} = 0$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_{E1} = 0$$

Den y -Wert des Hochpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_H = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

Damit können wir den Hochpunkt angeben: **Hochpunkt $H(0|4)$**

Was ist bei $x_{E2} = 2$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E2} = 2$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_T = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(2|0)$**

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{array}{rcl} 6x_W - 6 & = & 0 \quad | +6 \\ 6x_W & = & 6 \quad | :6 \\ x_W & = & 1 \end{array}$$

Wir haben einen Kandidaten für einen Wendepunkt gefunden. Was dort tatsächlich los ist, prüfe ich mit Hilfe der dritten Ableitung.

Was ist bei $x_W = 1$?

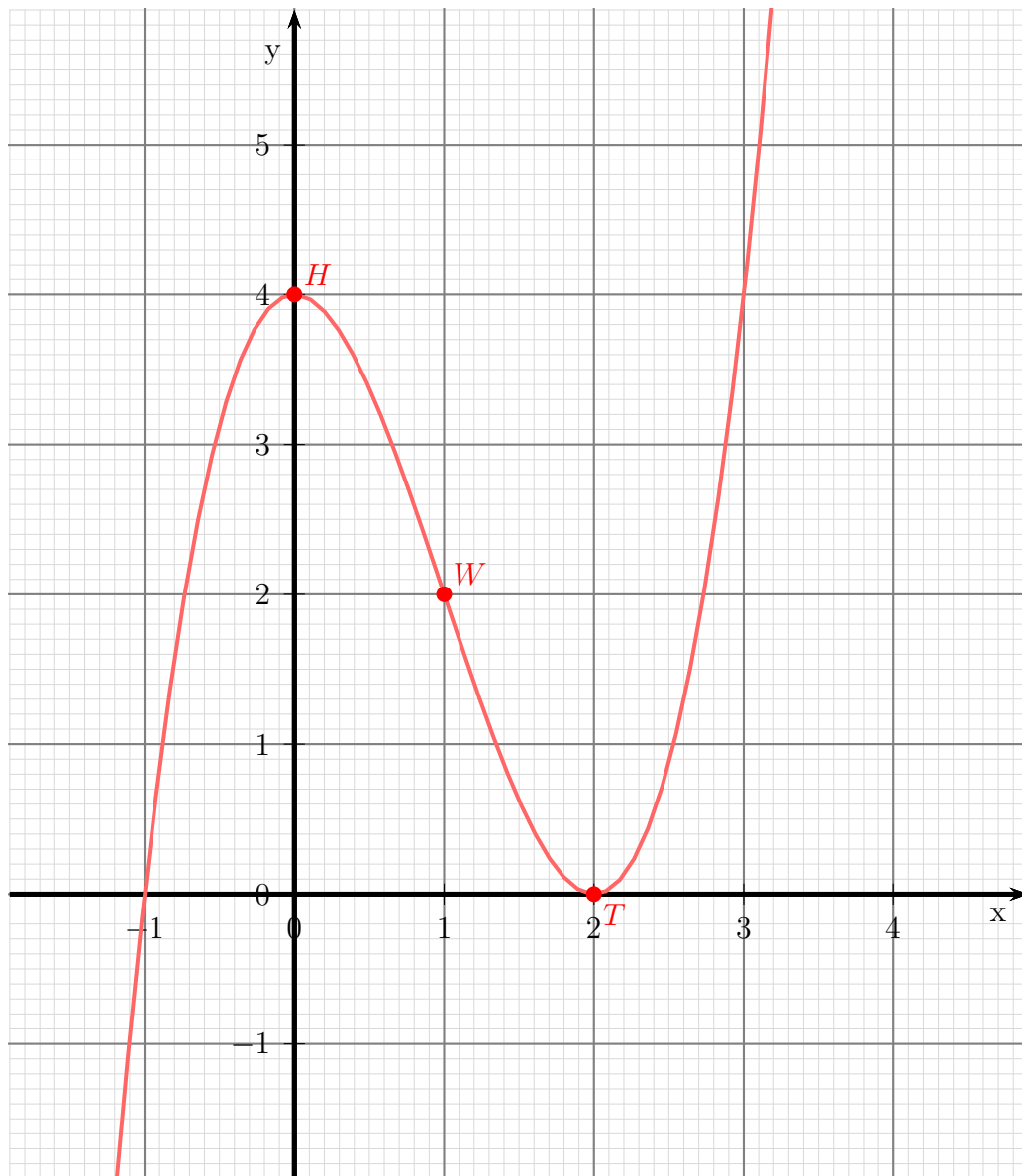
$$f'''(1) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_W = 1$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_W in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_W = f(x_W) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W(1|2)$**

4. Skizze: Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ dargestellt:



Lösung (25)

Zunächst stelle ich die Funktion in Normalform sowie die ersten beiden Ableitungen dar.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) & = & 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) & = & 6ax + 2b \end{array} \right\} \quad (2)$$

Um aus dem Text die Bedingungen für insgesamt 4 Gleichungen herauszuholen, gehen wir den Text schrittweise durch.

Ein Polynom 3. Ordnung hat einen Wendepunkt an der Stelle $x_w = 2 \dots$

Dass es sich um ein **Polynom 3. Grades** handelt, haben wir schon ausgenutzt, indem wir den Ansatz mit der Normalform gemacht haben. **Wendepunkt** bedeutet, dass die zweite Ableitung dort Null ist:

$$f''(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a \cdot 2 + 2b = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir alles aus diesem Teil des Satzes verwendet. Es geht weiter:

\dots mit der Wendetangente $f_1(x) = -3x + 4 \dots$

Dass die Wendetangente bekannt ist, bedeutet zweierlei:

1. Funktion und Wendetangente haben dort einen gemeinsamen Punkt.
2. Funktion und Wendetangente haben dort die gleiche Steigung.

Das ergibt entsprechend zwei Bedingungen und zwei Gleichungen.

$$f(2) = f_1(2) \quad \Rightarrow \quad a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -3 \cdot 2 + 4 \quad (2)$$

$$f'(2) = f'_1(2) \quad \Rightarrow \quad 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = -3 \quad (2)$$

Drei Bedingungen haben wir schon, es fehlt also nur noch eine. Dazu lesen wir die Aufgabenstellung weiter durch:

\dots und schneidet die x -Achse bei $x_0 = 1$.

Damit sind die Koordinaten eines Punktes bekannt: $P(1|0)$

$$f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \quad (2)$$

Damit haben wir 4 Gleichungen zur Bestimmung der vier Parameter a bis d . Zusammengefasst und etwas vereinfacht sieht das Gleichungssystem dann so aus:

$$\begin{array}{llllll} I & 12a & +2b & & & = 0 \\ II & 8a & +4b & +2c & +d & = -2 \\ III & 12a & +4b & +c & & = -3 \\ IV & a & +b & +c & +d & = 0 \end{array}$$

Nur in Gleichung II und IV kommt der Parameter d vor. Daher bietet es sich an, diese beiden Gleichungen so zu kombinieren, dass dabei d herausfällt. Das geht am einfachsten dadurch, dass man Gleichung IV von Gleichung II subtrahiert. Die neue Gleichung nenne ich V. Die anderen Gleichungen schreibe ich unverändert darunter.

$$\begin{array}{rcccccccl}
 II & 8a & +4b & +2c & +d & = & -2 & | \\
 IV & a & +b & +c & +d & = & 0 & |- \\
 \hline
 V & 7a & +3b & +c & & = & -2 & \\
 I & 12a & +2b & & & = & 0 & \\
 III & 12a & +4b & +c & & = & -3 &
 \end{array}$$

Auch hier gibt es wieder zwei Gleichungen, die eine Variable – nämlich c – beinhalten, die in der dritten Gleichung nicht vorkommt. Daher bietet es sich an, auch diese Gleichungen so zu kombinieren, dass c herausfällt. Dazu subtrahiere ich die Gleichung V von Gleichung III. Die neue Gleichung nenne ich VI. Ich sortiere die Gleichungen dazu etwas um.

$$\begin{array}{rcccccccl}
 V & 7a & +3b & +c & = & -2 & |- \\
 III & 12a & +4b & +c & = & -3 & | \\
 I & 12a & +2b & & = & 0 & \\
 \hline
 VI & 5a & +b & & = & -1 & \\
 I & 12a & +2b & & = & 0 &
 \end{array}$$

Wenn man die Gleichung VI verdoppelt oder besser noch die Gleichung I halbiert, dann kann die Differenz zwischen beiden gebildet werden, so dass der Parameter b herausfällt.

$$\begin{array}{rcccccccl}
 VI & 5a & +b & = & -1 & & \\
 I & 12a & +2b & = & 0 & | : 2 \\
 \hline
 VI & 5a & +b & = & -1 & |- \\
 Ia & 6a & +b & = & 0 & | \\
 \hline
 & a & & = & 1 & (8)
 \end{array}$$

Das Ergebnis setzen wir in Gleichung I ein, um b zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcccccl}
 12a + 2b & = & 0 & & \\
 12 \cdot 1 + 2b & = & 0 & | - 12 \\
 2b & = & -12 & | : 2 \\
 b & = & -6 & (3)
 \end{array}$$

Die Ergebnisse für a und b setzen wir in Gleichung III ein, um c zu bestimmen.

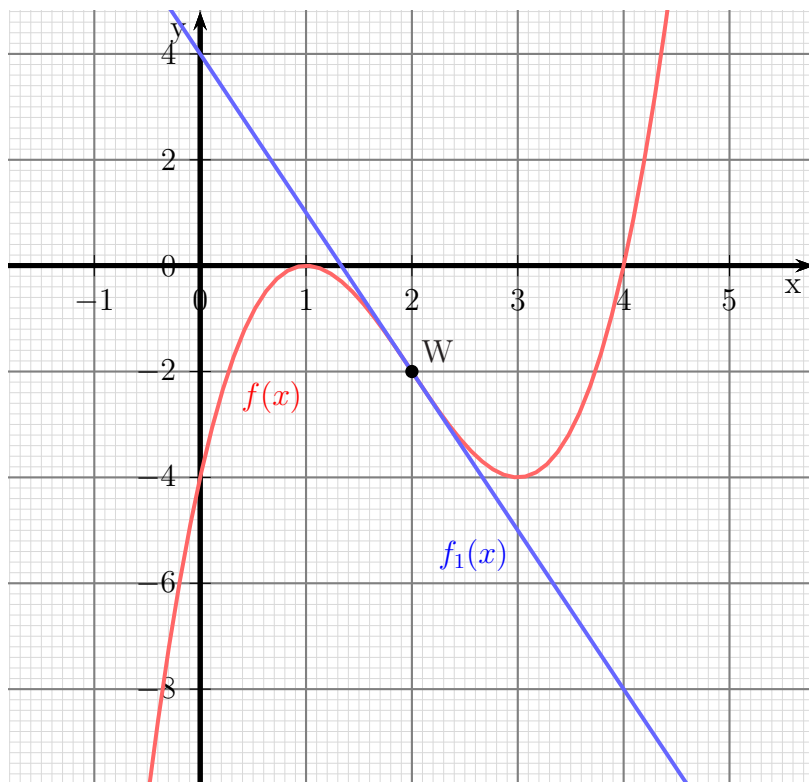
$$\begin{array}{rcccccccl}
 12a + 4b + c & = & -3 & & \\
 12 \cdot 1 + 4 \cdot (-6) + c & = & -3 & | + 12 \\
 c & = & 9 & (2)
 \end{array}$$

Die Ergebnisse für a , b und c setzen wir in Gleichung IV ein, um d zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcccccccl}
 a + b + c + d & = & 0 & & \\
 1 - 6 + 9 + d & = & 0 & | - 4 \\
 d & = & -4 & (1)
 \end{array}$$

Damit sind alle Parameter bestimmt, die Funktionsgleichung kann angegeben werden.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \quad (1)$$



1.10 KURVENDI-10

Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Definitionsbereich, Achsenabschnitte, Hoch-/Tief-/Sattelpunkte und Wendepunkte und skizzieren Sie ihren Graphen!

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keinerlei einschränkende Merkmale wie Brüche oder Wurzeln erkennbar sind, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null. Wir erhalten dann eine Gleichung dritten Grades, die wir jedoch allgemein nicht analytisch lösen können.

$$x_0^3 - 12x_0^2 + 45x_0 - 50 = 0$$

Durch **planvolles Raten** gefunden:

$$x_{01} = 2 \quad (1)$$

Man kann dann $(x - x_{01})$ – hier also $(x - 2)$ – ausklammern. Dazu führen wir eine Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 12x^2 + 45x - 50) : (x - 2) = x^2 - 10x + 25 \quad (2) \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ -10x^2 + 45x - 50 \\ \underline{-(-10x^2 + 20x)} \\ 25x - 50 \\ \underline{-(25x - 50)} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Ergebnis: } f(x) = (x - 2) \cdot (x^2 - 10x + 25) \quad (1)$$

Die restlichen Nullstellen der Funktion ergeben sich aus dem 2. Klammerterm.

$$\begin{aligned} x_0^2 - 10x_0 + 25 &= 0 \\ x_{02/03} &= 5 \pm \sqrt{25 - 25} \\ x_{02} &= 5 \quad (2) \end{aligned}$$

Nullstellen: $x_{01} = 2$ und $x_{02} = 5$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$y_0 = f(0) = 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 45 \cdot 0 - 50 = -50 \quad (1)$$

Das fassen wir zusammen und erhalten:

$$y_0 = -50$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 12x^2 + 45x - 50 \\ f'(x) &= 3x^2 - 24x + 45 \quad (1) \\ f''(x) &= 6x - 24 \quad (1) \\ f'''(x) &= 6 \quad (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} 3x_E^2 - 24x_E + 45 &= 0 \quad | :3 \\ x_E^2 - 8x_E + 15 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 15} \\ x_{E1/2} &= 4 \pm 1 \\ x_{E1} &= 5 \quad x_{E2} = 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Was genau an welcher Stelle los ist, muss jetzt im einzelnen untersucht werden.

Was ist bei $x_{E1} = 5$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(5) = 6 \cdot 5 - 24 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 5$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_T = f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 45 \cdot 5 - 50 = 0$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(5|0)$** (2)

Was ist bei $x_{E2} = 3$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 24 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = 3$$

Den y -Wert des Hochpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_H = f(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 - 50 = 4$$

Damit können wir den Hochpunkt angeben: **Hochpunkt $H(3|4)$** (2)

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \\ 6x_W - 24 &= 0 \quad | +24 \\ 6x_W &= 24 \quad | :6 \\ x_W &= 4 \quad (2) \end{aligned}$$

Wir haben einen Kandidaten für einen Wendepunkt gefunden. Was dort tatsächlich los ist, prüfe ich mit Hilfe der dritten Ableitung.

Was ist bei $x_W = 4$?

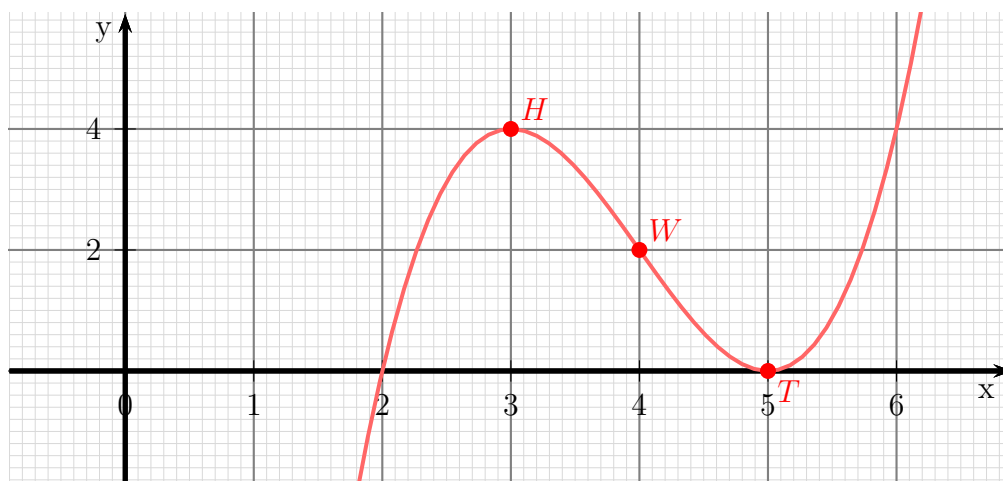
$$f'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_W = 4$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_W in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_W = f(x_W) = f(4) = 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 45 \cdot 4 - 50 = 2$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W(4|2)$** (2)

4. Skizze: Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 50$ dargestellt: (4)



1.11 KURVENDI-11

Diskutieren Sie die Funktion $f(x)$ und skizzieren Sie ihren Graphen! (Definitionsbereich, Polstellen/Lücken, Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte, Asymptote)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

Lösung (25)

Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da der Nenner niemals Null werden kann, gilt:

$$D = \mathbb{R}$$

Polstellen/Lücken: Da es keine Einschränkungen im Definitionsbereich gibt, kann es auch **keine Polstellen oder Lücken** geben.

Nullstellen: Ein Bruch kann nur dort Null sein, wo sein **Zähler** Null ist.

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 &= 0 \\x_{01/2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 1} \\&= 1 \pm 0 \\x_0 &= 1\end{aligned}$$

Es gibt also nur eine einzige Nullstelle:

$$x_0 = 1$$

Extrema: Zur Bestimmung von Extrema und Wendepunkten werden die ersten beiden Ableitungen benötigt.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

Die Ableitung wird mit der Quotientenregel bestimmt. Dazu bestimme ich zunächst die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

$$\begin{aligned}u(x) &= x^2 - 2x + 1 & u'(x) &= 2x - 2 \\v(x) &= x^2 + 1 & v'(x) &= 2x\end{aligned}$$

Hiermit kann die Quotientenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(2x - 2) \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 2x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\&= \frac{2x^3 + 2x - 2x^2 - 2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2} \\f'(x) &= \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung muss ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt werden. Dazu bestimme ich wieder zunächst die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

$$\begin{array}{llll} u(x) & = & 2x^2 - 2 & u'(x) & = & 4x \\ v(x) & = & (x^2 + 1)^2 & v'(x) & = & ? \end{array}$$

Für die Ableitung des Nenners ist an dieser Stelle die Kettenregel erforderlich. Dies führe ich in einer Nebenrechnung durch.

$$\begin{array}{llll} g(x) & = & x^2 + 1 & g'(x) & = & 2x \\ v(g) & = & g^2 & v'(g) & = & 2g \end{array}$$

Die Kettenregel liefert $v'(x)$:

$$v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) = 2x \cdot 2g = 2x \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) = 4x \cdot (x^2 + 1)$$

Hiermit kann nun die Quotientenregel zur Bestimmung von $f''(x)$ angewendet werden. Zur Vereinfachung wird dann sofort der Term $(x^2 + 1)$ ausgeklammert und dadurch gekürzt.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4x \cdot (x^2 + 1)^2 - (2x^2 - 2) \cdot 4x \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{(x^2 + 1) \cdot (4x \cdot (x^2 + 1) - (2x^2 - 2) \cdot 4x)}{(x^2 + 1)^4} \\ &= \frac{4x \cdot (x^2 + 1) - (2x^2 - 2) \cdot 4x}{(x^2 + 1)^3} \\ &= \frac{4x^3 + 4x - 8x^3 + 8x}{(x^2 + 1)^3} \\ f''(x) &= \frac{-4x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln. Dabei genügt es, nur den Zähler zu untersuchen, da ein Bruch nur dort Null sein kann, wo der Zähler Null ist.

$$\begin{array}{llll} f'(x_e) & = & 0 & \\ 2x_e^2 - 2 & = & 0 & | + 2 \\ 2x_e^2 & = & 2 & | : 2 \\ x_e^2 & = & 1 & | \sqrt{} \\ x_{e1/2} & = & \pm 1 & \\ x_{e1} = 1 & & x_{e2} = -1 & \end{array}$$

Was ist bei $x_{e1} = 1$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(1) = \frac{-4 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1}{(1^2 + 1)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{e1} = 1$$

$$y_{e1} = f(x_{e1}) = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 1}{1^2 + 1} = 0$$

Ergebnis: Tiefpunkt bei $T(1|0)$

Was ist bei $x_{e2} = -1$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(-1) = \frac{-4 \cdot (-1)^3 + 12 \cdot (-1)}{\left((-1)^2 + 1\right)^3} = \frac{-8}{8} = -1 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_{e2} = -1$$

$$y_{e2} = f(x_{e2}) = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1}{(-1)^2 + 1} = 2$$

Ergebnis: Hochpunkt bei $H(-1|2)$

Wendepunkte: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln. Dabei genügt es, nur den Zähler zu untersuchen, da ein Bruch nur dort Null sein kann, wo der Zähler Null ist.

$$\begin{aligned} f''(x_w) &= 0 \\ -4x_w^3 + 12x_w &= 0 \\ x_w \cdot (-4x_w^2 + 12) &= 0 & \Rightarrow x_{w1} = 0 \\ -4x_w^2 + 12 &= 0 & | -12 \\ -4x_w^2 &= -12 & | : (-4) \\ x_w^2 &= 3 & | \sqrt{} \\ x_{w2/3} &= \pm\sqrt{3} \\ x_{w2} = \sqrt{3} &\approx 1,732 & x_{w3} = -\sqrt{3} \approx -1,732 \end{aligned}$$

Was ist bei $x_{w1} = 0$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(-1) = -1 \\ f''(1) = 1 \end{array} \right\} \text{ Vorzeichenwechsel} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = 0$$

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 1}{0^2 + 1} = 1$$

Ergebnis: Wendepunkt bei $W_1(0|1)$

Was ist bei $x_{w2} = \sqrt{3}$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(1) = 1 \\ f''(2) = -0,064 \end{array} \right\} \text{ Vorzeichenwechsel} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = \sqrt{3}$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = \frac{(\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 + 1} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,134$$

Ergebnis: Wendepunkt bei $W_2(1,732|0,134)$

Was ist bei $x_{w3} = -\sqrt{3}$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(-1) = -1 \\ f''(-2) = 0,064 \end{array} \right\} \text{ Vorzeichenwechsel} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w3} = -\sqrt{3}$$

$$y_{w3} = f(x_{w3}) = \frac{(-\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (-\sqrt{3}) + 1}{(-\sqrt{3})^2 + 1} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,866$$

Ergebnis: Wendepunkt bei $W_3(-1,732|1,866)$

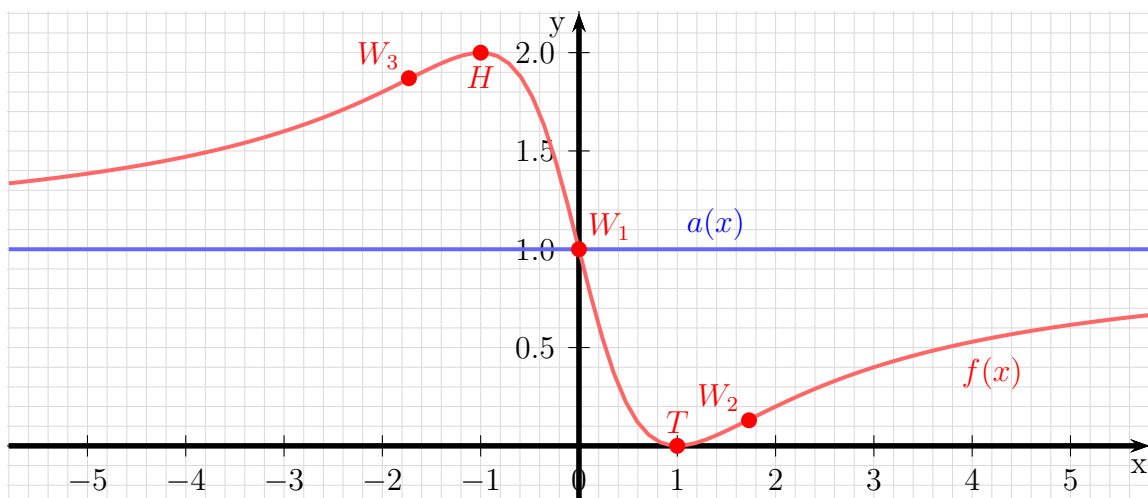
Asymptote: Um den Graphen einfach skizzieren zu können, ist es zweckmäßig, die Asymptote zu bestimmen. Bekanntlich macht man das, indem man den Funktionsterm, der ja einen Bruch darstellt, als Polynomdivision ansetzt.

$$\frac{\begin{array}{r} (x^2 - 2x + 1) \\ -(x^2 + 1) \\ \hline -2x \end{array}}{-2x} : (x^2 + 1) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Die Asymptote ist dann das Divisionsergebnis ohne den „Rest“, also nur die 1 ohne den Term $-\frac{2x}{x^2 + 1}$.

Asyptote: $a(x) = 1$

Skizze: Die Asymptote stellt eine Parallele zur x -Achse auf der Höhe von 1 dar. Auch den Hochpunkt und den Tiefpunkt sowie die Wendepunkte trägt man ein, dann ergibt sich sofort der Kurvenverlauf.



1.12 KURVENDI-12

Diskutieren Sie die Funktion $f(x)$ und skizzieren Sie ihren Graphen! (Definitionsbereich, Polstellen/Lücken, Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte, Asymptote)

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 3}$$

Lösung (25)

Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da der Nenner niemals Null werden kann, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Polstellen/Lücken: Da es keine Einschränkungen im Definitionsbereich gibt, kann es auch **keine Polstellen oder Lücken** geben.

Nullstellen: Ein Bruch kann nur dort Null sein, wo sein **Zähler** Null ist.

$$\begin{array}{rcl} 2x_0^2 & = & 0 \quad | : 2 \\ x_0^2 & = & 0 \quad | \sqrt{} \\ x_0 & = & 0 \end{array}$$

Es gibt also nur eine einzige Nullstelle:

$$x_0 = 0 \quad (1)$$

Extrema: Zur Bestimmung von Extrema und Wendepunkten werden die ersten beiden Ableitungen benötigt.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 3}$$

Die Ableitung wird mit der Quotientenregel bestimmt. Dazu bestimme ich zunächst die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

$$\begin{array}{rclcl} u(x) & = & 2x^2 & u'(x) & = & 4x \\ v(x) & = & x^2 + 3 & v'(x) & = & 2x \end{array}$$

Hiermit kann die Quotientenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x \cdot (x^2 + 3) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 12x - 4x^3}{(x^2 + 3)^2} \\ f'(x) &= \frac{12x}{(x^2 + 3)^2} \quad (3) \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung muss ebenfalls mit der Quotientenregel bestimmt werden. Dazu bestimme ich wieder zunächst die Teilfunktionen und deren Ableitungen.

$$\begin{aligned} u(x) &= 12x & u'(x) &= 12 \\ v(x) &= (x^2 + 3)^2 & v'(x) &= ? \end{aligned}$$

Für die Ableitung des Nenners ist an dieser Stelle die Kettenregel erforderlich. Dies führe ich in einer Nebenrechnung durch.

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 3 & g'(x) &= 2x \\ v(g) &= g^2 & v'(g) &= 2g \end{aligned}$$

Die Kettenregel liefert $v'(x)$:

$$v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) = 2x \cdot 2g = 2x \cdot 2 \cdot (x^2 + 3) = 4x \cdot (x^2 + 3)$$

Hiermit kann nun die Quotientenregel zur Bestimmung von $f''(x)$ angewendet werden. Zur Vereinfachung wird dann sofort der Term $(x^2 + 3)$ ausgeklammert und dadurch gekürzt.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{12 \cdot (x^2 + 3)^2 - 12x \cdot 4x \cdot (x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^4} \\ &= \frac{(x^2 + 3) \cdot (12 \cdot (x^2 + 3) - 12x \cdot 4x)}{(x^2 + 3)^4} \\ &= \frac{12 \cdot (x^2 + 3) - 12x \cdot 4x}{(x^2 + 3)^3} \\ &= \frac{12x^2 + 36 - 48x^2}{(x^2 + 3)^3} \\ f''(x) &= \frac{-36x^2 + 36}{(x^2 + 3)^3} \quad (4) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln. Dabei genügt es, nur den Zähler zu untersuchen, da ein Bruch nur dort Null sein kann, wo der Zähler Null ist.

$$\begin{aligned} f'(x_e) &= 0 \\ 12x_e &= 0 & | : 12 \\ x_e &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Was ist bei $x_e = 0$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(0) = \frac{-36 \cdot 0^2 + 36}{(0^2 + 3)^3} = \frac{36}{27} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_e = 0$$

$$y_e = f(x_e) = \frac{2 \cdot 0^2}{0^2 + 3} = 0$$

Ergebnis: Tiefpunkt bei $T(0|0)$ (2)

Wendepunkte: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln. Dabei genügt es, nur den Zähler zu untersuchen, da ein Bruch nur dort Null sein kann, wo der Zähler Null ist.

$$\begin{array}{rcll}
 f''(x_w) & = & 0 & \\
 -36x_w^2 + 36 & = & 0 & | -36 \\
 -36x_w^2 & = & -36 & | : (-36) \\
 x_w^2 & = & 1 & | \sqrt{} \\
 x_{w1/2} & = & \pm 1 & \\
 x_{w1} = 1 & & x_{w2} = -1 & (2)
 \end{array}$$

Was ist bei $x_{w1} = 1$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(0) = \frac{36}{27} > 0 \\ f''(2) = \frac{-108}{343} < 0 \end{array} \right\} \text{ Vorzeichenwechsel} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w1} = 1$$

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = \frac{2 \cdot 1^2}{1^2 + 3} = 0,5$$

Ergebnis: Wendepunkt bei $W_1(1|0,5)$ (2)

Was ist bei $x_{w2} = -1$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(0) = \frac{36}{27} > 0 \\ f''(-2) = \frac{-108}{343} < 0 \end{array} \right\} \text{ Vorzeichenwechsel} \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = -1$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = \frac{2 \cdot (-1)^2}{(-1)^2 + 3} = 0,5$$

Ergebnis: Wendepunkt bei $W_2(-1|0,5)$ (2)

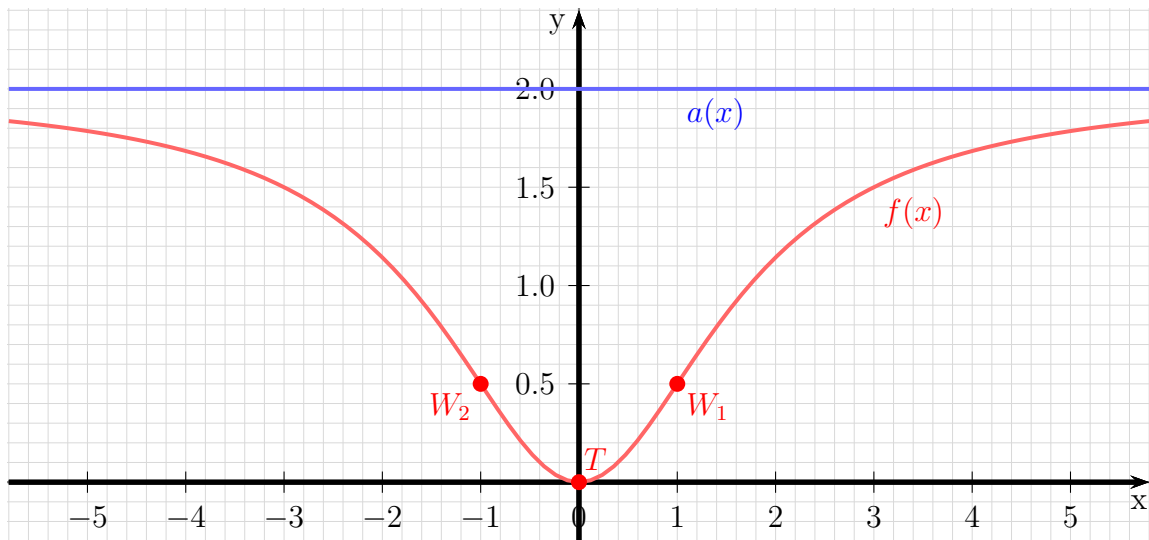
Asymptote: Um den Graphen einfach skizzieren zu können, ist es zweckmäßig, die Asymptote zu bestimmen. Bekanntlich macht man das, indem man den Funktionsterm, der ja einen Bruch darstellt, als Polynomdivision ansetzt.

$$\frac{\begin{array}{r} (2x^2) \\ -(2x^2 + 6) \\ \hline -6 \end{array}}{(x^2 + 3)} = 2 - \frac{6}{x^2 + 3} \quad (2)$$

Die Asymptote ist dann das Divisionsergebnis ohne den „Rest“, also nur die 2 ohne den Term $-\frac{6}{x^2 + 3}$.

Asyptote: $a(x) = 2$ (1)

Skizze: Die Asymptote stellt eine Parallele zur x -Achse auf der Höhe von 2 dar. Auch den Tiefpunkt sowie die Wendepunkte trägt man ein, dann ergibt sich sofort der Kurvenverlauf. (4)



1.13 KURVENDI-13

Diskutieren Sie die Funktion und skizzieren Sie den Funktionsgraphen! (Definitionsbereich, Polstellen/Lücken, Achsenabschnitte, Extremstellen, Wendepunkte, Skizze)

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$$

Lösung (25)

Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keine Einschränkungen des Definitionsbereiches durch Brüche, Wurzeln o. ä. vorliegen, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Polstellen/Lücken: Da es keine Einschränkungen im Definitionsbereich gibt, kann es auch **keine Polstellen oder Lücken** geben.

Achsenabschnitte:

y-Achse:

$$y_0 = f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 = 0 \quad (1)$$

x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^4 - 4x_0^3 + 6x_0^2 &= 0 \\ x_0^2 \cdot (x_0^2 - 4x_0 + 6) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt kann nur Null werden, wenn einer der Faktoren Null ist.

Erster Faktor gleich Null:

$$x_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{01} = 0 \quad (1)$$

Zweiter Faktor gleich Null:

$$\begin{aligned} x_0^2 - 4x_0 + 6 &= 0 \\ x_{02/3} &= 2 \pm \sqrt{4 - 6} \\ x_{02/3} &= 2 \pm \sqrt{-2} \quad (2) \end{aligned}$$

Da die Wurzel aus einer negativen Zahl keine (reelle) Lösung hat, gibt es außer $x_{01} = 0$ keine weiteren Nullstellen. (1)

Extremwertbestimmung: Für die weiteren Berechnungen werden zunächst die ersten drei Ableitungen bestimmt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 12x & (1) \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x + 12 & (1) \\ f'''(x) &= 24x - 24 & (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extremwerte ist das Null-Werden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ 4x_E^3 - 12x_E^2 + 12x_E &= 0 & | : 4 & (1) \\ x_E^3 - 3x_E^2 + 3x_E &= 0 \\ x_E \cdot (x_E^2 - 3x_E + 3) &= 0 & (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt kann nur Null werden, wenn einer der Faktoren Null ist.

$$\begin{aligned} x_{E1} &= 0 \\ x_{E2/3} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3} \\ x_{E2/3} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} & (1) \end{aligned}$$

Da die Wurzel aus einer negativen Zahl keine (reelle) Lösung hat, gibt es außer $x_{E1} = 0$ keine weiteren Kandidaten für Extrema. (1)

Prüfung auf Extrema für $x_E = 0$:

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 12 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0 \quad (1)$$

$$y_E = f(x_E) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 = 0 \quad (1)$$

Ergebnis: Tiefpunkt bei $T(0|0)$

Wendepunktbestimmung: *Notwendige Bedingung für Wendepunkte ist das Null-Werden der zweiten Ableitung.*

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \\ 12x_W^2 - 24x_W + 12 &= 0 & | : 12 \\ x_W^2 - 2x_W + 1 &= 0 \\ x_{W1/2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 1} \\ x_W &= 1 & (1) \end{aligned}$$

Da die Wurzel 0 ergibt, gibt es nur einen einzigen Kandidaten $x_W = 1$ für einen Wendepunkt.

Prüfung auf Wendepunkt für $x_W = 1$:

$$f'''(1) = 24 \cdot 1 - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Aussage möglich!} \quad (1)$$

Daher prüfe ich mit der zweiten Methode (einen x -Wert links von x_W und einen rechts von x_W in f'' einsetzen):

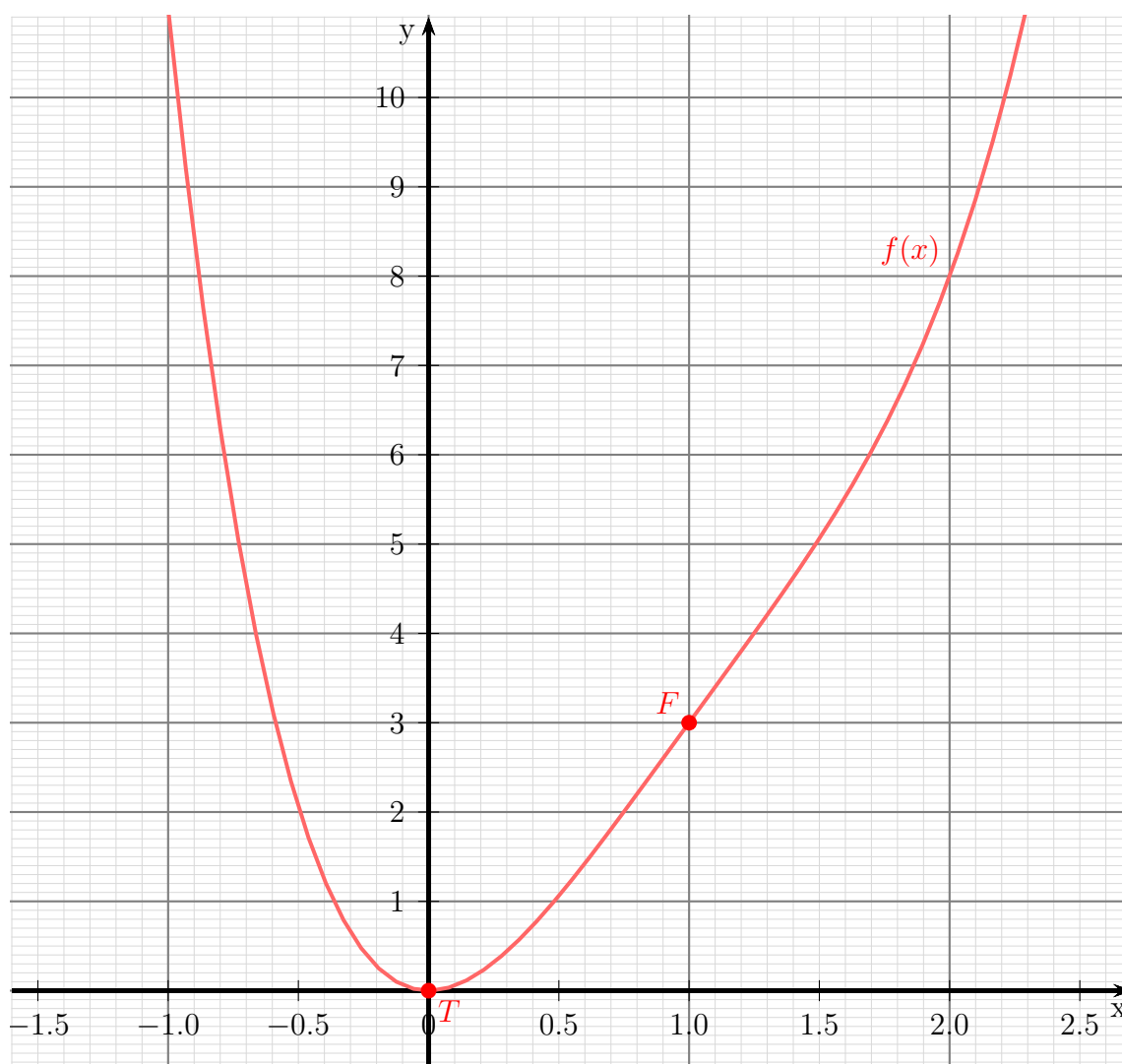
$$\begin{aligned} f''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 12 = 12 > 0 \\ f''(2) &= 12 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 12 = 12 > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Es findet **kein** Vorzeichenwechsel statt, wir haben also keinen Wendepunkt, sondern einen **Flachpunkt** bei $x_F = 1$. (1)

$$y_F = f(x_F) = 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 = 3 \quad (1)$$

Ergebnis: Flachpunkt bei F(1|3)

Skizze: (4)



1.14 KURVENDI-14

Diskutieren Sie die Funktion und skizzieren Sie den Funktionsgraphen! (Definitionsbereich, Polstellen/Lücken, Achsenabschnitte, Extremstellen, Wendepunkte, Skizze)

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2$$

Lösung (25)

Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keine Einschränkungen des Definitionsbereiches durch Brüche, Wurzeln o. ä. vorliegen, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Polstellen/Lücken: Da es keine Einschränkungen im Definitionsbereich gibt, kann es auch **keine Polstellen oder Lücken** geben.

Achsenabschnitte:

y-Achse:

$$y_0 = f(0) = 0^4 + 4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 = 0 \quad (1)$$

x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0 x_0^4 + 4x_0^3 + 6x_0^2 &= 0 \\ x_0^2 \cdot (x_0^2 + 4x_0 + 6) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt kann nur Null werden, wenn einer der Faktoren Null ist.

Erster Faktor gleich Null:

$$x_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{01} = 0 \quad (1)$$

Zweiter Faktor gleich Null:

$$\begin{aligned} x_0^2 + 4x_0 + 6 &= 0 \\ x_{02/3} &= -2 \pm \sqrt{4 - 6} \\ x_{02/3} &= -2 \pm \sqrt{-2} \quad (2) \end{aligned}$$

Da die Wurzel aus einer negativen Zahl keine (reelle) Lösung hat, gibt es außer $x_{01} = 0$ keine weiteren Nullstellen. (1)

Extremwertbestimmung: Für die weiteren Berechnungen werden zunächst die ersten drei Ableitungen bestimmt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 12x^2 + 12x & (1) \\ f''(x) &= 12x^2 + 24x + 12 & (1) \\ f'''(x) &= 24x + 24 & (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extremwerte ist das Null-Werden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ 4x_E^3 + 12x_E^2 + 12x_E &= 0 & | : 4 & (1) \\ x_E^3 + 3x_E^2 + 3x_E &= 0 \\ x_E \cdot (x_E^2 + 3x_E + 3) &= 0 & (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt kann nur Null werden, wenn einer der Faktoren Null ist.

$$\begin{aligned} x_{E1} &= 0 \\ x_{E2/3} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3} \\ x_{E2/3} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} & (1) \end{aligned}$$

Da die Wurzel aus einer negativen Zahl keine (reelle) Lösung hat, gibt es außer $x_{E1} = 0$ keine weiteren Kandidaten für Extrema. (1)

Prüfung auf Extrema für $x_E = 0$:

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 12 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0 \quad (1)$$

$$y_E = f(x_E) = 0^4 + 4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 = 0$$

Ergebnis: Tiefpunkt bei $T(0|0)$ (1)

Wendepunktbestimmung: *Notwendige Bedingung für Wendepunkte ist das Null-Werden der zweiten Ableitung.*

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \\ 12x_W^2 + 24x_W + 12 &= 0 & | : 12 \\ x_W^2 + 2x_W + 1 &= 0 \\ x_{W1/2} &= -1 \pm \sqrt{1 - 1} \\ x_W &= -1 & (1) \end{aligned}$$

Da die Wurzel 0 ergibt, gibt es nur einen einzigen Kandidaten $x_W = -1$ für einen Wendepunkt.

Prüfung auf Wendepunkt für $x_W = -1$:

$$f'''(1) = 24 \cdot (-1) + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Aussage möglich!} \quad (1)$$

Daher prüfe ich mit der zweiten Methode (einen x -Wert links von x_W und einen rechts von x_W in f'' einsetzen):

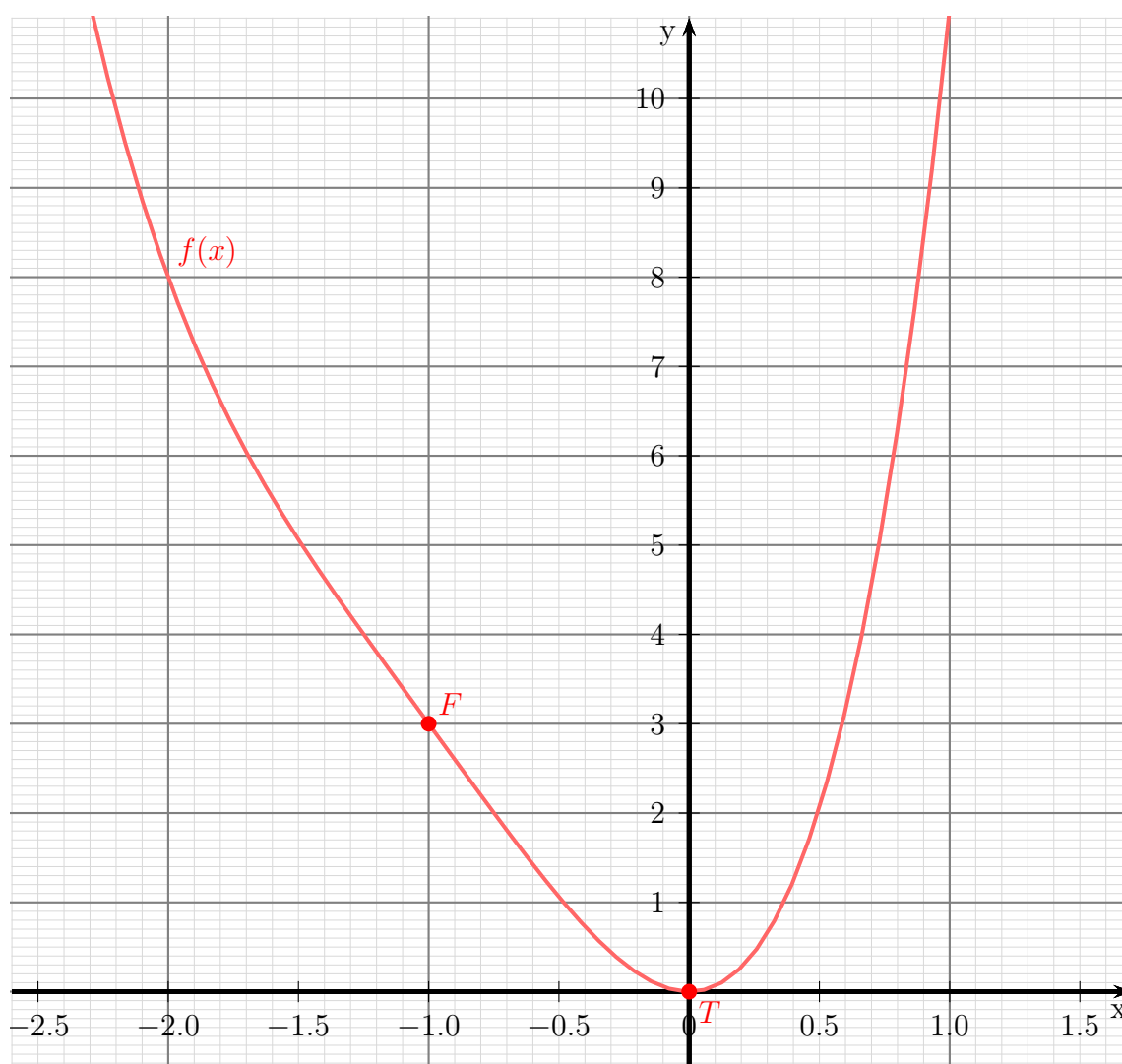
$$\begin{aligned} f''(-2) &= 12 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2) + 12 = 12 > 0 \\ f''(0) &= 12 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 12 = 12 > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Es findet **kein** Vorzeichenwechsel statt, wir haben also keinen Wendepunkt, sondern einen **Flachpunkt** bei $x_F = -1$. (1)

$$y_F = f(x_F) = (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 = 3 \quad (1)$$

Ergebnis: Flachpunkt bei $F(-1|3)$

Skizze: (4)



1.15 KURVENDI-15

Diskutieren Sie die Funktion und skizzieren Sie den Funktionsgraphen! (Definitionsbereich, Achsenabschnitte, Extremstellen, Wendepunkte, Skizze)

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$$

Lösung (25)

Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keine Einschränkungen des Definitionsbereiches durch Brüche, Wurzeln o. ä. vorliegen, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

Polstellen/Lücken: Da es keine Einschränkungen im Definitionsbereich gibt, kann es auch **keine Polstellen oder Lücken** geben.

Achsenabschnitte:

y-Achse:

$$y_0 = f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 24 \cdot 0^2 = 0 \quad (1)$$

x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^4 - 8x_0^3 + 24x_0^2 &= 0 \\ x_0^2 \cdot (x_0^2 - 8x_0 + 24) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt kann nur Null werden, wenn einer der Faktoren Null ist.

Erster Faktor gleich Null:

$$x_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{01} = 0 \quad (1)$$

Zweiter Faktor gleich Null:

$$\begin{aligned} x_0^2 - 8x_0 + 24 &= 0 \\ x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{16 - 24} \\ x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{-8} \quad (2) \end{aligned}$$

Da die Wurzel aus einer negativen Zahl keine (reelle) Lösung hat, gibt es außer $x_{01} = 0$ keine weiteren Nullstellen. (1)

Extremwertbestimmung: Für die weiteren Berechnungen werden zunächst die ersten drei Ableitungen bestimmt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 48x & (1) \\ f''(x) &= 12x^2 - 48x + 48 & (1) \\ f'''(x) &= 24x - 48 & (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extremwerte ist das Null-Werden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ 4x_E^3 - 24x_E^2 + 48x_E &= 0 & | : 4 & (1) \\ x_E^3 - 6x_E^2 + 12x_E &= 0 \\ x_E \cdot (x_E^2 - 6x_E + 12) &= 0 & (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt kann nur Null werden, wenn einer der Faktoren Null ist.

$$\begin{aligned} x_{E1} &= 0 \\ x_{E2/3} &= 3 \pm \sqrt{9 - 12} \\ x_{E2/3} &= 3 \pm \sqrt{-3} & (1) \end{aligned}$$

Da die Wurzel aus einer negativen Zahl keine (reelle) Lösung hat, gibt es außer $x_{E1} = 0$ keine weiteren Kandidaten für Extrema. (1)

Prüfung auf Extrema für $x_E = 0$:

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 48 = 48 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0 \quad (1)$$

$$y_E = f(x_E) = 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 24 \cdot 0^2 = 0$$

Ergebnis: Tiefpunkt bei $T(0|0)$ (1)

Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für Wendepunkte ist das Null-Werden der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \\ 12x_W^2 - 48x_W + 48 &= 0 & | : 12 \\ x_W^2 - 4x_W + 4 &= 0 \\ x_{W1/2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 4} \\ x_W &= 2 & (1) \end{aligned}$$

Da die Wurzel 0 ergibt, gibt es nur einen einzigen Kandidaten $x_W = 2$ für einen Wendepunkt.

Prüfung auf Wendepunkt für $x_W = 2$:

$$f'''(2) = 24 \cdot 2 - 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Aussage möglich!} \quad (1)$$

Daher prüfe ich mit der zweiten Methode (einen x -Wert links von x_W und einen rechts von x_W in f'' einsetzen):

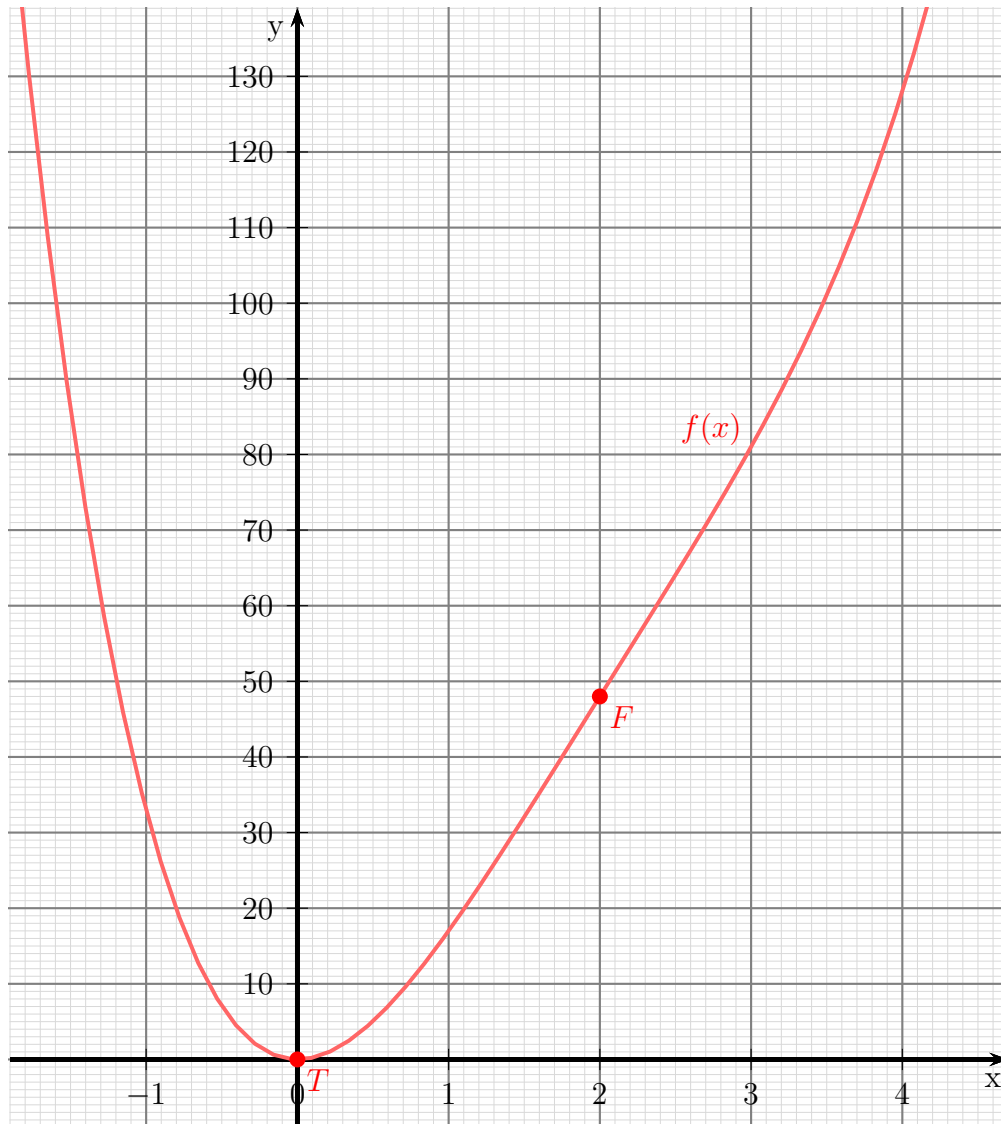
$$\begin{aligned} f''(1) &= 12 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 48 = 12 > 0 \\ f''(3) &= 12 \cdot 3^2 - 48 \cdot 3 + 48 = 12 > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Es findet **kein** Vorzeichenwechsel statt, wir haben also keinen Wendepunkt, sondern einen **Flachpunkt** bei $x_F = 2$. (1)

$$y_F = f(x_F) = 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2^2 = 48 \quad (1)$$

Ergebnis: Flachpunkt bei $F(2|48)$

Skizze: (4)



1.16 KURVENDI-16

Untersuchen Sie die nachfolgende Funktion – soweit vorhanden – auf:

- Definitionsbereich
- Polstellen und Lücken
- Achsenabschnitte
- Extrema
- Wendepunkte
- Asymptote

Skizzieren Sie auch den Funktionsgraphen!

$$f(x) = \frac{3x^3 - 3x}{x^3 + 3x}$$

Lösung (25)

Definitionsbereich

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches muss der Nenner gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{aligned}x^3 + 3x &= 0 \\x \cdot (x^2 + 3) &= 0 \\x_1 &= 0 \\x_{2/3}^2 + 3 &= 0 & | -3 \\x_{2/3}^2 &= -3 & | \sqrt{} \\x_{2/3} &= \pm\sqrt{-3}\end{aligned}$$

Da die Wurzel keine (reelle) Lösung ergibt, lautet der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Pole/Lücken

Untersuchung für die Stelle $x_1 = 0$:

$$Z(x_1) = 3x_1^3 - 3x_1 = 3 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Zähler und Nenner faktorisieren, kürzen}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{3x^3 - 3x}{x^3 + 3x} \\&= \frac{x \cdot (3x^2 - 3)}{x \cdot (x^2 + 3)} \\f^*(x) &= \frac{3x^2 - 3}{x^2 + 3}\end{aligned}$$

$$N^*(x_1) = x_1^2 + 3 = 0^2 + 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Lücke bei } x_L = 0$$

$$y_L = f^*(x_L) = \frac{3x_L^2 - 3}{x_L^2 + 3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Zusammengefasst: **Lücke $L(0|-1)$**

Für alle weiteren Berechnungen kann f^* anstelle von f verwendet werden.

Achsenabschnitte:

$$y_0 = f^*(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 3}{0^2 + 3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\begin{aligned} f^*(x_0) &= 0 \\ \frac{3x_0^2 - 3}{x_0^2 + 3} &= 0 & | \cdot (x_0^2 + 3) \\ 3x_0^2 - 3 &= 0 & | + 3 \\ 3x_0^2 &= 3 & | : 3 \\ x_0^2 &= 1 & | \sqrt{} \\ x_{01/2} &= \pm 1 \\ x_{01} &= 1 & x_{02} = -1 \end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{3x^2 - 3}{x^2 + 3} \\ f^{*'}(x) &= \frac{6x \cdot (x^2 + 3) - (3x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{6x^3 + 18x - 6x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} \\ f^{*'}(x) &= \frac{24x}{(x^2 + 3)^2} \\ f^{*''}(x) &= \frac{24 \cdot (x^2 + 3)^2 - 24x \cdot 2x \cdot 2 \cdot (x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^4} \\ &= \frac{(x^2 + 3) \cdot (24 \cdot (x^2 + 3) - 96x^2)}{(x^2 + 3)^4} \\ &= \frac{24 \cdot (x^2 + 3) - 96x^2}{(x^2 + 3)^3} \\ &= \frac{24x^2 + 72 - 96x^2}{(x^2 + 3)^3} \\ f^{*''}(x) &= \frac{-72x^2 + 72}{(x^2 + 3)^3} \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Null-Werden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} f^{*'}(x_E) &= 0 \\ \frac{24x_E}{(x_E^2 + 3)^2} &= 0 \quad | \cdot (x_E^2 + 3)^2 \\ 24x_E &= 0 \quad | : 24 \\ x_E &= 0 \end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung kann geprüft werden, welche Art Extremum vorliegt.

$$f^{*''}(0) = \frac{-72 \cdot 0^2 + 72}{(0^2 + 3)^3} = \frac{8}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0$$

Nach dieser Rechnung liegt ein Tiefpunkt vor, jedoch ist $x_E \notin D$. Daher hat nur die gekürzte Funktion f^* dort einen Tiefpunkt, nicht aber die gegebene Funktion f .

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Null-Werden der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned} f^{*''}(x_W) &= 0 \\ \frac{-72x_W^2 + 72}{(x_W^2 + 3)^3} &= 0 \quad | \cdot (x_W^2 + 3)^3 \\ -72x_W^2 + 72 &= 0 \quad | -72 \\ -72x_W^2 &= -72 \quad | : (-72) \\ x_W^2 &= 1 \quad | \sqrt{} \\ x_{W1/2} &= \pm 1 \\ x_{W1} &= 1 \quad x_{W2} = -1 \end{aligned}$$

Die Prüfung, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen, kann auf zwei verschiedene Arten durchgeführt werden.

Variante 1 – Mit dritter Ableitung:

$$\begin{aligned} f^{*''}(x) &= \frac{-72x^2 + 72}{(x^2 + 3)^3} \\ f^{*'''}(x) &= \frac{-144x \cdot (x^2 + 3)^3 - (-72x^2 + 72) \cdot 3 \cdot 2x \cdot (x^2 + 3)^2}{(x^2 + 3)^6} \\ &= \frac{(x^2 + 3)^2 \cdot \left(-144x \cdot (x^2 + 3) - (-72x^2 + 72) \cdot 3 \cdot 2x\right)}{(x^2 + 3)^6} \\ &= \frac{-144x \cdot (x^2 + 3) - (-72x^2 + 72) \cdot 6x}{(x^2 + 3)^4} \\ &= \frac{-144x^3 - 432x + 432x^3 - 432x}{(x^2 + 3)^4} \\ f^{*'''}(x) &= \frac{288x^2 - 864x}{(x^2 + 3)^4} \end{aligned}$$

Untersuchung für $x_{W1} = 1$:

$$f^{*'''}(x_{W1}) = \frac{288 \cdot 1^2 - 864x}{(1^2 + 3)^4} = -2,25 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 1$$

Untersuchung für $x_{W2} = -1$:

$$f^{*'''}(x_{W2}) = \frac{288 \cdot (-1)^2 - 864x}{((-1)^2 + 3)^4} = -2,25 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = -1$$

Variante 2 – Ohne dritte Ableitung: Die Prüfung, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen, kann auch ohne dritte Ableitung durchgeführt werden. Dazu wird geprüft, ob die zweite Ableitung einen Vorzeichenwechsel hat.

Untersuchung für $x_{W1} = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{*''}(0) = \frac{-72 \cdot 0^2 + 72}{(0^2 + 3)^3} = \frac{8}{3} > 0 \\ f^{*''}(2) = \frac{-72 \cdot 2^2 + 72}{(2^2 + 3)^3} = -\frac{216}{343} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel}$$

Das Vorzeichen wechselt, also liegt bei $x_{W1} = 1$ ein Wendepunkt vor.

Untersuchung für $x_{W2} = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{*''}(-2) = \frac{-72 \cdot (-2)^2 + 72}{((-2)^2 + 3)^3} = -\frac{216}{343} < 0 \\ f^{*''}(0) = \frac{-72 \cdot 0^2 + 72}{(0^2 + 3)^3} = \frac{8}{3} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel}$$

Das Vorzeichen wechselt, also liegt bei $x_{W2} = -1$ ein Wendepunkt vor.

Es folgen die restlichen Berechnungen zu den Wendepunkten.

$$y_{W1} = f^*(x_{W1}) = \frac{3x_{W1}^2 - 3}{x_{W1}^2 + 3} = \frac{3 \cdot 1^2 - 3}{1^2 + 3} = 0$$

$$W_1(1|0)$$

$$y_{W2} = f^*(x_{W2}) = \frac{3x_{W2}^2 - 3}{x_{W2}^2 + 3} = \frac{3 \cdot (-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 3} = 0$$

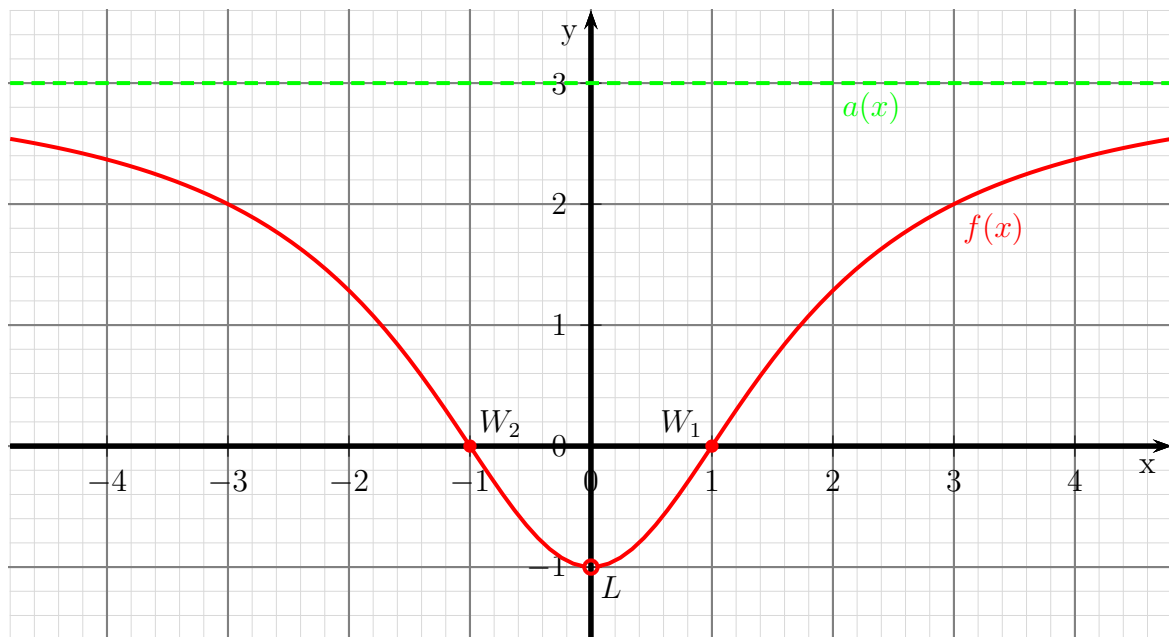
$$W_2(-1|0)$$

Asymptote:

Die Asymptote wird bestimmt, indem eine (unvollständige) Polynomdivision entsprechend der Funktionsgleichung durchgeführt wird.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - 3) : (x^2 + 3) = 3 - \frac{12}{x^2 + 3} \\ -(3x^2 + 9) \\ \hline -12 \end{array}$$

Damit lautet die Asymptote: $a(x) = 3$

Skizze:

1.17 KURVENDI-17

Diskutieren Sie die Funktion $f(x)$ und skizzieren Sie ihren Graphen! (Definitionsbereich, Achsenabschnitte, Extremstellen, Wendepunkte)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 2x + 4}$$

Lösung

1. Definitionsbereich: Einschränkungen im Definitionsbereich gibt es nur dort, wo der Nenner Null wird.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 4 &= 0 \\x_{1/2} &= -1 \pm \sqrt{1-4} \\x_{1/2} &= -1 \pm \sqrt{-3}\end{aligned}$$

Es gibt keine (reelle) Lösung. Daher ist:

$$D = \mathbb{R}$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null. Da ein Bruch nur Null werden kann, wenn der Zähler Null ist, reicht es, die Zählernullstellen zu untersuchen.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 8 &= 0 \\x_{01/2} &= -1 \pm \sqrt{1+8} \\&= -1 \pm \sqrt{9} \\x_{01/2} &= -1 \pm 3\end{aligned}$$

$$x_{01} = 2 \text{ und } x_{02} = -4$$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 2x + 4} \\y_0 &= \frac{0^2 + 2 \cdot 0 - 8}{0^2 + 2 \cdot 0 + 4} \\y_0 &= \frac{-8}{4}\end{aligned}$$

$$y_0 = -2$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man mindestens zwei Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 2x + 4}$$

Die Ableitung muss mit der **Quotientenregel** bestimmt werden. Vorweg bestimme ich die Ableitungen von Zähler und Nenner.

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 + 2x - 8 \Rightarrow u'(x) = 2x + 2 \\ v(x) &= x^2 + 2x + 4 \Rightarrow v'(x) = 2x + 2 \end{aligned}$$

Damit kann die Ableitung gebildet werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 4) - (x^2 + 2x - 8) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 4)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 4x^2 + 8x + 2x^2 + 4x + 8 - 2x^3 - 2x^2 - 4x^2 - 4x + 16x + 16}{(x^2 + 2x + 4)^2} \\ f'(x) &= \frac{24x + 24}{(x^2 + 2x + 4)^2} \end{aligned}$$

Auch die zweite Ableitung muss mit der **Quotientenregel** berechnet werden.

$$\begin{aligned} u(x) &= 24x + 24 \Rightarrow u'(x) = 24 \\ v(x) &= (x^2 + 2x + 4)^2 \Rightarrow v'(x) = \dots \end{aligned}$$

Hier ist für die Ableitung des Nenners die **Kettenregel** erforderlich.

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 2x + 4 \Rightarrow g'(x) = 2x + 2 \\ v(g) &= g^2 \Rightarrow v'(g) = 2g \end{aligned}$$

Hiermit kann die **Kettenregel** angesetzt werden:

$$v'(x) = 2g \cdot (2x + 2) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 4) \cdot (2x + 2)$$

Es ist **nicht zweckmäßig**, dieses Produkt auszumultiplizieren, weil man dann kaum noch sehen kann, wie der Bruch in der zweiten Ableitung gekürzt werden kann!

Jetzt kann die Quotientenregel angewendet werden.

Achtung! Im Zähler kann im zweiten Schritt der Term $(x^2 + 2x + 4)$ ausgeklammert werden. Danach kann man dadurch kürzen.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{24 \cdot (x^2 + 2x + 4)^2 - (24x + 24) \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x + 4) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 4)^4} \\ &= \frac{(x^2 + 2x + 4) \cdot \left(24 \cdot (x^2 + 2x + 4) - (24x + 24) \cdot 2 \cdot (2x + 2) \right)}{(x^2 + 2x + 4)^4} \\ &= \frac{24x^2 + 48x + 96 - (96x^2 + 96x + 96x + 96)}{(x^2 + 2x + 4)^3} \\ &= \frac{24x^2 + 48x + 96 - 96x^2 - 192x - 96}{(x^2 + 2x + 4)^3} \\ f''(x) &= \frac{-72x^2 - 144x}{(x^2 + 2x + 4)^3} \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned}
 f'(x_E) &= 0 \\
 \frac{24x_E + 24}{(x_E^2 + 2x_E + 4)^2} &= 0 & | \cdot (x_E^2 + 2x_E + 4)^2 \\
 24x_E + 24 &= 0 & | - 24 \\
 24x_E &= -24 & | : 24 \\
 x_E &= -1
 \end{aligned}$$

Was genau an dieser Stelle los ist, muss jetzt untersucht werden.

Was ist bei $x_E = -1$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(-1) = \frac{-72 \cdot (-1)^2 - 144 \cdot (-1)}{((-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 4)^3} = \frac{72}{27} > 0$$

Da die zweite Ableitung bei $x_E = -1$ größer als Null ist, liegt ein **Tiefpunkt** vor. Der zugehörige y -Wert muss mit der Grundfunktion bestimmt werden.

$$y_E = f(x_E) = \frac{(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8}{(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 4} = \frac{-9}{3} = -3$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(-1 | -3)$**

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned}
 f''(x_W) &= 0 \\
 \frac{-72x_E^2 - 144x_E}{(x_E^2 + 2x_E + 4)^3} &= 0 & | \cdot (x_E^2 + 2x_E + 4)^3 \\
 -72x_E^2 - 144x_E &= 0 & | : (-72) \\
 x_E^2 + 2x_E &= 0 \\
 x_E \cdot (x_E + 2) &= 0 \\
 x_{E1} &= 0 \\
 x_{E2} &= -2
 \end{aligned}$$

Die Prüfung, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen, kann auch ohne dritte Ableitung durchgeführt werden. Dazu wird geprüft, ob die zweite Ableitung einen Vorzeichenwechsel hat.

Untersuchung für $x_{W1} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(-1) = \frac{-72 \cdot (-1)^2 - 144 \cdot (-1)}{((-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 4)^3} = \frac{72}{27} > 0 \\ f''(1) = \frac{-72 \cdot 1^2 - 144 \cdot 1}{(1^2 + 2 \cdot 1 + 4)^3} = \frac{-216}{343} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel}$$

Das Vorzeichen wechselt, also liegt bei $x_{W1} = 0$ ein Wendepunkt vor.

Untersuchung für $x_{W2} = -2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(-3) = \frac{-72 \cdot (-3)^2 - 144 \cdot (-3)}{((-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 4)^3} = \frac{-216}{343} < 0 \\ f''(-1) = \frac{-72 \cdot (-1)^2 - 144 \cdot (-1)}{((-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 4)^3} = \frac{72}{27} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel}$$

Das Vorzeichen wechselt, also liegt bei $x_{W1} = 0$ ein Wendepunkt vor.

Es folgen die restlichen Berechnungen zu den Wendepunkten.

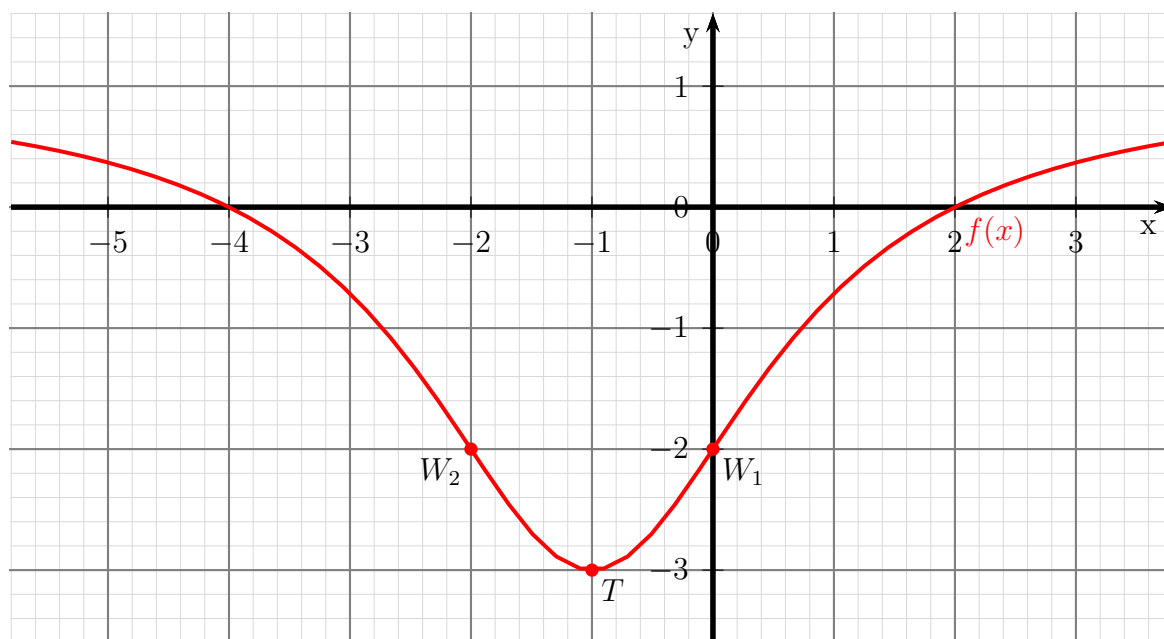
$$y_{W1} = f^*(x_{W1}) = \frac{0^2 + 2 \cdot 0 - 8}{0^2 + 2 \cdot 0 + 4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$W_1(0 | -2)$$

$$y_{W2} = f(x_{W2}) = \frac{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 8}{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$W_2(-2 | -2)$$

Skizze:



1.18 KURVENDI-18

Diskutieren Sie die Funktion $f(x)$ und skizzieren Sie ihren Graphen! (Definitionsbereich, Achsenabschnitte, Extremstellen, Wendepunkte)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keinerlei einschränkende Merkmale wie Brüche oder Wurzeln erkennbar sind, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten eine Gleichung dritten Grades, die wir allgemein nicht analytisch lösen können. Durch **planvolles** Probieren kann man die erste Nullstelle ermitteln:

$$x_{01} = 1$$

Man kann dann $(x - x_{01})$ – hier also $(x - 1)$ – ausklammern. Dazu führen wir eine Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{r} (x^3 \quad -6x^2 \quad +9x \quad -4) : (x-1) = x^2 - 5x + 4 \\ -(x^3 \quad -x^2) \\ \hline \quad -5x^2 \quad +9x \quad -4 \\ - \quad (-5x^2 \quad +5x) \\ \hline \qquad \quad 4x \quad -4 \\ \qquad \quad - \quad (4x \quad -4) \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

Ergebnis: $f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 5x + 4)$

Die restlichen Nullstellen der Funktion ergeben sich aus dem 2. Klammerterm.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x_{02/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{02} = 4 \quad x_{03} &= 1 \end{aligned}$$

Da x_{01} und x_{03} identisch sind, erhalten wir tatsächlich nur zwei Nullstellen:

$$x_{01} = 1 \quad \text{und} \quad x_{02} = 4$$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$y_0 = f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 4 = -4$$

Das fassen wir zusammen und erhalten:

$$y_0 = -4$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ f''(x) &= 6x - 12 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} 3x_E^2 - 12x_E + 9 &= 0 & | :3 \\ x_E^2 - 4x_E + 3 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\ x_{E1/2} &= 2 \pm 1 \\ x_{E1} &= 1 & x_{E2} &= 3 \end{aligned}$$

Was genau an welcher Stelle los ist, muss jetzt im einzelnen untersucht werden.

Was ist bei $x_{E1} = 1$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_H = 1$$

Den y -Wert des Hochpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_H in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_H = f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 4 = 0$$

Damit können wir den Hochpunkt angeben: **Hochpunkt $H(1|0)$**

Was ist bei $x_{E2} = 3$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_T = 3$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_T in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_T = f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 4 = -4$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(3|-4)$**

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{array}{rcl} 6x_W - 12 & = & 0 \quad | +12 \\ 6x_W & = & 12 \quad | :6 \\ x_W & = & 2 \end{array}$$

Wir haben einen Kandidaten für einen Wendepunkt gefunden. Was dort tatsächlich los ist, prüfe ich mit Hilfe der dritten Ableitung.

Was ist bei $x_W = 2$?

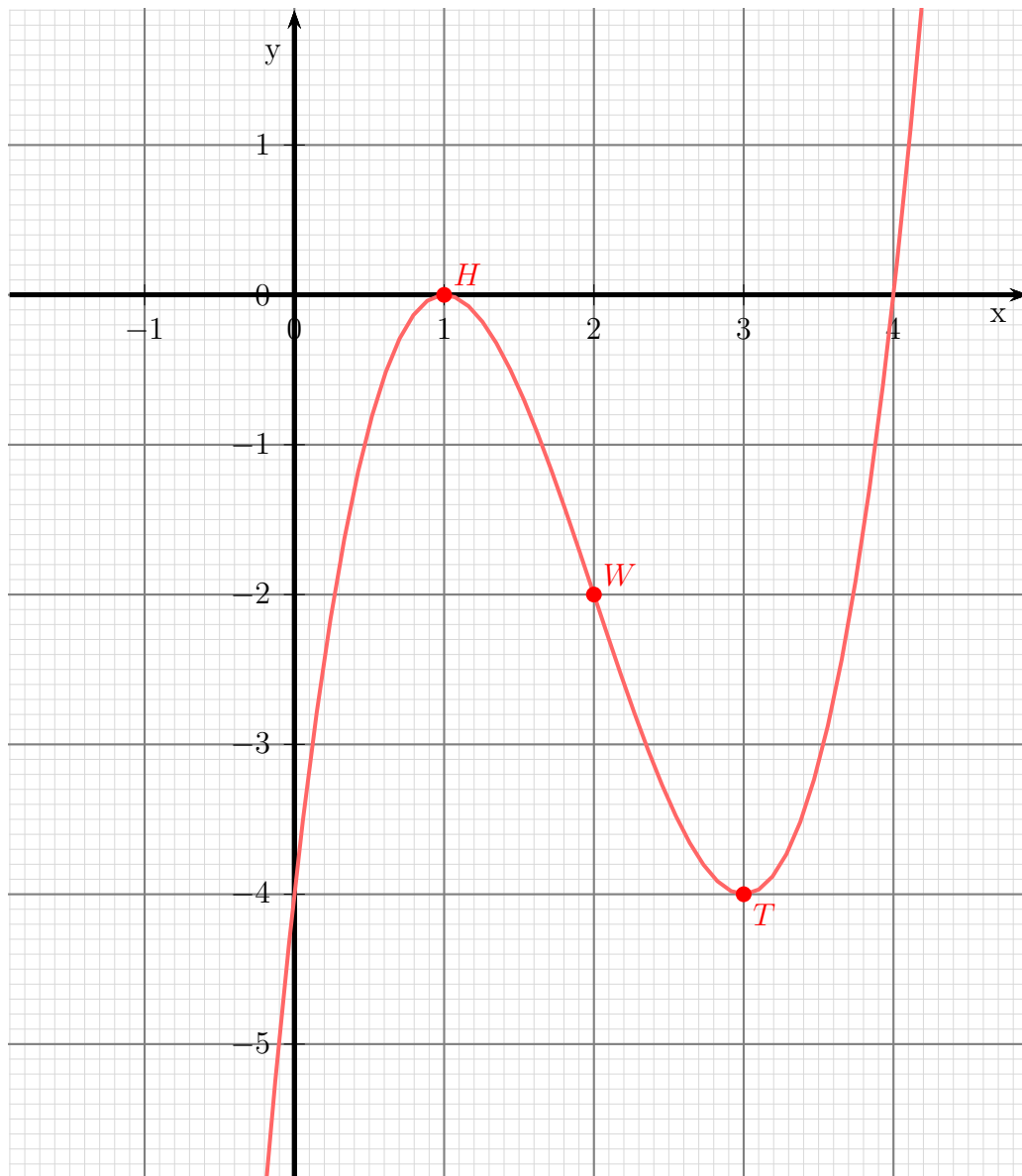
$$f'''(1) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_W = 2$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_W in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_W = f(x_W) = f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 4 = -2$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: Wendepunkt $W(2 | -2)$

4. Skizze: Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ dargestellt:



1.19 KURVENDI-19

Untersuchen Sie die nachfolgende Funktion – soweit vorhanden – auf:

- Definitionsbereich
- Polstellen und Lücken
- Achsenabschnitte
- Extrema
- Wendepunkte
- Asymptote

Skizzieren Sie auch den Funktionsgraphen!

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2 + 3}$$

Lösung (60)

Definitionsbereich: (5)

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches muss der Nenner gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 3 & = & 0 \\ x_{1/2}^2 + 3 & = & 0 \quad | -3 \\ x_{1/2}^2 & = & -3 \quad | \sqrt{} \\ x_{1/2} & = & \pm\sqrt{-3} \end{array}$$

Da die Wurzel keine (reelle) Lösung ergibt, lautet der Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R}$$

Pole/Lücken: (3)

Da der Definitionsbereich keine Einschränkungen hat, kann es keine Pole oder Lücken geben.

Achsenabschnitte: (7)

$$y_0 = f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 3}{0^2 + 3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
\frac{3x_0^2 - 3}{x_0^2 + 3} &= 0 & | \cdot (x_0^2 + 3) \\
3x_0^2 - 3 &= 0 & | + 3 \\
3x_0^2 &= 3 & | : 3 \\
x_0^2 &= 1 & | \sqrt{} \\
x_{01/2} &= \pm 1 \\
x_{01} = 1 & \quad x_{02} = -1
\end{aligned}$$

Extrema: (15)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3x^2 - 3}{x^2 + 3} \\
f'(x) &= \frac{6x \cdot (x^2 + 3) - (3x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} \\
&= \frac{6x^3 + 18x - 6x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} \\
f'(x) &= \frac{24x}{(x^2 + 3)^2} \\
f''(x) &= \frac{24 \cdot (x^2 + 3)^2 - 24x \cdot 2x \cdot 2 \cdot (x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^4} \\
&= \frac{(x^2 + 3) \cdot (24 \cdot (x^2 + 3) - 96x^2)}{(x^2 + 3)^4} \\
&= \frac{24 \cdot (x^2 + 3) - 96x^2}{(x^2 + 3)^3} \\
&= \frac{24x^2 + 72 - 96x^2}{(x^2 + 3)^3} \\
f''(x) &= \frac{-72x^2 + 72}{(x^2 + 3)^3}
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Null-Werden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned}
f'(x_E) &= 0 \\
\frac{24x_E}{(x_E^2 + 3)^2} &= 0 & | \cdot (x_E^2 + 3)^2 \\
24x_E &= 0 & | : 24 \\
x_E &= 0
\end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung kann geprüft werden, welche Art Extremum vorliegt.

$$f''(0) = \frac{-72 \cdot 0^2 + 72}{(0^2 + 3)^3} = \frac{8}{3} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0$$

$$y_T = f(x_E) = \frac{3 \cdot 0^2 - 3}{0^2 + 3} = -1$$

Zusammengefasst: $T(0| -1)$

Wendepunkte: (15)

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Null-Werden der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
 f''(x_W) &= 0 \\
 \frac{-72x_W^2 + 72}{(x_W^2 + 3)^3} &= 0 && | \cdot (x_W^2 + 3)^3 \\
 -72x_W^2 + 72 &= 0 && | -72 \\
 -72x_W^2 &= -72 && | : (-72) \\
 x_W^2 &= 1 && | \sqrt{} \\
 x_{W1/2} &= \pm 1 \\
 x_{W1} = 1 & & x_{W2} = -1
 \end{aligned}$$

Die Prüfung, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen, kann auf zwei verschiedene Arten durchgeführt werden.

Variante 1 – Mit dritter Ableitung:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{-72x^2 + 72}{(x^2 + 3)^3} \\
 f'''(x) &= \frac{-144x \cdot (x^2 + 3)^3 - (-72x^2 + 72) \cdot 3 \cdot 2x \cdot (x^2 + 3)^2}{(x^2 + 3)^6} \\
 &= \frac{(x^2 + 3)^2 \cdot \left(-144x \cdot (x^2 + 3) - (-72x^2 + 72) \cdot 3 \cdot 2x\right)}{(x^2 + 3)^6} \\
 &= \frac{-144x \cdot (x^2 + 3) - (-72x^2 + 72) \cdot 6x}{(x^2 + 3)^4} \\
 &= \frac{-144x^3 - 432x + 432x^3 - 432x}{(x^2 + 3)^4} \\
 f'''(x) &= \frac{288x^2 - 864x}{(x^2 + 3)^4}
 \end{aligned}$$

Untersuchung für $x_{W1} = 1$:

$$f'''(x_{W1}) = \frac{288 \cdot 1^2 - 864x}{(1^2 + 3)^4} = -2,25 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 1$$

Untersuchung für $x_{W2} = -1$:

$$f'''(x_{W2}) = \frac{288 \cdot (-1)^2 - 864x}{((-1)^2 + 3)^4} = -2,25 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = -1$$

Variante 2 – Ohne dritte Ableitung: Die Prüfung, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen, kann auch ohne dritte Ableitung durchgeführt werden. Dazu wird geprüft, ob

die zweite Ableitung einen Vorzeichenwechsel hat.

Untersuchung für $x_{W1} = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(0) = \frac{-72 \cdot 0^2 + 72}{(0^2 + 3)^3} = \frac{8}{3} > 0 \\ f''(2) = \frac{-72 \cdot 2^2 + 72}{(2^2 + 3)^3} = -\frac{216}{343} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel}$$

Das Vorzeichen wechselt, also liegt bei $x_{W1} = 1$ ein Wendepunkt vor.

Untersuchung für $x_{W2} = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(-2) = \frac{-72 \cdot (-2)^2 + 72}{((-2)^2 + 3)^3} = -\frac{216}{343} < 0 \\ f''(0) = \frac{-72 \cdot 0^2 + 72}{(0^2 + 3)^3} = \frac{8}{3} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Vorzeichenwechsel}$$

Das Vorzeichen wechselt, also liegt bei $x_{W2} = -1$ ein Wendepunkt vor.

Es folgen die restlichen Berechnungen zu den Wendepunkten.

$$y_{W1} = f(x_{W1}) = \frac{3x_{W1}^2 - 3}{x_{W1}^2 + 3} = \frac{3 \cdot 1^2 - 3}{1^2 + 3} = 0$$

$$W_1(1|0)$$

$$y_{W2} = f(x_{W2}) = \frac{3x_{W2}^2 - 3}{x_{W2}^2 + 3} = \frac{3 \cdot (-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 3} = 0$$

$$W_2(-1|0)$$

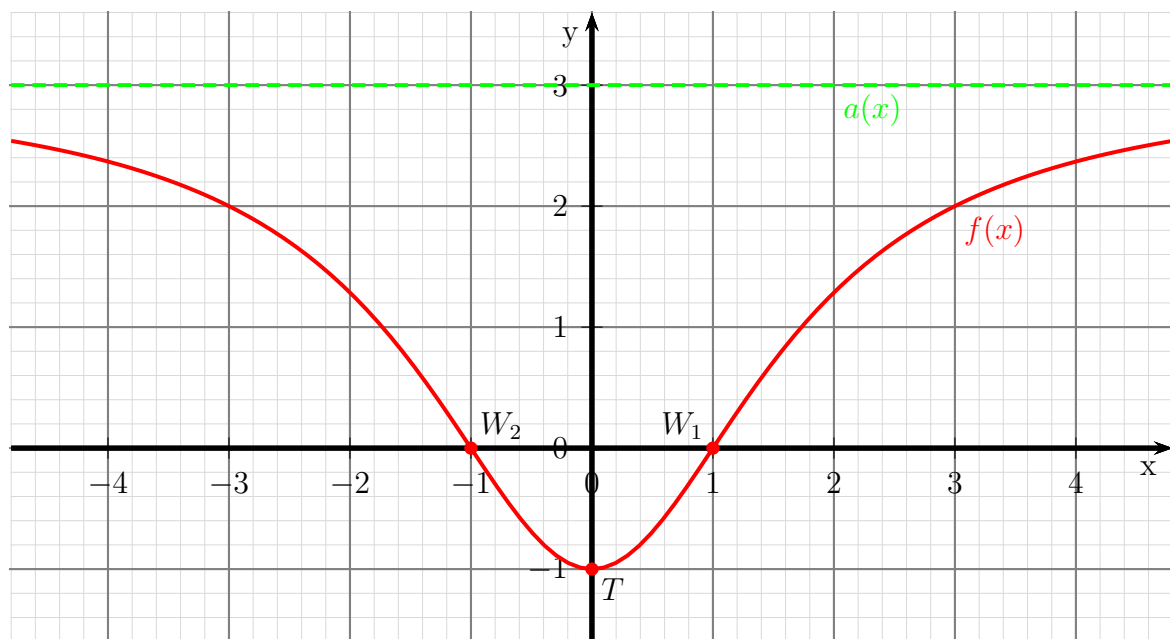
Asymptote: (5)

Die Asymptote wird bestimmt, indem eine (unvollständige) Polynomdivision entsprechend der Funktionsgleichung durchgeführt wird.

$$\begin{array}{r} (3x^2 \quad -3) : (x^2 + 3) = 3 - \frac{12}{x^2 + 3} \\ \underline{-(3x^2 \quad +9)} \\ -12 \end{array}$$

Damit lautet die Asymptote: $a(x) = 3$

Skizze: (10)



1.20 KURVENDI-20

Untersuchen Sie die angegebene Funktion $f(x)$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Hoch- /Tief- /Sattelpunkte, Wendepunkte und skizzieren Sie den Graphen!

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keinerlei einschränkende Merkmale wie Brüche oder Wurzeln erkennbar sind, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null. Wir erhalten dann eine Gleichung dritten Grades, die wir allgemein nicht analytisch lösen können. Allerdings können wir x_0 ausklammern.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 &= 0 \\ x_0 \cdot (x_0^2 - 6x_0 + 9) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad (1)$$

Die weiteren Nullstellen erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned} x_0^2 - 6x_0 + 9 &= 0 \\ x_{02/03} &= 3 \pm \sqrt{9 - 9} \\ &= 3 \pm \sqrt{0} \\ x_{02} &= 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Die Funktion hat zwei Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad \text{und} \quad x_{02} = 3 \quad (1)$$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$y_0 = f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$$

Das fassen wir zusammen und erhalten:

$$y_0 = 0 \quad (1)$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \quad (1) \\ f''(x) &= 6x - 12 \quad (1) \\ f'''(x) &= 6 \quad (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ 3x_E^2 - 12x_E + 9 &= 0 & | :3 \\ x_E^2 - 4x_E + 3 &= 0 \\ x_{E1/E2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\ &= 2 \pm 1 \\ x_{E1} &= 3 & x_{E2} = 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Was genau an welcher Stelle los ist, muss jetzt im einzelnen untersucht werden.

Was ist bei $x_{E1} = 3$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x = 3 \quad (1)$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_T = f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: Tiefpunkt $T(3|0)$ (1)

Was ist bei $x_{E2} = 1$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x = 1 \quad (1)$$

Den y -Wert des Hochpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_H = f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$$

Damit können wir den Hochpunkt angeben: Hochpunkt $H(1|4)$ (1)

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{array}{rcl} f''(x_W) & = & 0 \\ 6x_W - 12 & = & 0 \quad | +12 \\ 6x_W & = & 12 \quad | :6 \\ x_W & = & 2 \quad (2) \end{array}$$

Wir haben einen Kandidaten für einen Wendepunkt gefunden. Was dort tatsächlich los ist, prüfe ich mit Hilfe der dritten Ableitung.

Was ist bei $x_W = 2$?

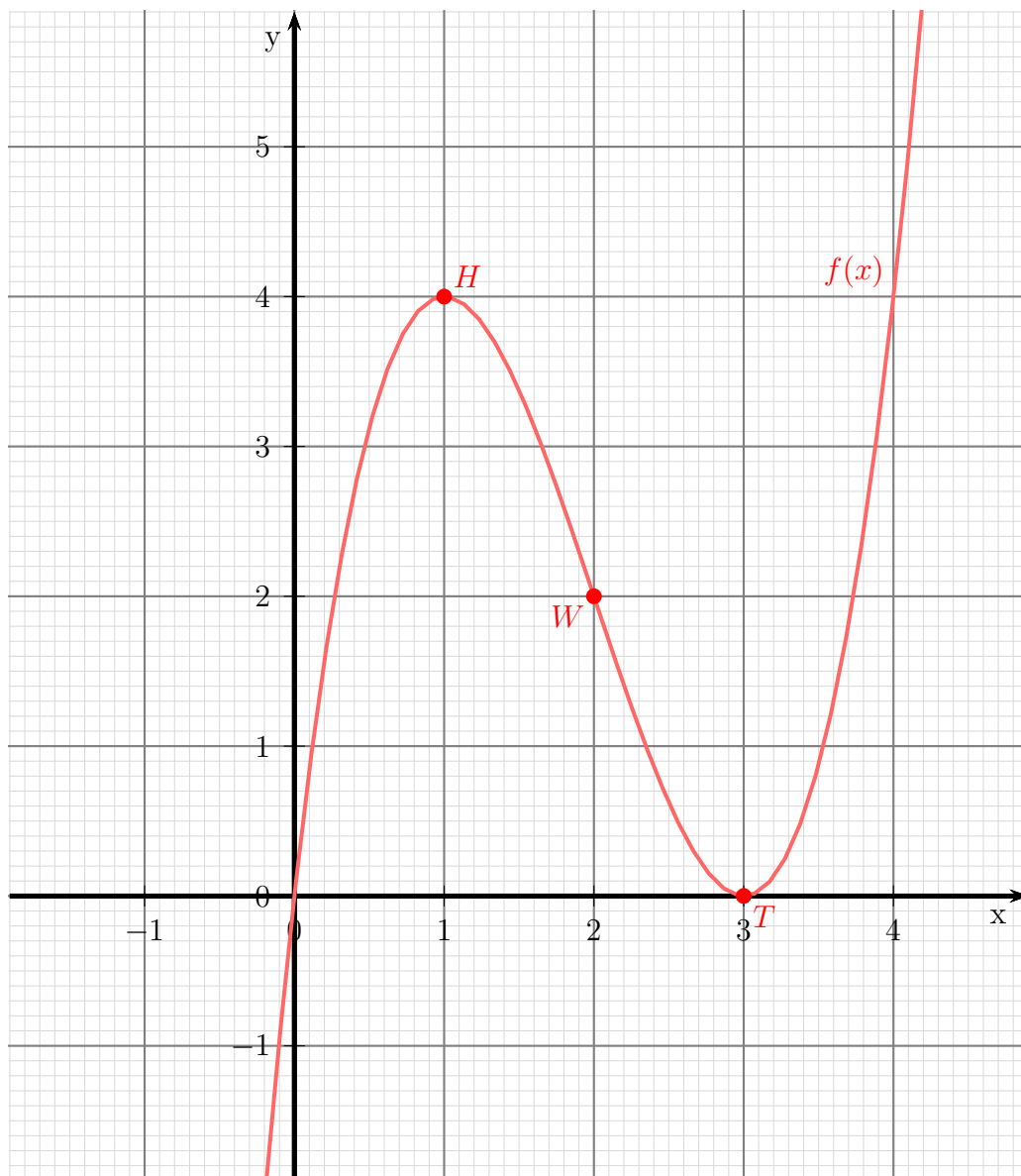
$$f'''(2) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_W = 2 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_W in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_W = f(x_W) = f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: Wendepunkt $W(2|2)$ (1)

5. Skizze Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ dargestellt: (4)



1.21 KURVENDI-21

Untersuchen Sie die angegebene Funktion $f(x)$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Hoch- /Tief- /Sattelpunkte, Wendepunkte und skizzieren Sie den Graphen!

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keinerlei einschränkende Merkmale wie Brüche oder Wurzeln erkennbar sind, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null. Wir erhalten dann eine Gleichung dritten Grades, die wir allgemein nicht analytisch lösen können. Allerdings können wir x_0 ausklammern.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^3 + 6x_0^2 + 9x_0 &= 0 \\ x_0 \cdot (x_0^2 + 6x_0 + 9) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad (1)$$

Die weiteren Nullstellen erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned} x_0^2 + 6x_0 + 9 &= 0 \\ x_{02/03} &= -3 \pm \sqrt{9 - 9} \\ &= -3 \pm \sqrt{0} \\ x_{02} &= -3 \quad (2) \end{aligned}$$

Die Funktion hat zwei Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad \text{und} \quad x_{02} = -3 \quad (1)$$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$y_0 = f(0) = 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$$

Das fassen wir zusammen und erhalten:

$$y_0 = 0 \quad (1)$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 6x^2 + 9x \\ f'(x) &= 3x^2 + 12x + 9 \quad (1) \\ f''(x) &= 6x + 12 \quad (1) \\ f'''(x) &= 6 \quad (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ 3x_E^2 + 12x_E + 9 &= 0 & | : 3 \\ x_E^2 + 4x_E + 3 &= 0 \\ x_{E1/E2} &= -2 \pm \sqrt{4-3} \\ &= -2 \pm 1 \\ x_{E1} &= -3 & x_{E2} &= -1 \quad (3) \end{aligned}$$

Was genau an welcher Stelle los ist, muss jetzt im einzelnen untersucht werden.

Was ist bei $x_{E1} = -3$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(-3) = 6 \cdot (-3) + 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x = -3 \quad (1)$$

Den y -Wert des Hochpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_H = f(-3) = (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) = 0$$

Damit können wir den Hochpunkt angeben: **Hochpunkt $H(-3|0)$** (1)

Was ist bei $x_{E2} = -1$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 12 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x = -1 \quad (1)$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_H = f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) = -4$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(-1|-4)$** (1)

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{array}{rcl} f''(x_W) & = & 0 \\ 6x_W + 12 & = & 0 \quad | -12 \\ 6x_W & = & -12 \quad | :6 \\ x_W & = & -2 \quad (2) \end{array}$$

Wir haben einen Kandidaten für einen Wendepunkt gefunden. Was dort tatsächlich los ist, prüfe ich mit Hilfe der dritten Ableitung.

Was ist bei $x_W = -2$?

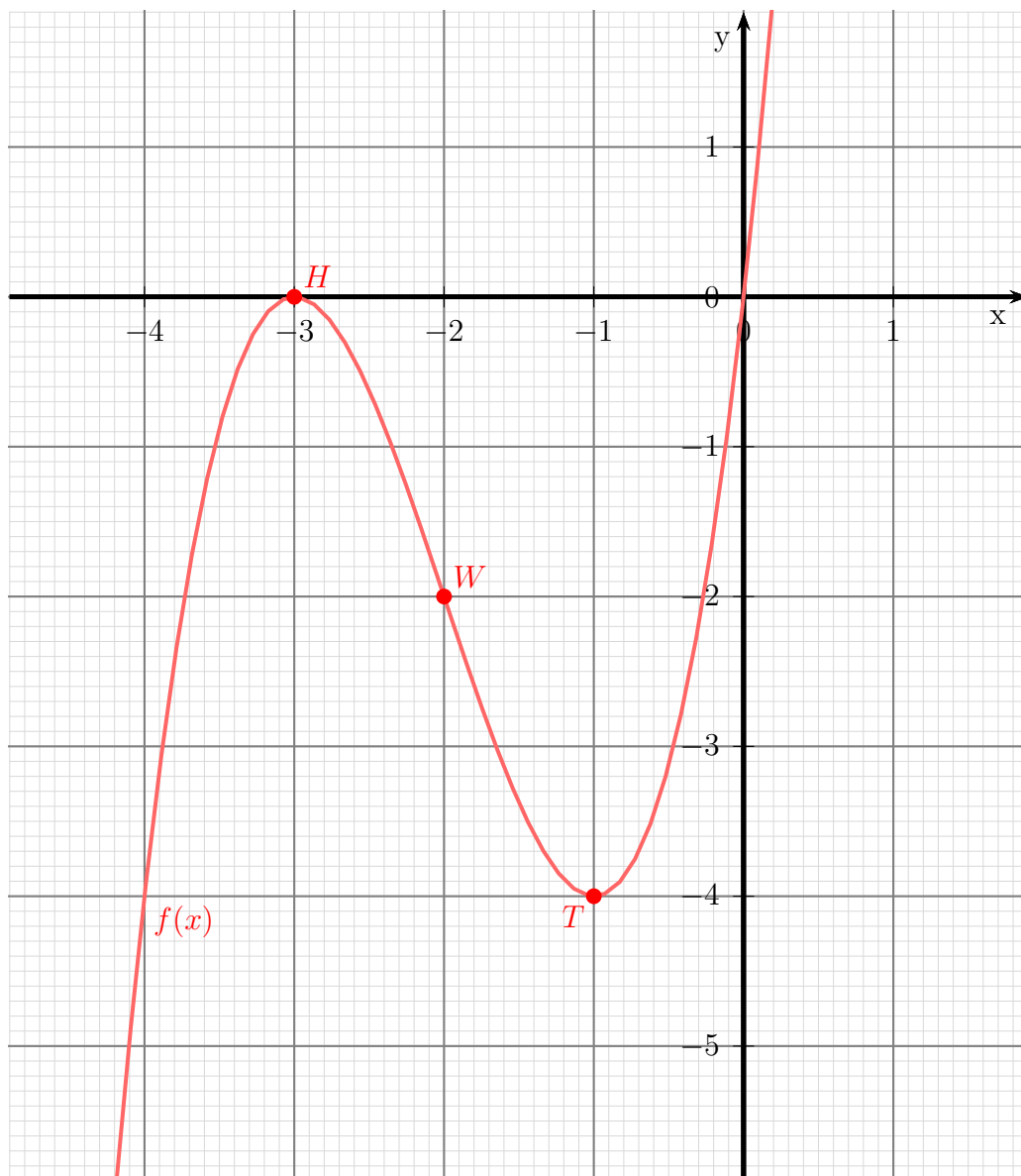
$$f'''(-2) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_W = -2 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_W in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_W = f(x_W) = f(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 9 \cdot (-2) = -2$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: Wendepunkt $W(-2 | -2)$ (1)

5. Skizze Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ dargestellt: (4)



1.22 KURVENDI-22

Untersuchen Sie die angegebene Funktion $f(x)$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Hoch- /Tief- /Sattelpunkte, Wendepunkte und skizzieren Sie den Graphen!

$$f(x) = -2x^4 + 8x^3$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keinerlei einschränkende Merkmale wie Brüche oder Wurzeln erkennbar sind, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null. Wir erhalten dann eine Gleichung vierten Grades, die wir allgemein nicht analytisch lösen können. Allerdings können wir x_0^3 ausklammern.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -2x_0^4 + 8x_0^3 &= 0 \\ x_0^3 \cdot (-2x_0 + 8) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad (1)$$

Die weiteren Nullstellen erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{array}{rcl} -2x_0 + 8 & = & 0 \quad | -8 \\ -2x_0 & = & -8 \quad | : (-2) \\ x_{02} & = & 4 \end{array}$$

Die Funktion hat zwei Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad \text{und} \quad x_{02} = 4 \quad (1)$$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$y_0 = f(0) = -2 \cdot 0^4 + 8 \cdot 0^3 = 0$$

Das fassen wir zusammen und erhalten:

$$y_0 = 0 \quad (1)$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^4 + 8x^3 \\ f'(x) &= -8x^3 + 24 \cdot x^2 \quad (1) \\ f''(x) &= -24x^2 + 48x \quad (1) \\ f'''(x) &= -48x + 48 \quad (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ -8x_E^3 + 24 \cdot x_E^2 &= 0 \quad | : (-8) \\ x_E^3 - 3 \cdot x_E^2 &= 0 \\ x_E^2 \cdot (x_E - 3) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Lösung:

$$x_{E1} = 0 \quad (1)$$

Einen weiteren Kandidaten für Extrema erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned} x_E - 3 &= 0 \quad | + 3 \\ x_{E2} &= 3 \quad (1) \end{aligned}$$

Was genau an welcher Stelle los ist, muss jetzt im einzelnen untersucht werden.

Was ist bei $x_{E1} = 0$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(0) = -24 \cdot 0^2 + 48 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Aussage möglich!} \quad (1)$$

Da diese Methode zu keinem Ergebnis geführt hat, verwenden wir die alternative Methode, die mit der ersten Ableitung auskommt, zur Untersuchung. Als „Nachbarwerte“ zu $x_{E1} = 0$ wähle ich -1 und 1 aus.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f'(-1) &= & -8 \cdot (-1)^3 + 24 \cdot (-1)^2 = 32 > 0 \\ f'(1) &= & -8 \cdot 1^3 + 24 \cdot 1^2 = 16 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

Da **kein** Vorzeichenwechsel vorliegt, haben wir einen **Sattelpunkt**. (1)

Der y -Wert des Sattelpunktes ist bereits als y -Achsenabschnitt mit $y_0 = 0$ bekannt. Damit können wir den Sattelpunkt angeben: Sattelpunkt $S(0|0)$ (1)

Was ist bei $x_{E2} = 3$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(3) = -24 \cdot 3^2 + 48 \cdot 3 = -72 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_H = 3 \quad (1)$$

Den y -Wert des Hochpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_H = f(3) = -2 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^3 = 54$$

Damit können wir den Hochpunkt angeben: **Hochpunkt $H(3|54)$** (1)

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \\ -24x_W^2 + 48x_W &= 0 \quad | : (-24) \\ x_W^2 - 2x_W &= 0 \\ x_W \cdot (x_W - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Lösung:

$$x_{W1} = 0 \quad (1)$$

Einen weiteren Kandidaten für Wendepunkte erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned} x_W - 2 &= 0 \quad | + 2 \\ x_{W2} &= 2 \quad (1) \end{aligned}$$

Wir haben zwei Kandidaten für Wendepunkte gefunden. Was dort tatsächlich los ist, prüfe ich mit Hilfe der dritten Ableitung.

Was ist bei $x_{W1} = 0$?

$$f'''(0) = -48 \cdot 0 + 48 = 48 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 0 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_W in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_{W1} = f(x_{W1}) = f(0) = -2 \cdot 0^4 + 8 \cdot 0^3 = 0$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W_1(0|0)$** (1)

Was ist bei $x_{W2} = 2$?

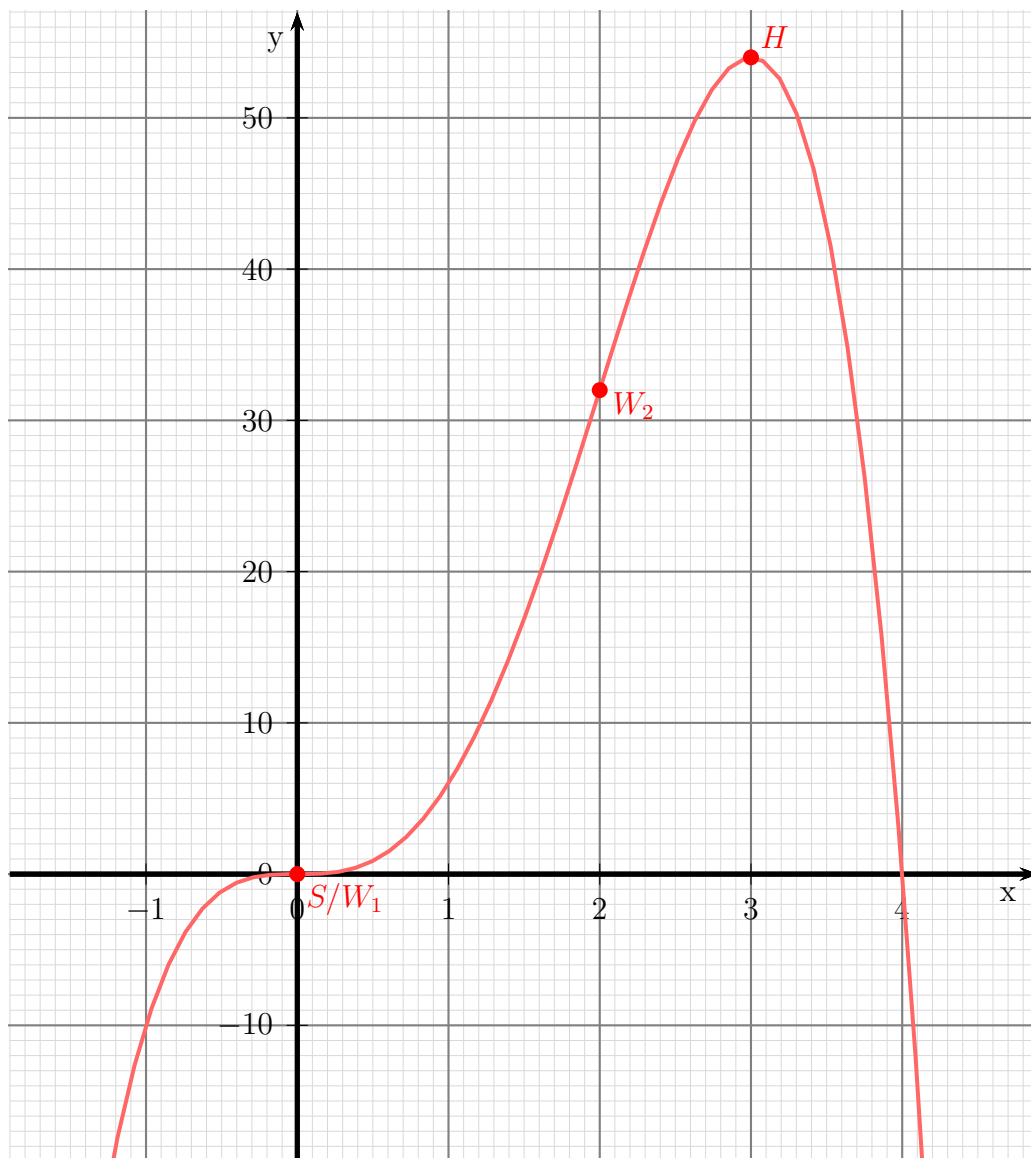
$$f'''(2) = -48 \cdot 2 + 48 = -48 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = 2 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{W2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_{W2} = f(x_{W2}) = f(2) = -2 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^3 = 32$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W_2(2|32)$** (1)

5. Skizze Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = -x^4 + 8x^3$ dargestellt: (4)



1.23 KURVENDI-23

Untersuchen Sie die angegebene Funktion $f(x)$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Hoch- /Tief- /Sattelpunkte, Wendepunkte und skizzieren Sie den Graphen!

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3$$

Lösung (25)

1. Definitionsbereich: Als erstes bestimmen wir den Definitionsbereich. Da keinerlei einschränkende Merkmale wie Brüche oder Wurzeln erkennbar sind, gilt:

$$D = \mathbb{R} \quad (1)$$

2. Achsenabschnitte:

Nullstellen: Zur Bestimmung der Nullstellen setzt man die Funktion gleich Null. Wir erhalten dann eine Gleichung vierten Grades, die wir allgemein nicht analytisch lösen können. Allerdings können wir x_0^3 ausklammern.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0^4 - 8x_0^3 &= 0 \\ x_0^3 \cdot (2x_0 - 8) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad (1)$$

Die weiteren Nullstellen erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{array}{rcl} 2x_0 - 8 & = & 0 \quad | +8 \\ 2x_0 & = & 8 \quad | :2 \\ x_{02} & = & 4 \end{array}$$

Die Funktion hat zwei Nullstelle:

$$x_{01} = 0 \quad \text{und} \quad x_{02} = 4 \quad (1)$$

Abschnitt auf der y-Achse: Den y -Achsenabschnitt bestimmt man, indem man in die Funktionsgleichung für x Null einsetzt.

$$y_0 = f(0) = 2 \cdot 0^4 - 8 \cdot 0^3 = 0$$

Das fassen wir zusammen und erhalten:

$$y_0 = 0 \quad (1)$$

3. Extrema: Zur Bestimmung der Extremstellen (und auch der Wendepunkte) benötigt man einige Ableitungen. Die bestimme ich mal vorweg.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 8x^3 \\ f'(x) &= 8x^3 - 24 \cdot x^2 \quad (1) \\ f''(x) &= 24x^2 - 48x \quad (1) \\ f'''(x) &= 48x - 48 \quad (1) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Extremstellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ 8x_E^3 - 24 \cdot x_E^2 &= 0 \quad | : 8 \\ x_E^3 - 3 \cdot x_E^2 &= 0 \\ x_E^2 \cdot (x_E - 3) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der **linke** Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Lösung:

$$x_{E1} = 0 \quad (1)$$

Einen weiteren Kandidaten für Extrema erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned} x_E - 3 &= 0 \quad | + 3 \\ x_{E2} &= 3 \quad (1) \end{aligned}$$

Was genau an welcher Stelle los ist, muss jetzt im einzelnen untersucht werden.

Was ist bei $x_{E1} = 0$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(0) = 24 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Aussage möglich!} \quad (1)$$

Da diese Methode zu keinem Ergebnis geführt hat, verwenden wir die alternative Methode, die mit der ersten Ableitung auskommt, zur Untersuchung. Als „Nachbarwerte“ zu $x_{E1} = 0$ wähle ich -1 und 1 aus.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f'(-1) &= & 8 \cdot (-1)^3 - 24 \cdot (-1)^2 = -32 < 0 \\ f'(1) &= & 8 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 = -16 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

Da **kein** Vorzeichenwechsel vorliegt, haben wir einen **Sattelpunkt**. (1)

Der y -Wert des Sattelpunktes ist bereits als y -Achsenabschnitt mit $y_0 = 0$ bekannt. Damit können wir den Sattelpunkt angeben: Sattelpunkt $S(0|0)$ (1)

Was ist bei $x_{E2} = 3$?

Die Prüfung führe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$f''(3) = 24 \cdot 3^2 - 48 \cdot 3 = 72 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_T = 3 \quad (1)$$

Den y -Wert des Tiefpunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{E1} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_T = f(3) = 2 \cdot 3^4 - 8 \cdot 3^3 = -54$$

Damit können wir den Tiefpunkt angeben: **Tiefpunkt $T(3|-54)$** (1)

3. Wendepunktbestimmung: Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung. Wir setzen also die zweite Ableitung gleich Null, um mögliche Wendestellen zu ermitteln.

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \\ 24x_W^2 - 48x_W &= 0 \quad | : 24 \\ x_W^2 - 2x_W &= 0 \\ x_W \cdot (x_W - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wenn der linke Faktor Null ist, erhalten wir sofort die erste Lösung:

$$x_{W1} = 0 \quad (1)$$

Einen weiteren Kandidaten für Wendepunkte erhalten wir, indem wir den **rechten** Faktor untersuchen:

$$\begin{aligned} x_W - 2 &= 0 \quad | + 2 \\ x_{W2} &= 2 \quad (1) \end{aligned}$$

Wir haben zwei Kandidaten für Wendepunkte gefunden. Was dort tatsächlich los ist, prüfe ich mit Hilfe der dritten Ableitung.

Was ist bei $x_{W1} = 0$?

$$f'''(0) = 48 \cdot 0 - 48 = -48 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 0 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_W in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_{W1} = f(x_{W1}) = f(0) = 2 \cdot 0^4 - 8 \cdot 0^3 = 0$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W_1(0|0)$** (1)

Was ist bei $x_{W2} = 2$?

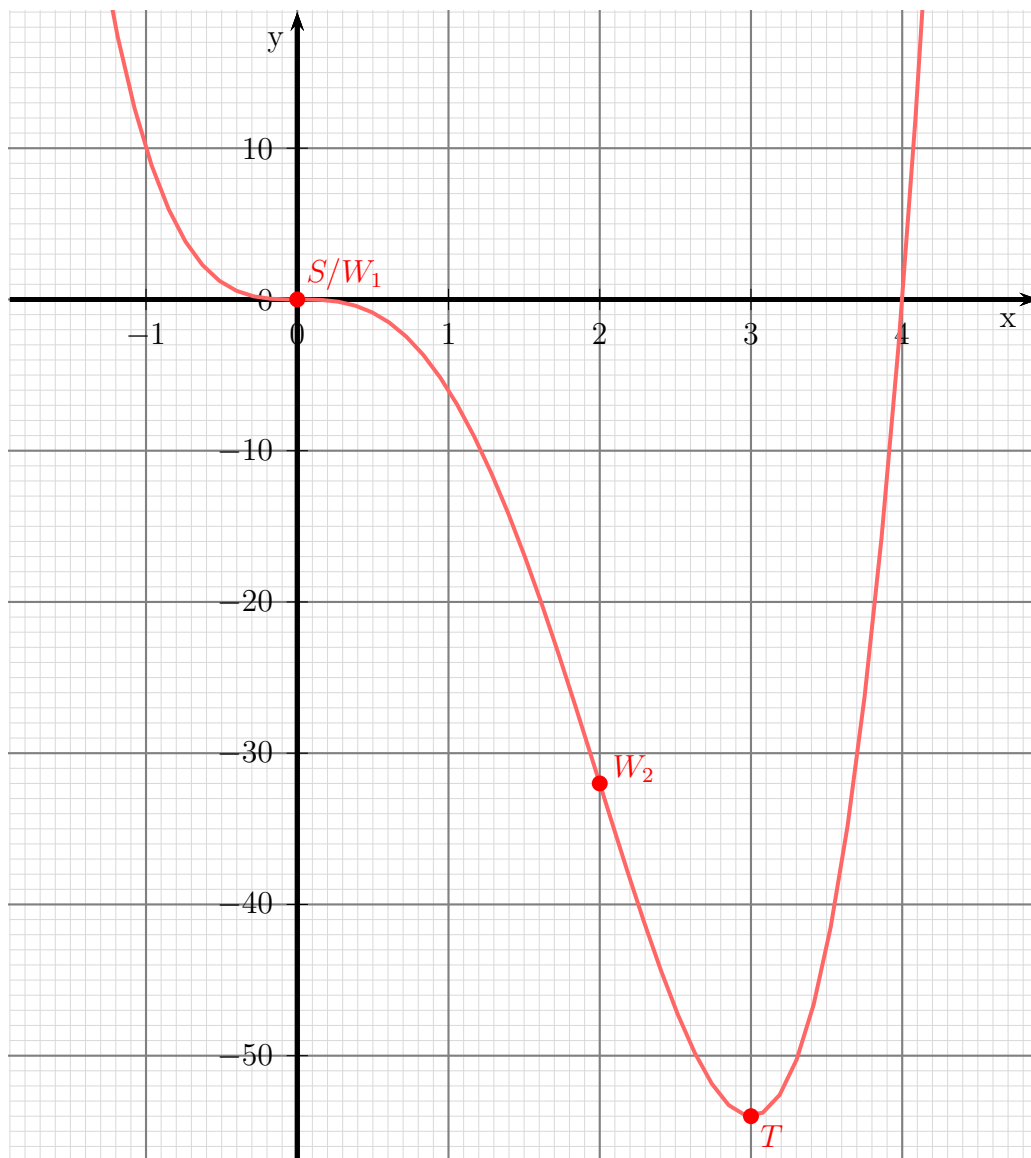
$$f'''(2) = 48 \cdot 2 - 48 = 48 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = 2 \quad (1)$$

Den y -Wert des Wendepunktes bestimmen wir durch Einsetzen von x_{W2} in die Grundfunktion $f(x)$.

$$y_{W2} = f(x_{W2}) = f(2) = 2 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 = -32$$

Damit können wir den Wendepunkt angeben: **Wendepunkt $W_2(2|-32)$** (1)

5. Skizze Hier ist der Funktionsgraph $f(x) = x^4 - 8x^3$ dargestellt: (4)



1.24 KURVENDI-24

Untersuchen Sie die nachfolgende Funktion – soweit vorhanden – auf:

- Definitionsbereich
- Polstellen und Lücken
- Nullstellen
- Extrema
- Wendepunkte

Skizzieren Sie auch den Funktionsgraphen!

$$f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

Lösung:

Definitionsbereich: Dazu Nenner auf Nullstellen untersuchen.

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 4 &= 0 \\x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} \\&= 2 \pm 0 \\x_1 &= 2\end{aligned}$$

Ergebnis: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Polstellen und Lücken:

$$Z(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x = 2$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}4x_0 - 4 &= 0 & | +4 \\4x_0 &= 4 & | :4 \\x_0 &= 1\end{aligned}$$

Extrema:

$$f(x) = \frac{4x - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\begin{aligned}u(x) &= 4x - 4 & \Rightarrow & u'(x) = 4 \\v(x) &= x^2 - 4x + 4 & \Rightarrow & u'(x) = 2x - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{4(x^2 - 4x + 4) - (4x - 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2} \\
&= \frac{4x^2 - 16x + 16 - 8x^2 + 16x + 8x - 16}{(x^2 - 4x + 4)^2} \\
&= \frac{-4x^2 + 8x}{(x^2 - 4x + 4)^2} \\
&= \frac{-4x \cdot (x - 2)}{(x - 2)^4} \\
f'(x) &= \frac{-4x}{(x - 2)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x) &= -4x & \Rightarrow & u'(x) = -4 \\
v(x) &= (x - 2)^3 & \Rightarrow & v'(x) = 1 \cdot 3 \cdot (x - 2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{-4 \cdot (x - 2)^3 + 4x \cdot 3 \cdot (x - 2)^2}{(x - 2)^6} \\
&= \frac{(-4 \cdot (x - 2) + 12x) \cdot (x - 2)^2}{(x - 2)^6} \\
&= \frac{-4 \cdot (x - 2) + 12x}{(x - 2)^4} \\
&= \frac{-4x + 8 + 12x}{(x - 2)^4} \\
f''(x) &= \frac{8x + 8}{(x - 2)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x_E) &= 0 \\
\frac{-4x_E}{(x_E - 2)^3} &= 0 \quad | \cdot (x_E - 2)^3 \\
-4x_E &= 0 \quad | : (-4) \\
x_E &= 0
\end{aligned}$$

$$f''(x_E) = \frac{8 \cdot 0 + 8}{(0 - 2)^4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_E = 0$$

$$y_E = f(x_E) = \frac{4 \cdot 0 - 4}{0^2 - 4 \cdot 0 + 4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Ergebnis: $T(0|-1)$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
 f''(x_W) &= 0 \\
 \frac{8x_W + 8}{(x_W - 2)^4} &= 0 & | \cdot (x_W - 2)^4 \\
 8x_W + 8 &= 0 & | - 8 \\
 8x_W &= -8 & | : 8 \\
 x_W &= -1
 \end{aligned}$$

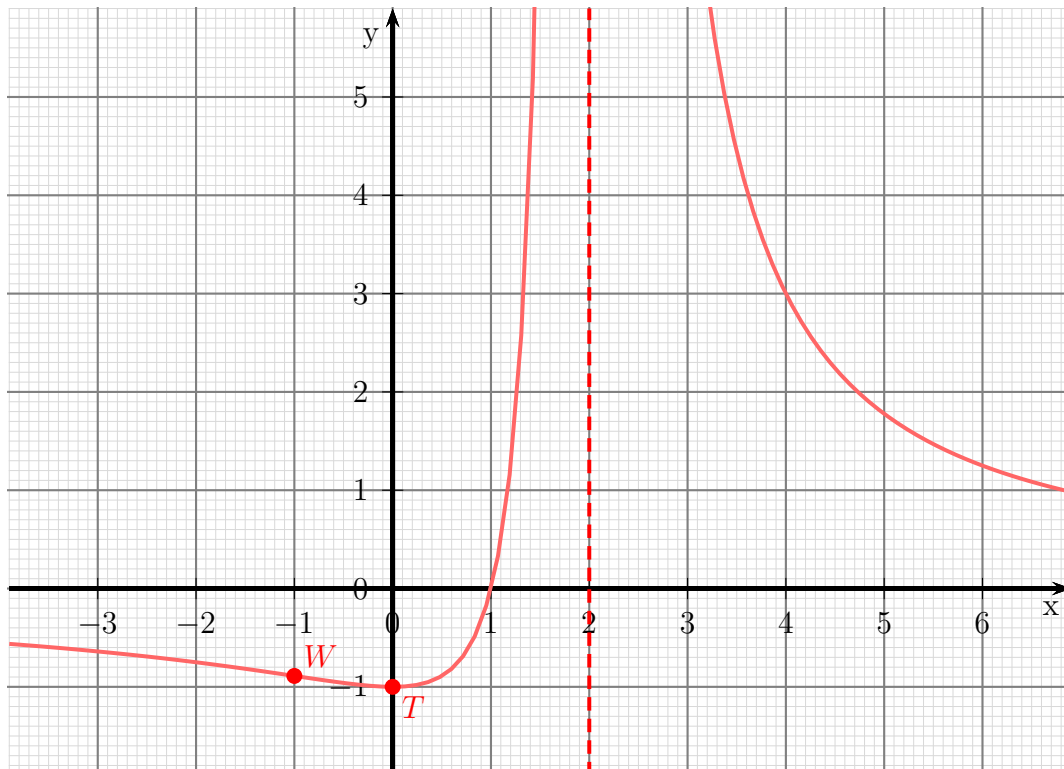
Prüfung auf Wendepunkt mit Vorzeichenwechselkriterium der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}
 f''(-2) &= \frac{8 \cdot (-2) + 8}{(-2 - 2)^4} = \frac{-8}{256} = -\frac{1}{32} < 0 \\
 f''(0) &= \frac{8 \cdot 0 + 8}{(0 - 2)^4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} > 0
 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ bei $x_W = -1 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_W = -1$.

$$y_W = f(x_W) = \frac{4 \cdot (-1) - 4}{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 4} = \frac{-8}{9} = -\frac{8}{9} \approx -0,889$$

Ergebnis: $W(-1 | -\frac{8}{9})$

Skizze:

1.25 KURVENDI-25

Untersuchen Sie die nachfolgende Funktion – soweit vorhanden – auf:

- Definitionsbereich
- Polstellen und Lücken
- Nullstellen
- Extrema
- Wendepunkte

Skizzieren Sie auch den Funktionsgraphen!

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 16x$$

Lösung:

Definitionsbereich: Keine Einschränkungen wegen Bruch o. ä., daher:

$$D = \mathbb{R}$$

Polstellen und Lücken: Weil es keine Einschränkungen im Definitionsbereich gibt, gibt es auch **keine Polstellen** und **keine Lücken**.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^3 + 12x^2 + 16x \\f'(x) &= 6x^2 + 24x + 16 \\f''(x) &= 12x + 24 \\f'''(x) &= 12\end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}f(x_0) &= 0 \\2x_0^3 + 12x_0^2 + 16x_0 &= 0 \\x_0 \cdot (2x_0^2 + 12x_0 + 16) &= 0 & \Rightarrow x_{01} = 0 \\2x_0^2 + 12x_0 + 16 &= 0 & | : 2 \\x_0^2 + 6x_0 + 8 &= 0 \\x_{02/03} &= -3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\&= -3 \pm 1 \\x_{02} = -3 + 1 = -2 & \quad x_{03} = -3 - 1 = -4\end{aligned}$$

$$x_{01} = 0$$

$$x_{02} = -4$$

$$x_{03} = -2$$

Extrema:

$$\begin{aligned}
f'(x_E) &= 0 \\
6x_E^2 + 24x_E + 16 &= 0 & | : 6 \\
x_E^2 + 4x_E + \frac{8}{3} &= 0 \\
x_{E1/2} &= -2 \pm \sqrt{2^2 - \frac{8}{3}} \\
&= -2 \pm \sqrt{\frac{12}{3} - \frac{8}{3}} \\
x_{E1/2} &= -2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \\
x_{E1} &= -2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx -0,8453 & x_{E2} &= -2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx -3,1547
\end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

$$f''(x_{E1}) = 12 \cdot \left(-2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 24 = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f''(x_{E2}) = 12 \cdot \left(-2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 24 = -\frac{8}{3} \cdot \sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Bestimmung der zugehörigen y -Werte:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = 2 \cdot \left(-2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + 12 \cdot \left(-2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 16 \cdot \left(-2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx -6,158$$

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = 2 \cdot \left(-2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + 12 \cdot \left(-2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 16 \cdot \left(-2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 6,158$$

$$T(-0,8453 | -6,158)$$

$$H(-3,1547 | 6,158)$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
f''(x_W) &= 0 \\
12x_W + 24 &= 0 & | - 24 \\
12x_W &= -24 & | : 12 \\
x_W &= -2
\end{aligned}$$

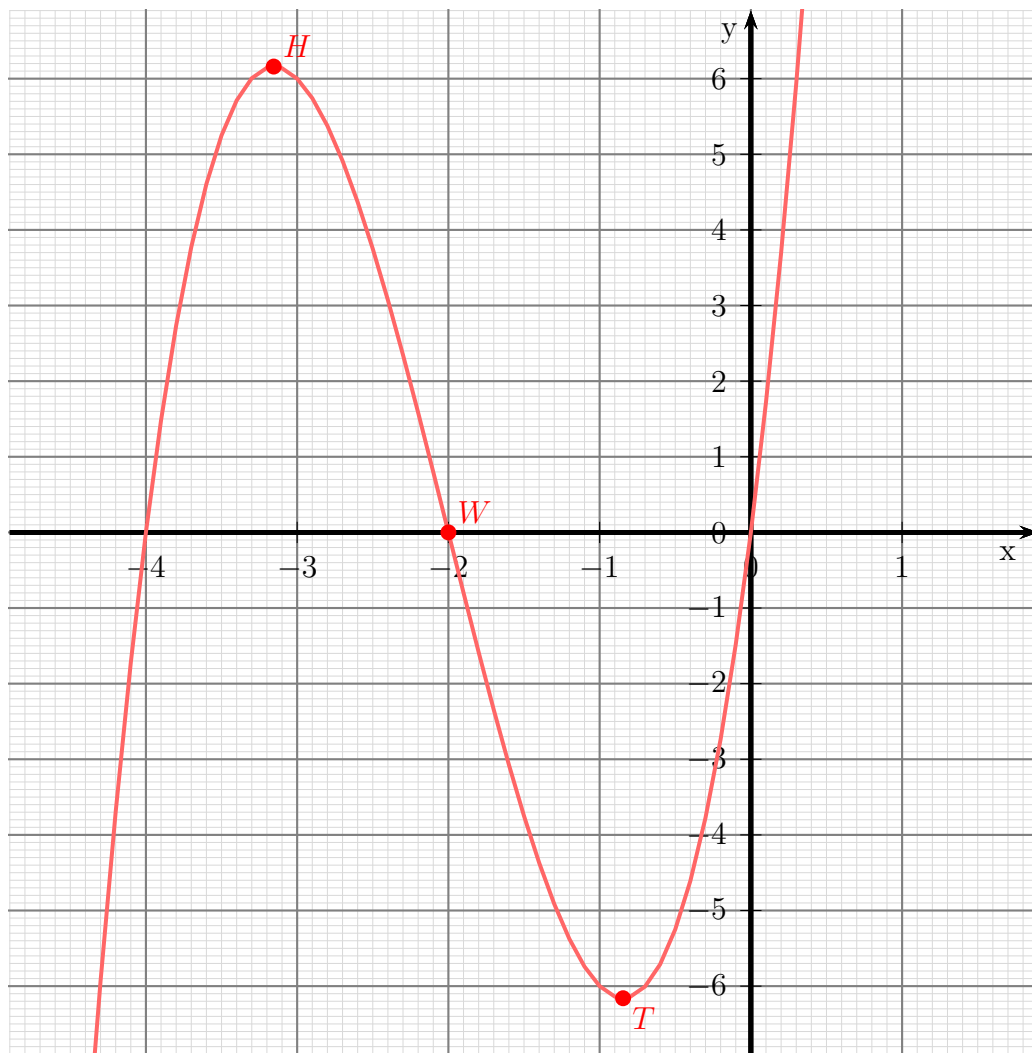
Prüfung mit dritter Ableitung:

$$f'''(x_W) = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_W = -2$$

$$y_W = f(x_W) = 2 \cdot (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot (-2) = 0$$

Wendepunkt: $W(-2 | 0)$

Skizze:



2 Ohne Wendestellen und Definitionsbereich

2.1 KURVENDI-51

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = 3x^2 - 21x + 30$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 3x_0^2 - 21x_0 + 30 &= 0 && | : 3 \\ x_0^2 - 7x_0 + 10 &= 0 \\ x_{01/02} &= -\left(-\frac{7}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}} \\ &= \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{01} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} &= 5 && x_{02} = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x_{01} = 5$ $x_{02} = 2$ (4)

2. Extrema:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 21x + 30 \\ f'(x) &= 6x - 21 && (3) \\ f''(x) &= 6 && (3) \\ f'(x_E) &= 0 \\ 6x_E - 21 &= 0 && | + 21 \\ 6x_E &= 21 && | : 6 \\ x_E &= \frac{7}{2} && (\text{oder: } x_E = 3,5) \quad (3) \end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

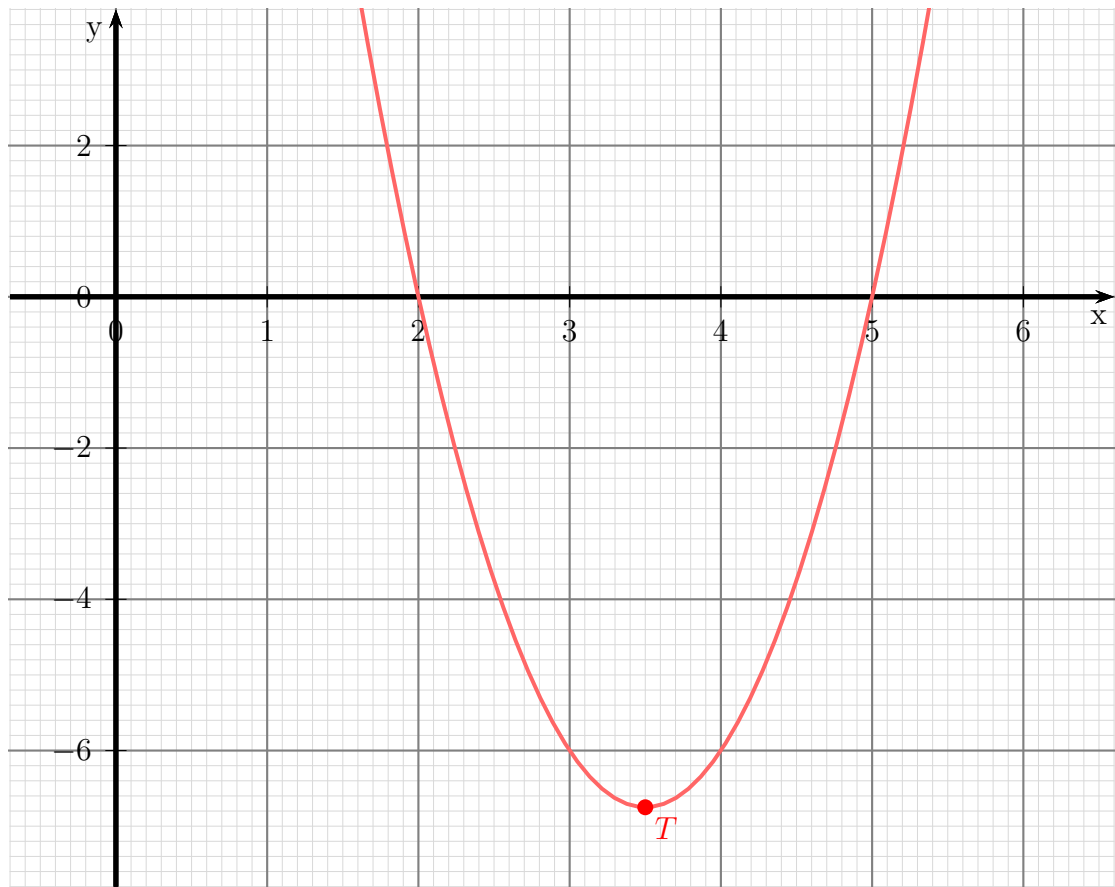
$$f''(x_E) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_E = \frac{7}{2} \quad (1)$$

Bestimmung des zugehörigen y -Wertes:

$$y_E = f(x_E) = 3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 21 \cdot \frac{7}{2} + 30 = -\frac{27}{4} = -6,75 \quad (1)$$

$$T\left(\frac{7}{2} \mid -\frac{27}{4}\right) \text{ oder } T(3,5 \mid -6,75) \quad (1)$$

3. Skizze: (4)



2.2 KURVENDI-52

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = -2x^2 - 2x + 12$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -2x_0^2 - 2x_0 + 12 &= 0 & | : (-2) \\ x_0^2 + x_0 - 6 &= 0 \\ x_{01/02} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\ x_{01} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} &= 2 & x_{02} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x_{01} = 2$ $x_{02} = -3$ (4)

2. Extrema:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 - 2x + 12 \\ f'(x) &= -4x - 2 & (3) \\ f''(x) &= -4 & (3) \\ f'(x_E) &= 0 \\ -4x_E - 2 &= 0 & | + 2 \\ -4x_E &= 2 & | : (-4) \\ x_E &= -\frac{1}{2} \quad (\text{oder } x_E = -0,5) & (3) \end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

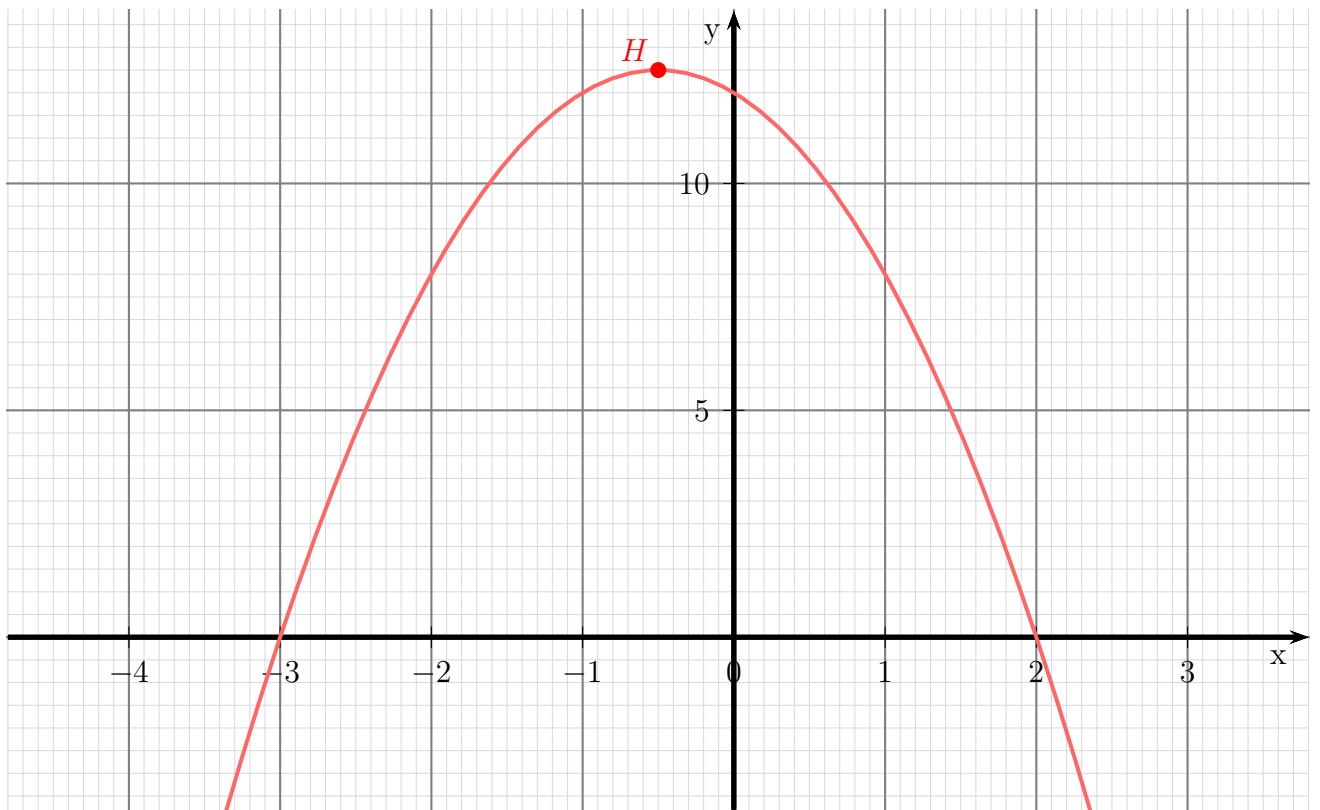
$$f''(x_E) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_E = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

Bestimmung des zugehörigen y -Wertes:

$$y_E = f(x_E) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 12 = \frac{25}{2} = 12,5 \quad (1)$$

$$H\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{25}{2}\right) \quad \text{oder} \quad H(-0,5 \mid 12,5) \quad (1)$$

3. Skizze: (4)



2.3 KURVENDI-60

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0^3 + 15x_0^2 + 36x_0 &= 0 && | : 2 \\ x_0^3 + \frac{15}{2}x_0^2 + 18x_0 &= 0 && | x_E \text{ ausklammern} \\ x_0 \cdot (x_0^2 + \frac{15}{2}x_0 + 18) &= 0 && \Rightarrow x_{01} = 0 \\ x_0^2 + \frac{15}{2}x_0 + 18 &= 0 \\ x_{02/03} &= -\frac{15}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 18} \\ &= -\frac{15}{4} \pm \sqrt{\frac{225}{16} - \frac{288}{16}} \\ &= -\frac{15}{4} \pm \sqrt{-\frac{63}{16}} && \Rightarrow \text{keine weiteren Nullstellen} \end{aligned}$$

Ergebnis: $x_0 = 0$ (4)

2. Extrema:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 15x^2 + 36x \\ f'(x) &= 6x^2 + 30x + 36 && (2) \\ f''(x) &= 12x + 30 && (2) \\ f'(x_E) &= 0 \\ 6x_E^2 + 30x_E + 36 &= 0 && | : 6 \\ x_E^2 + 5x_E + 6 &= 0 \\ x_{E1/2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_{E1} &= -2 && x_{E2} = -3 && (4) \end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

$$f''(x_{E1}) = 12 \cdot (-2) + 30 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = -2 \quad (1)$$

$$f''(x_{E2}) = 12 \cdot (-3) + 30 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = -3 \quad (1)$$

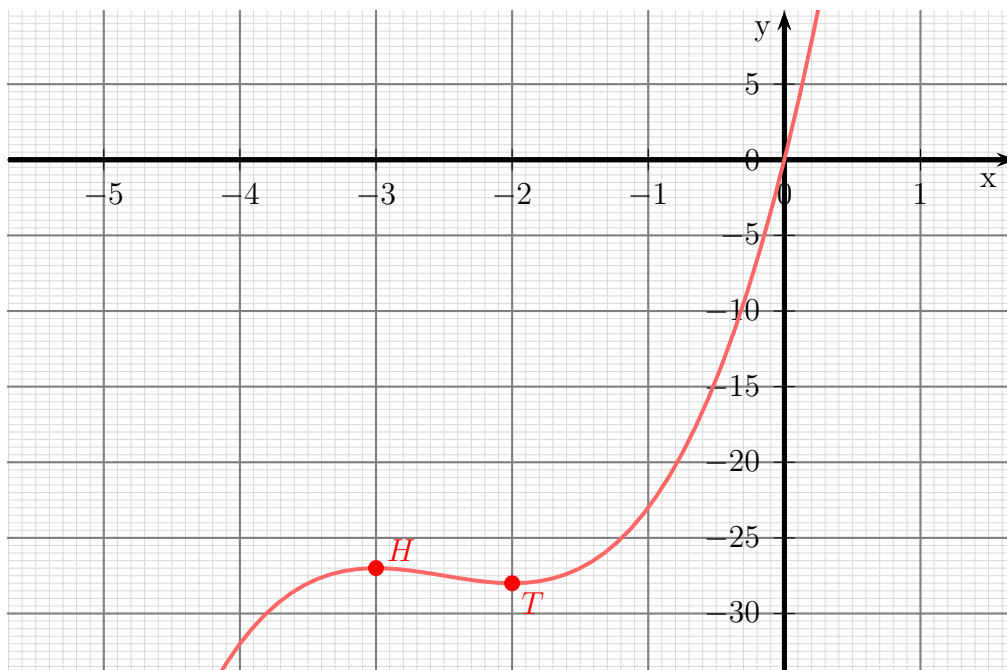
Bestimmung der zugehörigen y -Werte:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = 2 \cdot (-2)^3 + 15 \cdot (-2)^2 + 36 \cdot (-2) = -28 \quad (1)$$

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = 2 \cdot (-3)^3 + 15 \cdot (-3)^2 + 36 \cdot (-3) = -27 \quad (1)$$

$$\boxed{T(-2 | -28)} \quad \boxed{H(-3 | -26)} \quad (1)$$

3. Skizze: (3)



2.4 KURVENDI-61

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^3 + 6x_0^2 + 9x_0 &= 0 && | \ x_0 \text{ ausklammern} \\ x_0 \cdot (x_0^2 + 6x_0 + 9) &= 0 && \Rightarrow x_{01} = 0 \\ x_0^2 + 6x_0 + 9 &= 0 \\ x_{02/03} &= -3 \pm \sqrt{3^2 - 9} \\ x_{02} &= -3 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x_{01} = 0 \quad x_{02} = -3$ (4)

2. Extrema:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 6x^2 + 9x \\ f'(x) &= 3x^2 + 12x + 9 \quad (2) \\ f''(x) &= 6x + 12 \quad (2) \\ f'(x_E) &= 0 \\ 3x_E^2 + 12x_E + 9 &= 0 && | :3 \\ x_E^2 + 4x_E + 3 &= 0 \\ x_{E1/2} &= -2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ &= -2 \pm 1 \\ x_{E1} = -2 + 1 = -1 & \quad x_{E2} = -2 - 1 = -3 \quad (4) \end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

$$f''(x_{E1}) = 6 \cdot (-1) + 12 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = -1 \quad (1)$$

$$f''(x_{E2}) = 6 \cdot (-3) + 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = -3 \quad (1)$$

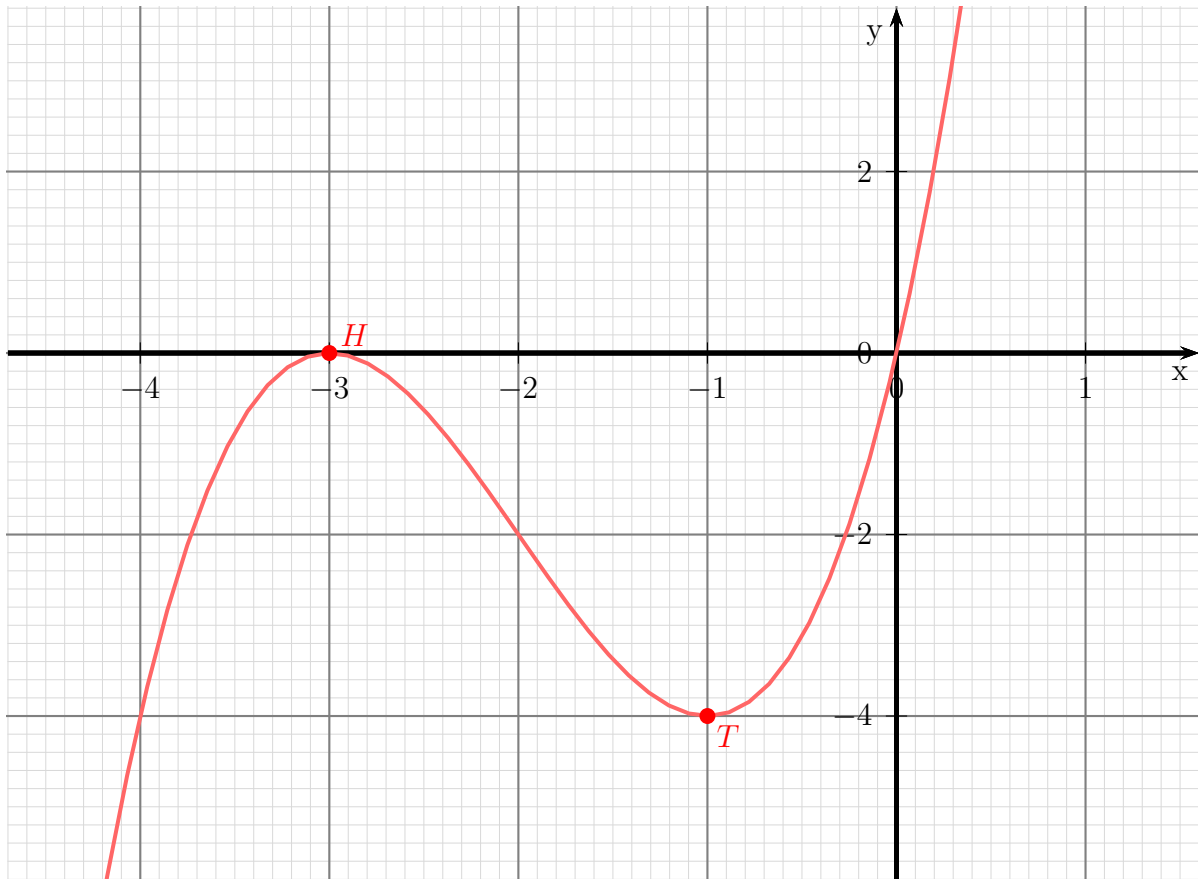
Bestimmung der zugehörigen y -Werte:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) = -4 \quad (1)$$

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) = 0 \quad (1)$$

$$\boxed{T(-1|-4)} \quad \boxed{H(-3|0)} \quad (1)$$

3. Skizze: (3)



2.5 KURVENDI-62

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 6x$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -\frac{1}{2}x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 &= 0 && | \cdot (-2) \\ x_0^3 - 6x_0^2 + 12x_0 &= 0 && | x_0 \text{ ausklammern} \\ x_0 \cdot (x_0^2 - 6x_0 + 12) &= 0 && \Rightarrow x_{01} = 0 \\ x_0^2 - 6x_0 + 12 &= 0 \\ x_{02/03} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 12} \\ x_{02/03} &= 3 \pm \sqrt{-3} && \Rightarrow \text{keine weiteren Nullstellen} \end{aligned}$$

Ergebnis: $x_0 = 0$ (4)

2. Extrema:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 6x \\ f'(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6 && (2) \\ f''(x) &= -3x + 6 && (2) \\ f'(x_E) &= 0 \\ -\frac{3}{2}x_E^2 + 6x_E - 6 &= 0 && | \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ x_E^2 - 4x_E + 4 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} \\ x_E &= 2 && (4) \end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

$$f''(x_E) = -3 \cdot 2 + 6 = 0 \Rightarrow \text{keine Aussage möglich!} \quad (1)$$

Prüfung mit Vorzeichenwechselkriterium:

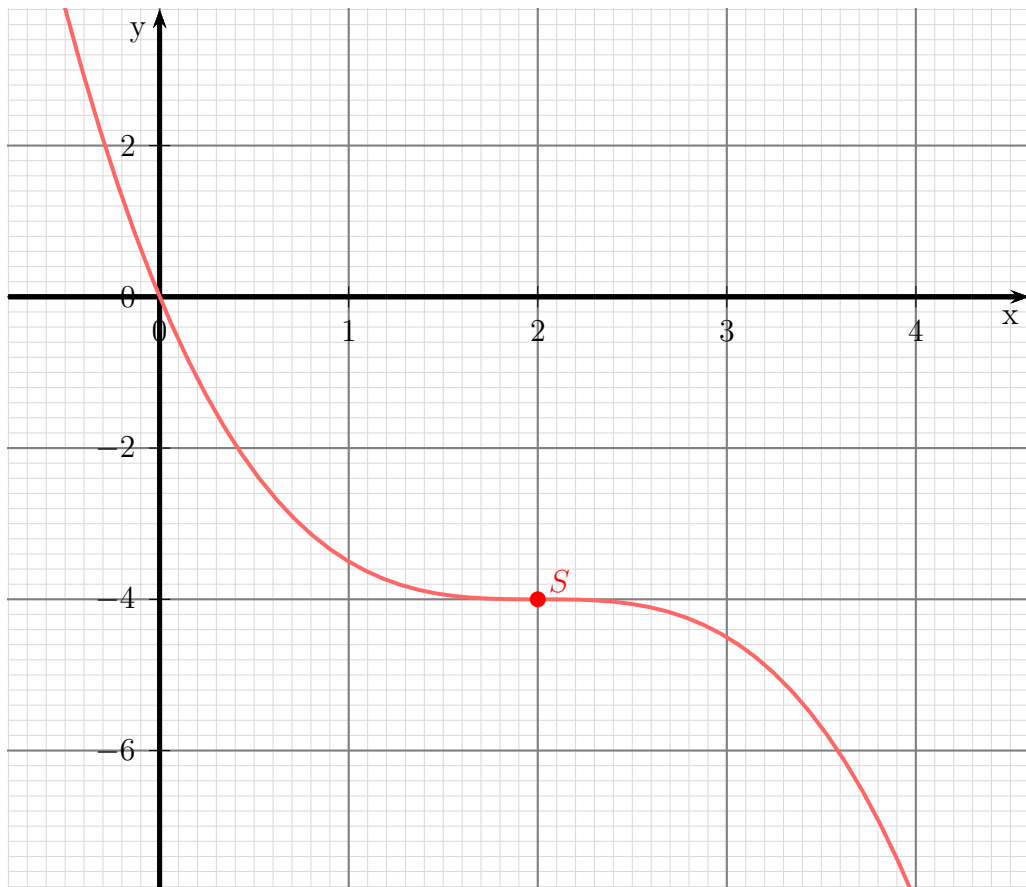
$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1) = -\frac{3}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 6 = -\frac{3}{2} < 0 \\ f'(3) = -\frac{3}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 6 = -\frac{3}{2} < 0 \end{array} \right\} \text{kein Vorzeichenwechsel} \Rightarrow \text{Sattelpunkt bei } x_E = 2 \quad (2)$$

Bestimmung des zugehörigen y -Wertes:

$$y_E = f(x_E) = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = -4 \quad (1)$$

Sattelpunkt $S(2 | -4)$ (1)

3. Skizze: (3)



2.6 KURVENDI-63

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 - x$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

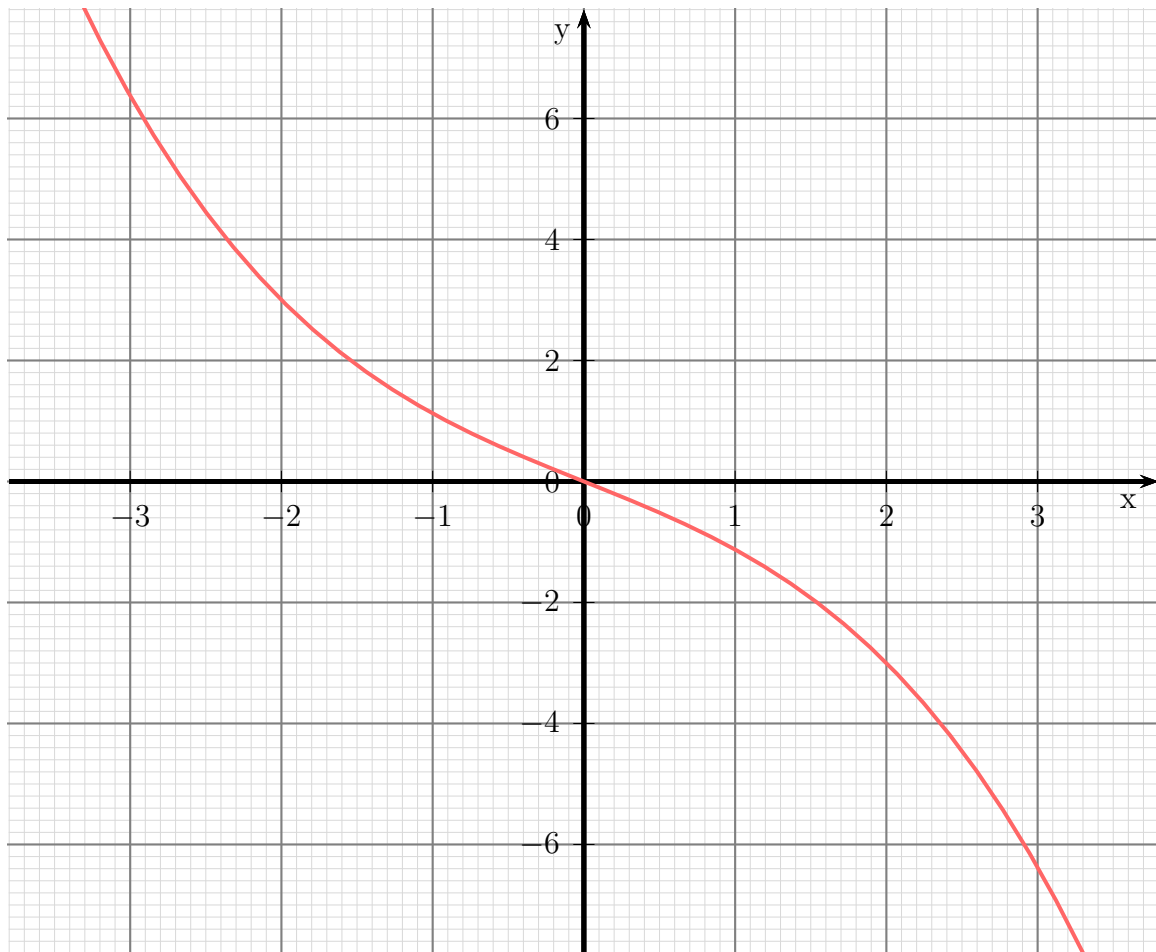
$$\begin{array}{rcll} f x_0 & = & 0 & \\ -\frac{1}{8}x_0^3 - x_0 & = & 0 & | \cdot (-8) \\ x_0^3 + 8x_0 & = & 0 & | x_0 \text{ ausklammern} \\ x_0 \cdot (x_0^2 + 8) & = & 0 & \Rightarrow x_{01} = 0 \\ x_0^2 + 8 & = & 0 & | -8 \\ x_0^2 & = & -8 & | \sqrt{} \\ x_{02/3} & = & \pm\sqrt{-8} & \Rightarrow \text{keine weiteren Nullstellen} \end{array}$$

Ergebnis: $x_0 = 0$ (6)

2. Extrema:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & -\frac{1}{8}x^3 - x & \\ f'(x) & = & -\frac{3}{8}x^2 - 1 & (2) \\ f''(x) & = & -\frac{3}{4}x & (2) \\ f'(x_E) & = & 0 & \\ -\frac{3}{8}x_E^2 - 1 & = & 0 & | \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \\ x_E^2 + \frac{8}{3} & = & 0 & | -\frac{8}{3} \\ x_E^2 & = & -\frac{8}{3} & | \sqrt{} \\ x_{E1/2} & = & \pm\sqrt{-\frac{8}{3}} & \Rightarrow \text{keine Extrema} \quad (5) \end{array}$$

3. Skizze: (5)



2.7 KURVENDI-64

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

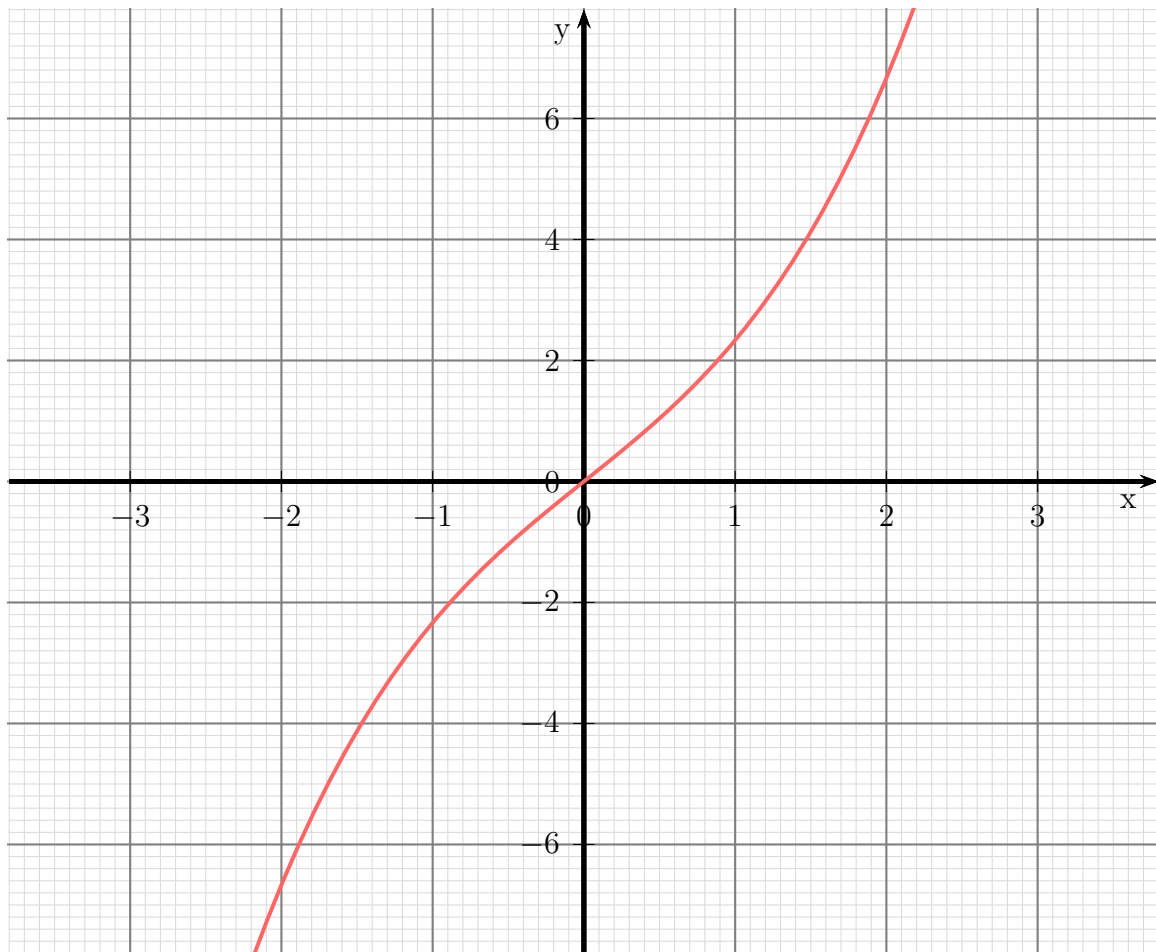
$$\begin{array}{rcll} f x_0 & = & 0 & \\ \frac{1}{3}x_0^3 + 2x_0 & = & 0 & | \cdot 3 \\ x_0^3 + 6x_0 & = & 0 & | x_0 \text{ ausklammern} \\ x_0 \cdot (x_0^2 + 6) & = & 0 & \Rightarrow x_{01} = 0 \\ x_0^2 + 6 & = & 0 & | -6 \\ x_0^2 & = & -6 & | \sqrt{} \\ x_{02/3} & = & \pm\sqrt{-6} & \Rightarrow \text{keine weiteren Nullstellen} \end{array}$$

Ergebnis: $x_0 = 0$ (6)

2. Extrema:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & \frac{1}{3}x^3 + 2x & \\ f'(x) & = & x^2 + 2 & (2) \\ f''(x) & = & 2x & (2) \\ f'(x_E) & = & 0 & \\ x_E^2 + 2 & = & 0 & | -2 \\ x_E^2 & = & -2 & | \sqrt{} \\ x_{E1/2} & = & \pm\sqrt{-2} & \Rightarrow \text{keine Extrema} \quad (5) \end{array}$$

3. Skizze: (5)



2.8 KURVENDI-70

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^4 - 8x_0^2 - 9 &= 0 & | \text{ Substitution: } x_0^2 = z \\ z^2 - 8z - 9 &= 0 \\ z_{1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 + 9} \\ &= 4 \pm 5 \\ z_1 = 4 + 5 = 9 & \quad z_2 = 4 - 5 = -1 & | \text{ zurück substituieren} \\ x_{01/02}^2 &= 9 & | \sqrt{} \\ x_{01/02} &= \pm 3 \\ x_{01} = 3 & \quad x_{02} = -3 \\ x_{03/04}^2 &= -1 & | \sqrt{} \\ x_{03/04} &= \pm \sqrt{-1} & \Rightarrow \text{ keine weiteren Lösungen} \end{aligned}$$

Ergebnis: $x_{01} = 3 \quad x_{02} = -3$ (3)

2. Extrema:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 8x^2 - 9 \\ f'(x) &= 4x^3 - 16x & (2) \\ f''(x) &= 12x^2 - 16 & (2) \\ f'(x_E) &= 0 \\ 4x_E^3 - 16x_E &= 0 & | : 4 \\ x_E^3 - 4x_E &= 0 & | x_E \text{ ausklammern} \\ x_E \cdot (x_E^2 - 4) &= 0 & \Rightarrow x_{E1} = 0 \\ x_{E2/3}^2 - 4 &= 0 & | + 4 \\ x_{E2/3}^2 &= 4 & | \sqrt{} \\ x_{E2/3} &= \pm 2 \\ x_{E2} = 2 & \quad x_{E3} = -2 & (3) \end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

$$f''(x_{E1}) = 12 \cdot 0^2 - 16 = -16 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_{E1} = 0 \quad (1)$$

$$f''(x_{E2}) = 12 \cdot 2^2 - 16 = 32 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E2} = 2 \quad (1)$$

$$f''(x_{E3}) = 12 \cdot (-2)^2 - 16 = 32 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E3} = -2 \quad (1)$$

Bestimmung der zugehörigen y -Werte:

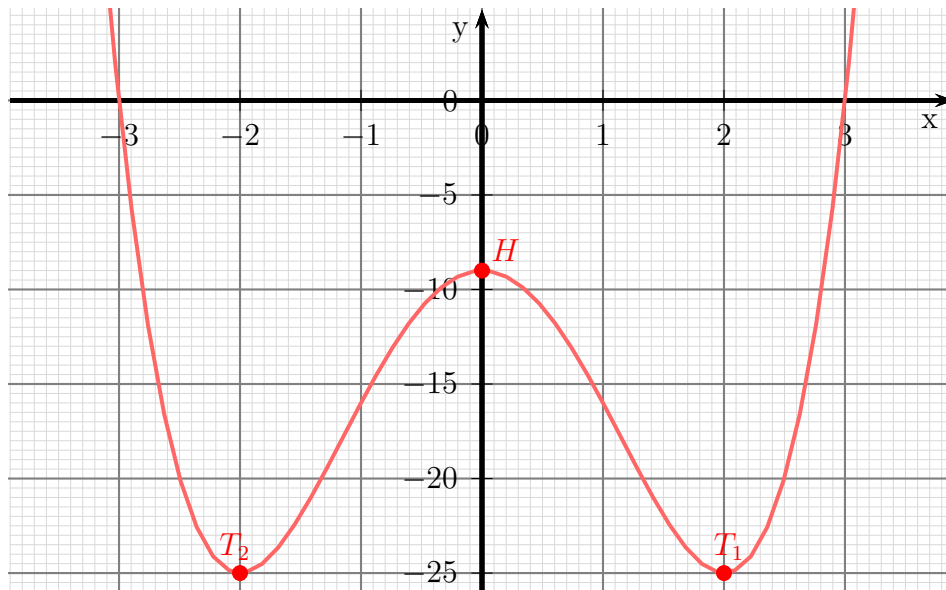
$$y_{E1} = f(x_{E1}) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9 \quad (1)$$

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 - 9 = -25 \quad (1)$$

$$y_{E3} = f(x_{E2}) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 - 9 = -25 \quad (1)$$

$$\boxed{H(0|-9)} \quad \boxed{T_1(2|-25)} \quad \boxed{T_2(-2|-25)} \quad (1)$$

3. Skizze: (3)



2.9 KURVENDI-71

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 16$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0^4 - 4x_0^2 - 16 &= 0 && | : 2 \\ x_0^4 - 2x_0^2 - 8 &= 0 && | \text{ Substitution: } x_0^2 = z \\ z^2 - 2z - 8 &= 0 \\ z_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1+8} \\ &= 1 \pm 3 \\ z_1 = 1 + 3 = 4 & \quad z_2 = 1 - 3 = -2 && | \text{ zurück substituieren} \\ x_{01/02}^2 &= 4 && | \sqrt{} \\ x_{01/02} &= \pm 2 \\ x_{01} = 2 & \quad x_{02} = -2 \\ x_{03/04}^2 &= -2 && | \sqrt{} \\ x_{03/04} &= \pm \sqrt{-2} && \Rightarrow \text{ keine weiteren Lösungen} \end{aligned}$$

Ergebnis: $x_{01} = 2 \quad x_{02} = -2$ (3)

2. Extrema:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x^2 - 16 \\ f'(x) &= 8x^3 - 8x && (2) \\ f''(x) &= 24x^2 - 8 && (2) \\ f'(x_E) &= 0 \\ 8x_E^3 - 8x_E &= 0 && | : 8 \\ x_E^3 - x_E &= 0 && | x_E \text{ ausklammern} \\ x_E \cdot (x_E^2 - 1) &= 0 && \Rightarrow x_{E1} = 0 \\ x_{E2/3}^2 - 1 &= 0 && | + 1 \\ x_{E2/3}^2 &= 1 && | \sqrt{} \\ x_{E2/3} &= \pm 1 \\ x_{E2} = 1 & \quad x_{E3} = -1 && (3) \end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

$$f''(x_{E1}) = 24 \cdot 0^2 - 8 = -8 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_{E1} = 0 \quad (1)$$

$$f''(x_{E2}) = 24 \cdot 1^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E2} = 1 \quad (1)$$

$$f''(x_{E3}) = 24 \cdot (-1)^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E3} = -1 \quad (1)$$

Bestimmung der zugehörigen y -Werte:

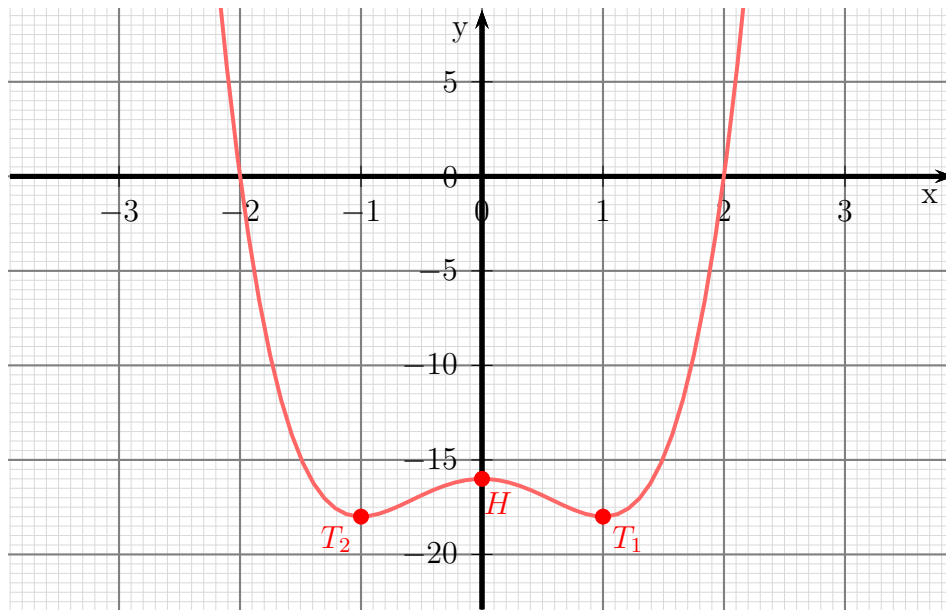
$$y_{E1} = f(x_{E1}) = 2 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0^2 - 16 = -16 \quad (1)$$

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = 2 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^2 - 16 = -18 \quad (1)$$

$$y_{E3} = f(x_{E2}) = 2 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^2 - 16 = -18 \quad (1)$$

$$\boxed{H(0|-16)} \quad \boxed{T_1(1|-18)} \quad \boxed{T_2(-1|-18)} \quad (1)$$

3. Skizze: (3)



2.10 KURVENDI-72

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0^4 - 8x_0^3 + 8x_0^2 &= 0 & | : 2 \\ x_0^4 - 4x_0^3 + 4x_0^2 &= 0 & | x_0^2 \text{ ausklammern} \\ x_0^2 \cdot (x_0^2 - 4x_0 + 4) &= 0 & \Rightarrow x_{01} = 0 \\ x_0^2 - 4x_0 + 4 &= 0 \\ x_{02/03} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} \\ x_{02} &= 2 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x_{01} = 0 \quad x_{02} = 2$ (3)

2. Extrema:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 \\ f'(x) &= 8x^3 - 24x^2 + 16x & (2) \\ f''(x) &= 24x^2 - 48x + 16 & (2) \\ f'(x_E) &= 0 \\ 8x_E^3 - 24x_E^2 + 16x_E &= 0 & | : 8 \\ x_E^3 - 3x_E^2 + 2x_E &= 0 & | x_E \text{ ausklammern} \\ x_E \cdot (x_E^2 - 3x_E + 2) &= 0 & \Rightarrow x_{E1} = 0 \\ x_{E2/3}^2 - 3x_{E2/3} + 2 &= 0 \\ x_{E2/3} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} \\ x_{E2/3} &= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_{E2} &= 2 \quad x_{E3} = 1 & (3) \end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

$$f''(x_{E1}) = 24 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 16 = 16 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 0 \quad (1)$$

$$f''(x_{E2}) = 24 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 16 = 16 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E2} = 2 \quad (1)$$

$$f''(x_{E3}) = 24 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 16 = -8 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_{E3} = 1 \quad (1)$$

Bestimmung der zugehörigen y -Werte:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = 2 \cdot 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0^2 = 0 \quad (1)$$

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = 2 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2 = 0 \quad (1)$$

$$y_{E3} = f(x_{E3}) = 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2 = 2 \quad (1)$$

$$\boxed{T_1(0|0)} \quad \boxed{T_2(2|0)} \quad \boxed{H(1|2)} \quad (1)$$

3. Skizze: (3)

