

Musterlösungen der Aufgaben unter KOMPLEX.WT

Inhaltsverzeichnis

0.1	KOMPLEX-01	4
0.2	KOMPLEX-02	5
0.3	KOMPLEX-03	6
0.4	KOMPLEX-04	7
0.5	KOMPLEX-05	8
0.6	KOMPLEX-06	9
0.7	KOMPLEX-07	10
0.8	KOMPLEX-08	11
0.9	KOMPLEX-09	12
0.10	KOMPLEX-10	13
0.11	KOMPLEX-11	14
0.12	KOMPLEX-12	15
0.13	KOMPLEX-13	16
0.14	KOMPLEX-14	17
0.15	KOMPLEX-15	18
0.16	KOMPLEX-16	19
0.17	KOMPLEX-17	20
0.18	KOMPLEX-18	22
0.19	KOMPLEX-19	23
0.20	KOMPLEX-20	24
0.21	KOMPLEX-21	25
0.22	KOMPLEX-21a	26
0.23	KOMPLEX-22	28
0.24	KOMPLEX-22a	29
0.25	KOMPLEX-23	31
0.26	KOMPLEX-24	33
0.27	KOMPLEX-25	35
0.28	KOMPLEX-26	37
0.29	KOMPLEX-27	39
0.30	KOMPLEX-28	41
0.31	KOMPLEX-29	43
0.32	KOMPLEX-29a	45
0.33	KOMPLEX-30	47
0.34	KOMPLEX-30a	49
0.35	KOMPLEX-31	52
0.36	KOMPLEX-31a	54
0.37	KOMPLEX-31b	56
0.38	KOMPLEX-32	58
0.39	KOMPLEX-33	60

0.40	KOMPLEX-33b	62
0.41	KOMPLEX-34	64
0.42	KOMPLEX-35	65
0.43	KOMPLEX-36	66
0.44	KOMPLEX-37	67
0.45	KOMPLEX-38	69
0.46	KOMPLEX-39	70
0.47	KOMPLEX-40	71
0.48	KOMPLEX-41	72
0.49	KOMPLEX-42	73
0.50	KOMPLEX-43	74
0.51	KOMPLEX-44	75
0.52	KOMPLEX-45	76
0.53	KOMPLEX-46	77
0.54	KOMPLEX-47	78
0.55	KOMPLEX-48	79
0.56	KOMPLEX-49	80
0.57	KOMPLEX-50	81
0.58	KOMPLEX-51	82
0.59	KOMPLEX-52	83
0.60	KOMPLEX-53	84
0.61	KOMPLEX-54	86
0.62	KOMPLEX-55	88
0.63	KOMPLEX-56	90
0.64	KOMPLEX-57	92
0.65	KOMPLEX-58	93
0.66	KOMPLEX-59	94
0.67	KOMPLEX-60	96
0.68	KOMPLEX-61	97
0.69	KOMPLEX-62	98
0.70	KOMPLEX-63	99
0.71	KOMPLEX-64	100
0.72	KOMPLEX-65	101
0.73	KOMPLEX-66	102
0.74	KOMPLEX-67	103
0.75	KOMPLEX-68a	104
0.76	KOMPLEX-68b	106
0.77	KOMPLEX-70	108
0.78	KOMPLEX-71	109
0.79	KOMPLEX-72	110
0.80	KOMPLEX-73	118
0.81	KOMPLEX-74	119
0.82	KOMPLEX-75	120
0.83	KOMPLEX-76	121

0.84	KOMPLEX-77	122
0.85	KOMPLEX-78	123
0.86	KOMPLEX-79	124
0.87	KOMPLEX-80	125
0.88	KOMPLEX-81	126
0.89	KOMPLEX-82	127

Aufgabensammlung

0.1 KOMPLEX-01

Zerlegen Sie \underline{z} in Realteil und Imaginärteil und bestimmen Sie den Betrag und das Argument von \underline{z} !

$$\underline{z} = \frac{(11 + j3) \cdot (3 - j4)}{(3 + j2) \cdot (j - 3)}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\underline{z} &= \frac{(11 + j3) \cdot (3 - j4)}{(3 + j2) \cdot (j - 3)} \\&= \frac{33 - j44 + j9 + 12}{j3 - 9 - 2 - j6} \\&= \frac{45 - j35}{-11 - j3} \quad (5) \\&= \frac{(45 - j35) \cdot (-11 + j3)}{(-11 - j3) \cdot (-11 + j3)} \\&= \frac{-495 + j135 + 105 + j385}{121 + 9} \quad (5) \\&= \frac{-390 + j520}{130} \\&= -\frac{390}{130} + j\frac{520}{130} \\ \underline{z} &= -3 + j4 \\ \operatorname{Re}\underline{z} &= -3 \quad \operatorname{Im}\underline{z} = 4 \quad (4)\end{aligned}$$

$$|\underline{z}| = z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{z})^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad (3)$$

Es ist $\operatorname{Re}\underline{z} < 0$. Deshalb muss in der Formel zur Bestimmung des Argumentes 180° addiert werden.

$$\arg \underline{z} = \arctan \frac{\operatorname{Im}\underline{z}}{\operatorname{Re}\underline{z}} + 180^\circ = \arctan \frac{4}{-3} + 180^\circ \approx -53,13^\circ + 180^\circ = 126,87^\circ \quad (3)$$

0.2 KOMPLEX-02

Zerlegen Sie \underline{z} in Realteil und Imaginärteil und bestimmen Sie den Betrag und das Argument von \underline{z} !

$$\underline{z} = \frac{(9 + j8) \cdot (5 - j12)}{(2 + j5) \cdot (j - 2)}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\underline{z} &= \frac{(9 + j8) \cdot (5 - j12)}{(2 + j5) \cdot (j - 2)} \\&= \frac{45 - j108 + j40 + 96}{j^2 - 4 - 5 - j10} \\&= \frac{141 - j68}{-9 - j8} \quad (5) \\&= \frac{(141 - j68) \cdot (-9 + j8)}{(-9 - j8) \cdot (-9 + j8)} \\&= \frac{-1269 + j1128 + j612 + 544}{81 + 64} \quad (5) \\&= \frac{-725 + j1740}{145} \\&= -\frac{725}{145} + j\frac{1740}{145} \\ \underline{z} &= -5 + j12 \\ \operatorname{Re}\underline{z} &= -5 \quad \operatorname{Im}\underline{z} = 12 \quad (4)\end{aligned}$$

$$|\underline{z}| = z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{z})^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \quad (3)$$

Es ist $\operatorname{Re}\underline{z} < 0$. Deshalb muss in der Formel zur Bestimmung des Argumentes 180° addiert werden.

$$\arg \underline{z} = \arctan \frac{\operatorname{Im}\underline{z}}{\operatorname{Re}\underline{z}} + 180^\circ = \arctan \frac{12}{-5} + 180^\circ \approx -67,38^\circ + 180^\circ = 112,62^\circ \quad (3)$$

0.3 KOMPLEX-03

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$5 + 4\underline{x} - j6\underline{x} - j9 = \underline{x} - 13 - j48$$

Lösung:

$$5 + 4\underline{x} - j6\underline{x} - j9 = \underline{x} - 13 - j48 \quad | -5 + j9 - \underline{x}$$

$$3\underline{x} - j6\underline{x} = -18 - j39$$

$$\underline{x} \cdot (3 - j6) = -18 - j39 \quad | : (3 - j6)$$

$$\underline{x} = \frac{-18 - j39}{3 - j6} \quad (6)$$

$$= \frac{(-18 - j39) \cdot (3 + j6)}{(3 - j6) \cdot (3 + j6)}$$

$$= \frac{-54 - j108 - j117 + 234}{9 + 36} \quad (8)$$

$$= \frac{180 - j225}{45}$$

$$= \frac{180}{45} - j\frac{225}{45}$$

$$\underline{x} = 4 - j5$$

$$L = \{4 - j5\} \quad (6)$$

0.4 KOMPLEX-04

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$7 + 6\underline{x} - j3\underline{x} - j9 = \underline{x} + 20 - j44$$

Lösung:

$$7 + 6\underline{x} - j3\underline{x} - j9 = \underline{x} + 20 - j44 \quad | - 7 + j9 - \underline{x}$$

$$5\underline{x} - j3\underline{x} = 13 - j35$$

$$\underline{x} \cdot (5 - j3) = 13 - j35 \quad | : (5 - j3)$$

$$\underline{x} = \frac{13 - j35}{5 - j3} \quad (6)$$

$$= \frac{(13 - j35) \cdot (5 + j3)}{(5 - j3) \cdot (5 + j3)}$$

$$= \frac{65 + j39 - j175 + 105}{25 + 9} \quad (8)$$

$$= \frac{170 - j136}{34}$$

$$= \frac{170}{34} - j \frac{136}{34}$$

$$\underline{x} = 5 - j4$$

$$L = \{5 - j4\} \quad (6)$$

0.5 KOMPLEX-05

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$(1 - j2)(2\underline{x} + j3\underline{x}) + 2 = (3 - j4)(\underline{x} + 5) + j21$$

Lösung:

$$(1 - j2)(2\underline{x} + j3\underline{x}) + 2 = (3 - j4)(\underline{x} + 5) + j21$$

$$2\underline{x} + j3\underline{x} - j4\underline{x} + 6\underline{x} + 2 = 3\underline{x} + 15 - j4\underline{x} - j20 + j21$$

$$8\underline{x} - j\underline{x} + 2 = 3\underline{x} + 15 - j4\underline{x} + j \quad | -2 - 3\underline{x} + j4\underline{x}$$

$$5\underline{x} + j3\underline{x} = 13 + j \quad (5)$$

$$\underline{x} \cdot (5 + j3) = 13 + j \quad | : (5 + j3)$$

$$\underline{x} = \frac{13 + j}{5 + j3} \quad (5)$$

$$= \frac{(13 + j) \cdot (5 - j3)}{(5 + j3) \cdot (5 - j3)} \quad (4)$$

$$= \frac{65 - j39 + j5 + 3}{25 + 9}$$

$$= \frac{68 - j34}{34}$$

$$= \frac{68}{34} - j \frac{34}{34}$$

$$\underline{x} = 2 - j$$

$$L = \{2 - j\} \quad (6)$$

0.6 KOMPLEX-06

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$(3 - j2)(3\underline{x} - j\underline{x}) + 15 = (2 - j3)(\underline{x} + 4) - j4$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(3 - j2)(3\underline{x} - j\underline{x}) + 15 &= (2 - j3)(\underline{x} + 4) - j4 \\ 9\underline{x} - j3\underline{x} - j6\underline{x} - 2\underline{x} + 15 &= 2\underline{x} + 8 - j3\underline{x} - j12 - j4 \\ 7\underline{x} - j9\underline{x} + 15 &= 2\underline{x} + 8 - j3\underline{x} - j16 \quad | -15 - 2\underline{x} + j3\underline{x} \\ 5\underline{x} - j6\underline{x} &= -7 - j16 \quad (5) \\ \underline{x} \cdot (5 - j6) &= -7 - j16 \quad | : (5 - j6) \\ \underline{x} &= \frac{-7 - j16}{5 - j6} \quad (5) \\ &= \frac{(-7 - j16) \cdot (5 + j6)}{(5 - j6) \cdot (5 + j6)} \quad (4) \\ &= \frac{-35 - j42 - j80 + 96}{25 + 36} \\ &= \frac{61 - j122}{61} \\ &= \frac{61}{61} - j \frac{122}{61} \\ \underline{x} &= 1 - j2 \\ L &= \{1 - j2\} \quad (6)\end{aligned}$$

0.7 KOMPLEX-07

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$\frac{2\underline{x} + 3 + j2}{3\underline{x} + j15} = \frac{\underline{x} + j3\underline{x} - 3 - j13}{4\underline{x} + j20}$$

Zusatzfrage: Geben Sie auch die Definitionsmenge an!

Lösung: Zunächst bestimmen wir den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren:

$$\begin{array}{rcl|l} 3\underline{x} + j15 & = & 3 & \cdot (\underline{x} + j5) \quad EF = 4 \\ 4\underline{x} + j20 & = & 4 & \cdot (\underline{x} + j5) \quad EF = 3 \\ \hline HN & = & 3 \cdot 4 & \cdot (\underline{x} + j5) \quad (5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\underline{x} + 3 + j2}{3\underline{x} + j15} &= \frac{\underline{x} + j3\underline{x} - 3 - j13}{4\underline{x} + j20} \quad | \cdot HN \\ 4 \cdot (2\underline{x} + 3 + j2) &= 3 \cdot (\underline{x} + j3\underline{x} - 3 - j13) \quad (4) \\ 8\underline{x} + 12 + j8 &= 3\underline{x} + j9\underline{x} - 9 - j39 \quad | -12 - j8 - 3\underline{x} - j9\underline{x} \\ 5\underline{x} - j9\underline{x} &= -21 - j47 \\ \underline{x} \cdot (5 - j9) &= -21 - j47 \quad | : (5 - j9) \\ \underline{x} &= \frac{-21 - j47}{5 - j9} \quad (4) \\ &= \frac{(-21 - j47) \cdot (5 + j9)}{(5 - j9) \cdot (5 + j9)} \\ &= \frac{-105 - j189 - j235 + 423}{25 + 81} \\ &= \frac{318 - j424}{106} \\ &= \frac{318}{106} - j \frac{424}{106} \\ \underline{x} &= 3 - j4 \\ L &= \{3 - j4\} \quad (4) \end{aligned}$$

Zusatzfrage Wir müssen prüfen, wo der Hauptnenner=0 wird. Diesen Wert müssen wir aus \mathbb{C} ausschließen.

$$\begin{aligned} HN &= 0 \\ 3 \cdot 4 \cdot (\underline{x} + j5) &= 0 \\ 12 \cdot (\underline{x} + j5) &= 0 \\ \underline{x} + j5 &= 0 \\ \underline{x} &= -j5 \\ D &= \mathbb{C} \setminus \{-j5\} \quad (3) \end{aligned}$$

0.8 KOMPLEX-08

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$\frac{3\underline{x} + 2 + j}{2\underline{x} + j6} = \frac{\underline{x} + j2\underline{x} + 8 - j34}{5\underline{x} + j15}$$

Zusatzfrage: Geben Sie auch die Definitionsmenge an!

Lösung: Zunächst bestimmen wir den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren:

$$\begin{array}{rcl} 2\underline{x} + j6 & = & 2 \cdot (\underline{x} + j3) \quad | \quad EF = 5 \\ 5\underline{x} + j15 & = & 5 \cdot (\underline{x} + j3) \quad | \quad EF = 2 \\ \hline HN & = & 2 \cdot 5 \cdot (\underline{x} + j3) \quad | \quad (5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{3\underline{x} + 2 + j}{2\underline{x} + j6} &= \frac{\underline{x} + j2\underline{x} + 8 - j34}{5\underline{x} + j15} \quad | \cdot HN \\ 5 \cdot (3\underline{x} + 2 + j) &= 2 \cdot (\underline{x} + j2\underline{x} + 8 - j34) \quad (4) \\ 15\underline{x} + 10 + j5 &= 2\underline{x} + j4\underline{x} + 16 - j68 \quad | -10 - j5 - 2\underline{x} - j4\underline{x} \\ 13\underline{x} - j4\underline{x} &= 6 - j73 \\ \underline{x} \cdot (13 - j4) &= 6 - j73 \quad | : (13 - j4) \\ \underline{x} &= \frac{6 - j73}{13 - j4} \quad (4) \\ &= \frac{(6 - j73) \cdot (13 + j4)}{(13 - j4) \cdot (13 + j4)} \\ &= \frac{78 + j24 - j949 + 292}{169 + 16} \\ &= \frac{370 - j925}{185} \\ &= \frac{370}{185} - j \frac{925}{185} \\ \underline{x} &= 2 - j5 \\ L &= \{2 - j5\} \quad (4) \end{aligned}$$

Zusatzfrage Wir müssen prüfen, wo der Hauptnenner=0 wird. Diesen Wert müssen wir aus \mathbb{C} ausschließen.

$$\begin{aligned} HN &= 0 \\ 2 \cdot 5 \cdot (\underline{x} + j3) &= 0 \\ 10 \cdot (\underline{x} + j3) &= 0 \\ \underline{x} + j3 &= 0 \\ \underline{x} &= -j3 \\ D &= \mathbb{C} \setminus \{-j3\} \quad (3) \end{aligned}$$

0.9 KOMPLEX-09

Zerlegen Sie \underline{z} in Realteil und Imaginärteil und bestimmen Sie den Betrag und das Argument von \underline{z} !

$$\underline{z} = \frac{(-57 + j75) \cdot (5 - j15)}{(4 + j) \cdot (9 - j21)}$$

Lösung:

$$\underline{z} = \frac{(-57 + j75) \cdot (5 - j15)}{(4 + j) \cdot (9 - j21)}$$

$$\underline{z} = \frac{-285 + j855 + j375 + 1125}{36 - j84 + j9 + 21}$$

$$\underline{z} = \frac{840 + j1230}{57 - j75} \quad (5)$$

$$\underline{z} = \frac{(840 + j1230) \cdot (57 + j75)}{(57 - j75) \cdot (57 + j75)}$$

$$\underline{z} = \frac{47880 + j63000 + j70110 - 92250}{3249 + 5625} \quad (5)$$

$$\underline{z} = \frac{-44370 + j133110}{8874}$$

$$\underline{z} = -\frac{44370}{8874} + j\frac{133110}{8874}$$

$$\underline{z} = -5 + j15$$

$$\operatorname{Re} \underline{z} = -5 \quad \operatorname{Im} \underline{z} = 15 \quad (4)$$

$$|\underline{z}| = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{z})^2 + (\operatorname{Im} \underline{z})^2} = \sqrt{(-5)^2 + 15^2} = \sqrt{250} \approx 15,811 \quad (3)$$

$$\arg \underline{z} = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{z}}{\operatorname{Re} \underline{z}} + 180^\circ = \arctan \frac{15}{-5} + 180^\circ \approx -71,565^\circ + 180^\circ = 108,435^\circ \quad (3)$$

0.10 KOMPLEX-10

Zerlegen Sie \underline{z} in Realteil und Imaginärteil und bestimmen Sie den Betrag und das Argument von \underline{z} !

$$\underline{z} = \frac{(-19 + j25) \cdot (6 - j18)}{(3 - j7) \cdot (8 + j2)}$$

Lösung:

$$\underline{z} = \frac{(-19 + j25) \cdot (6 - j18)}{(3 - j7) \cdot (8 + j2)}$$

$$\underline{z} = \frac{-114 + j342 + j150 + 450}{24 + j6 - j56 + 14}$$

$$\underline{z} = \frac{336 + j492}{38 - j50} \quad (5)$$

$$\underline{z} = \frac{(336 + j492) \cdot (38 + j50)}{(38 - j50) \cdot (38 + j50)}$$

$$\underline{z} = \frac{12768 + j16800 + j18696 - 24600}{1444 + 2500} \quad (5)$$

$$\underline{z} = \frac{-11832 + j35496}{3944}$$

$$\underline{z} = -\frac{11832}{3944} + j\frac{35496}{3944}$$

$$\underline{z} = -3 + j9$$

$$\operatorname{Re} \underline{z} = -3 \quad \operatorname{Im} \underline{z} = 9 \quad (4)$$

$$|\underline{z}| = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{z})^2 + (\operatorname{Im} \underline{z})^2} = \sqrt{(-3)^2 + 9^2} = \sqrt{90} \approx 9,487 \quad (3)$$

$$\arg \underline{z} = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{z}}{\operatorname{Re} \underline{z}} + 180^\circ = \arctan \frac{9}{-3} + 180^\circ \approx -71,565^\circ + 180^\circ = 108,435^\circ \quad (3)$$

0.11 KOMPLEX-11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$2 + 5\underline{x} + j3\underline{x} + j10 = 24 - j4$$

Lösung:

$$2 + 5\underline{x} + j3\underline{x} + j10 = 24 - j4 \quad | - 2 - j10$$

$$5\underline{x} + j3\underline{x} = 22 - j14$$

$$\underline{x} \cdot (5 + j3) = 22 - j14 \quad | : (5 + j3)$$

$$\underline{x} = \frac{22 - j14}{5 + j3} \quad (6)$$

$$\underline{x} = \frac{(22 - j14) \cdot (5 - j3)}{(5 + j3) \cdot (5 - j3)}$$

$$\underline{x} = \frac{110 - j66 - j70 - 42}{25 + 9} \quad (8)$$

$$\underline{x} = \frac{68 - j136}{34}$$

$$\underline{x} = \frac{68}{34} - j \frac{136}{34}$$

$$\underline{x} = 2 - j4$$

$$L = \{2 - j4\} \quad (6)$$

0.12 KOMPLEX-12

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$j7 + 2\underline{x} - j4\underline{x} - 4 = 18 - j7$$

Lösung:

$$j7 + 2\underline{x} - j4\underline{x} - 4 = 18 - j7 \quad | -j7 + 4$$

$$2\underline{x} - j4\underline{x} = 22 - j14$$

$$\underline{x} \cdot (2 - j4) = 22 - j14 \quad | : (2 - j4)$$

$$\underline{x} = \frac{22 - j14}{2 - j4} \quad (6)$$

$$\underline{x} = \frac{(22 - j14) \cdot (2 + j4)}{(2 - j4) \cdot (2 + j4)}$$

$$\underline{x} = \frac{44 + j88 - j28 + 56}{4 + 16} \quad (8)$$

$$\underline{x} = \frac{100 + j60}{20}$$

$$\underline{x} = \frac{100}{20} + j\frac{60}{20}$$

$$\underline{x} = 5 + j3$$

$$L = \{5 + j3\} \quad (6)$$

0.13 KOMPLEX-13

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$(2\underline{x} + j3) \cdot (3\underline{x} - 4) - 9 - j11 = (3\underline{x} + j2) \cdot (2\underline{x} - 5) + 2 + j16$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(2\underline{x} + j3) \cdot (3\underline{x} - 4) - 9 - j11 &= (3\underline{x} + j2) \cdot (2\underline{x} - 5) + 2 + j16 \\6\underline{x}^2 - 8\underline{x} + j9\underline{x} - j12 - 9 - j11 &= 6\underline{x}^2 - 15\underline{x} + j4\underline{x} - j10 + 2 + j16 \\6\underline{x}^2 - 8\underline{x} + j9\underline{x} - j23 - 9 &= 6\underline{x}^2 - 15\underline{x} + j4\underline{x} + j6 + 2 \quad | - 6\underline{x}^2 + j23 + 9 + 15\underline{x} - j4\underline{x} \\7\underline{x} + j5\underline{x} &= 11 + j29 \quad (5) \\\underline{x} \cdot (7 + j5) &= 11 + j29 \quad | : (7 + j5) \\\underline{x} &= \frac{11 + j29}{7 + j5} \quad (5) \\\underline{x} &= \frac{(11 + j29) \cdot (7 - j5)}{(7 + j5) \cdot (7 - j5)} \quad (4) \\\underline{x} &= \frac{77 - j55 + j203 + 145}{49 + 25} \\\underline{x} &= \frac{222 + j148}{74} \\\underline{x} &= \frac{222}{74} + j \frac{148}{74} \\\underline{x} &= 3 + j2 \\L &= \{3 + j2\} \quad (6)\end{aligned}$$

0.14 KOMPLEX-14

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$(5\underline{x} + 1) \cdot (2\underline{x} + 5) - 80 - j30 = (2\underline{x} - 4) \cdot (5\underline{x} + j2) + 31 + j111$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(5\underline{x} + 1) \cdot (2\underline{x} + 5) - 80 - j30 &= (2\underline{x} - 4) \cdot (5\underline{x} + j2) + 31 + j111 \\ 10\underline{x}^2 + 25\underline{x} + 2\underline{x} + 5 - 80 - j30 &= 10\underline{x}^2 + j4\underline{x} - 20\underline{x} - j8 + 31 + j111 \quad | - 10\underline{x}^2 \\ 27\underline{x} - 75 - j30 &= j4\underline{x} - 20\underline{x} + j103 + 31 \quad | + 75 + j30 - j4\underline{x} + 20\underline{x} \\ 47\underline{x} - j4\underline{x} &= 106 + j133 \quad (5) \\ \underline{x} \cdot (47 - j4) &= 106 + j133 \quad | : (47 - j4) \\ \underline{x} &= \frac{106 + j133}{47 - j4} \quad (5) \\ \underline{x} &= \frac{(106 + j133) \cdot (47 + j4)}{(47 - j4) \cdot (47 + j4)} \quad (4) \\ \underline{x} &= \frac{4982 + j424 + j6251 - 532}{2209 + 16} \\ \underline{x} &= \frac{4450 + j6675}{2225} \\ \underline{x} &= \frac{4450}{2225} + j \frac{6675}{2225} \\ \underline{x} &= 2 + j3 \\ L &= \{2 + j3\} \quad (6)\end{aligned}$$

0.15 KOMPLEX-15

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$\frac{4\underline{x} - 17 - j6}{6\underline{x} - 12} = \frac{2\underline{x} - 2 - j3}{3\underline{x} - j9}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{4\underline{x} - 17 - j6}{6\underline{x} - 12} &= \frac{2\underline{x} - 2 - j3}{3\underline{x} - j9} \quad | \cdot (6\underline{x} - 12) \cdot (3\underline{x} - j9) \\ (4\underline{x} - 17 - j6) \cdot (3\underline{x} - j9) &= (2\underline{x} - 2 - j3) \cdot (6\underline{x} - 12) \\ 12\underline{x}^2 - j36\underline{x} - 51\underline{x} + j153 - j18\underline{x} - 54 &= 12\underline{x}^2 - 24\underline{x} - 12\underline{x} + 24 - j18\underline{x} + j36 \quad | - 12\underline{x}^2 \\ -51\underline{x} - j54\underline{x} + j153 - 54 &= -36\underline{x} + 24 - j18\underline{x} + j36 \quad | - j153 + 54 + 36\underline{x} + j18\underline{x} \\ -15\underline{x} - j36\underline{x} &= 78 - j117 \\ \underline{x} \cdot (-15 - j36) &= 78 - j117 \quad | : (-15 - j36) \\ \underline{x} &= \frac{78 - j117}{-15 - j36} \\ \underline{x} &= \frac{(78 - j117) \cdot (-15 + j36)}{(-15 - j36) \cdot (-15 + j36)} \\ \underline{x} &= \frac{-1170 + j2808 + j1755 + 4212}{225 + 1296} \\ \underline{x} &= \frac{3042 + j4563}{1521} \\ \underline{x} &= \frac{3042}{1521} + j \frac{4563}{1521} \\ \underline{x} &= 2 + j3 \\ L &= \{2 + j3\}\end{aligned}$$

0.16 KOMPLEX-16

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$\frac{4\underline{x} - 35 + j6}{10\underline{x} - 20} = \frac{2\underline{x} - 2 - j3}{5\underline{x} + j15}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{4\underline{x} - 35 + j6}{10\underline{x} - 20} &= \frac{2\underline{x} - 2 - j3}{5\underline{x} + j15} \quad | \cdot (10\underline{x} - 20) \cdot (5\underline{x} + j15) \\ (4\underline{x} - 35 + j6) \cdot (5\underline{x} + j15) &= (2\underline{x} - 2 - j3) \cdot (10\underline{x} - 20) \\ 20\underline{x}^2 + j60\underline{x} - 175\underline{x} - j525 + j30\underline{x} - 90 &= 20\underline{x}^2 - 40\underline{x} - 20\underline{x} + 40 - j30\underline{x} + j60 \quad | - 20\underline{x}^2 \\ j90\underline{x} - 175\underline{x} - j525 - 90 &= -60\underline{x} - j30\underline{x} + 40 + j60 \quad | + j525 + 90 + 60\underline{x} + j30\underline{x} \\ -115\underline{x} + j120\underline{x} &= 130 + j585 \\ \underline{x} \cdot (-115 + j120) &= 130 + j585 \quad | : (-115 + j120) \\ \underline{x} &= \frac{130 + j585}{-115 + j120} \\ \underline{x} &= \frac{(130 + j585) \cdot (-115 - j120)}{(-115 + j120) \cdot (-115 - j120)} \\ \underline{x} &= \frac{-14950 - j15600 - j67275 + 70200}{13225 + 14400} \\ \underline{x} &= \frac{55250 - j82875}{27625} \\ \underline{x} &= \frac{55250}{27625} - j \frac{82875}{27625} \\ \underline{x} &= 2 - j3 \\ L &= \{2 - j3\}\end{aligned}$$

0.17 KOMPLEX-17

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$\frac{3\underline{x} + j\underline{x} - j2}{j3\underline{x} - 6 + j9} - \frac{4\underline{x} - j3\underline{x} - 15}{j2\underline{x} - 4 + j6} = 0$$

Zusatzfrage: Bestimmen Sie auch die Definitionsmenge der Gleichung!

Lösung: Vor der eigentlichen Lösung bestimmen wir den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren.

$$\begin{array}{rcl|l} j3\underline{x} - 6 + j9 & = & 3 \cdot (j\underline{x} - 2 + j3) & EF = 2 \\ j2\underline{x} - 4 + j6 & = & 2 \cdot (j\underline{x} - 2 + j3) & EF = 3 \\ \hline HN & = & 2 \cdot 3 \cdot (j\underline{x} - 2 + j3) & (5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{3\underline{x} + j\underline{x} - j2}{j3\underline{x} - 6 + j9} - \frac{4\underline{x} - j3\underline{x} - 15}{j2\underline{x} - 4 + j6} &= 0 \quad | \cdot HN \\ 2 \cdot (3\underline{x} + j\underline{x} - j2) - 3 \cdot (4\underline{x} - j3\underline{x} - 15) &= 0 \quad (4) \\ 6\underline{x} + j2\underline{x} - j4 - 12\underline{x} + j9\underline{x} + 45 &= 0 \\ -6\underline{x} + j11\underline{x} - j4 + 45 &= 0 \quad | -45 + j4 \\ -6\underline{x} + j11\underline{x} &= -45 + j4 \\ (-6 + j11) \cdot \underline{x} &= -45 + j4 \quad | : (-6 + j11) \\ \underline{x} &= \frac{-45 + j4}{-6 + j11} \quad (4) \\ &= \frac{(-45 + j4) \cdot (-6 - j11)}{(-6 + j11) \cdot (-6 - j11)} \\ &= \frac{270 + j495 - j24 + 44}{36 + 121} \\ &= \frac{314 + j471}{157} \\ &= \frac{314}{157} + j \frac{471}{157} \\ \underline{x} &= 2 + j3 \\ L &= \{2 + j3\} \quad (4) \end{aligned}$$

Zusatzfrage Wir müssen prüfen, wo der Hauptnenner=0 wird. Diesen Wert müssen wir aus \mathbb{C} ausschließen.

$$\begin{aligned}
 HN &= 0 \\
 2 \cdot 3 \cdot (j\underline{x} - 2 + j3) &= 0 \\
 6 \cdot (j\underline{x} - 2 + j3) &= 0 \\
 j\underline{x} - 2 + j3 &= 0 \\
 j\underline{x} &= 2 - j3 \\
 \underline{x} &= \frac{2 - j3}{j} \\
 \underline{x} &= \frac{(2 - j3) \cdot (-j)}{j \cdot (-j)} \\
 \underline{x} &= -j2 - 3 \\
 D &= \mathbb{C} \setminus \{-3 - j2\} \quad (3)
 \end{aligned}$$

0.18 KOMPLEX-18

Zerlegen Sie \underline{z} in Realteil und Imaginärteil und bestimmen Sie den Betrag und das Argument von \underline{z} !

$$\underline{z} = \frac{-38 + j50}{3 - j7} \cdot \frac{3 - j9}{12 + j3}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\underline{z} &= \frac{-38 + j50}{3 - j7} \cdot \frac{3 - j9}{12 + j3} \\&= \frac{(-38 + j50) \cdot (3 - j9)}{(3 - j7) \cdot (12 + j3)} \\&= \frac{-114 + j342 + j150 + 450}{36 + j9 - j84 + 21} \\&= \frac{336 + j492}{57 - j75} \quad (5) \\&= \frac{(336 + j492) \cdot (57 + j75)}{(57 - j75) \cdot (57 + j75)} \\&= \frac{19152 + j25200 + j28044 - 36900}{3249 + 5625} \quad (5) \\&= \frac{-17748 + j53244}{8874} \\&= -\frac{17748}{8874} + j\frac{53244}{8874} \\ \underline{z} &= -2 + j6 \\ \operatorname{Re} \underline{z} &= -2 \quad \operatorname{Im} \underline{z} = 6 \quad (4)\end{aligned}$$

$$|\underline{z}| = z = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{z})^2 + (\operatorname{Im} \underline{z})^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6,324555 \quad (3)$$

Es ist $\operatorname{Re} \underline{z} < 0$. Deshalb muss in der Formel zur Bestimmung des Argumentes 180° addiert werden.

$$\arg \underline{z} = \arctan \frac{\operatorname{Im} \underline{z}}{\operatorname{Re} \underline{z}} + 180^\circ = \arctan \frac{6}{-2} + 180^\circ \approx -71,565^\circ + 180^\circ = 108,435^\circ \quad (3)$$

0.19 KOMPLEX-19

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$3\underline{x} + j84 + j2\underline{x} = 168 + j4\underline{x} - \underline{x}$$

Lösung:

$$3\underline{x} + j84 + j2\underline{x} = 168 + j4\underline{x} - \underline{x} \quad | -j84 - j4\underline{x} + \underline{x}$$

$$4\underline{x} - 2j\underline{x} = 168 - j84$$

$$(4 - 2j) \cdot \underline{x} = 168 - j84 \quad | : (4 - 2j)$$

$$\underline{x} = \frac{168 - j84}{4 - 2j}$$

$$= \frac{(168 - j84) \cdot (4 + j2)}{(4 - 2j) \cdot (4 + j2)}$$

$$= \frac{672 + j336 - j336 + 168}{16 + 4}$$

$$= \frac{840}{20}$$

$$\underline{x} = 42$$

0.20 KOMPLEX-20

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$(\underline{x} - 2 + j3)^2 - (3 + \underline{x}) \cdot \underline{x} - j20 = 5 + j8$$

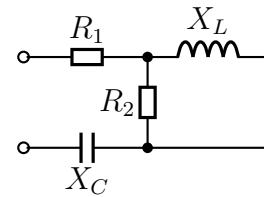
Lösung:

$$\begin{aligned}(\underline{x} - 2 + j3)^2 - (3 + \underline{x}) \cdot \underline{x} - j20 &= 5 + j8 \\ \underline{x}^2 - 2\underline{x} + j3\underline{x} - 2\underline{x} + 4 - j6 + j3\underline{x} - j6 - 9 - 3\underline{x} - \underline{x}^2 - j20 &= 5 + j8 \\ -7\underline{x} + j6\underline{x} - 5 - j32 &= 5 + j8 \quad | + 5 + j32 \\ -7\underline{x} + j6\underline{x} &= 10 + j40 \\ (-7 + j6) \cdot \underline{x} &= 10 + j40 \quad | : (-7 + j6) \\ \underline{x} &= \frac{10 + j40}{-7 + j6} \\ &= \frac{(10 + j40) \cdot (-7 - j6)}{(-7 + j6) \cdot (-7 - j6)} \\ &= \frac{-70 - j60 - j280 + 240}{49 + 36} \\ &= \frac{170 - j340}{85} \\ &= \frac{170}{85} - j \frac{340}{85} \\ \underline{x} &= 2 - j4 \\ L &= \{2 - j4\}\end{aligned}$$

0.21 KOMPLEX-21

Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der nebenstehende Schaltung sowie seinen Betrag $|\underline{Z}|$ mit folgenden Werten:

$$R_1 = 18 \Omega; R_2 = 60 \Omega; \\ X_C = 28 \Omega; X_L = 20 \Omega$$



Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben.

Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{R}_1 = 18 \Omega; \quad \underline{R}_2 = 60 \Omega; \\ \underline{X}_C = -j28 \Omega; \quad \underline{X}_L = j20 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus R_2 und X_L zu Z_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{R}_2 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{60 \Omega \cdot j20 \Omega}{60 \Omega + j20 \Omega} \\ &= \frac{j1200 \Omega^2}{60 \Omega + j20 \Omega} \\ &= \frac{j1200 \Omega^2 \cdot (60 \Omega - j20 \Omega)}{(60 \Omega + j20 \Omega) \cdot (60 \Omega - j20 \Omega)} \\ &= \frac{j72000 \Omega^3 + 24000 \Omega^3}{3600 \Omega^2 + 400 \Omega^2} \\ &= \frac{j72000 \Omega^3}{4000 \Omega^2} + \frac{24000 \Omega^3}{4000 \Omega^2} \\ \underline{Z}_1 &= j18 \Omega + 6 \Omega \quad (8) \end{aligned}$$

In Reihe zu Z_1 liegen die Widerstände R_1 und X_C . Das kann mit der Formel für die Reihenschaltung zu \underline{Z} zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{R}_1 + \underline{Z}_1 + \underline{X}_C \\ &= 18 \Omega + j18 \Omega + 6 \Omega - j28 \Omega \\ \underline{Z} &= 24 \Omega - j10 \Omega \quad (5) \end{aligned}$$

Den Betrag erhalten wir über die Grundformel für den Betrag:

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(24 \Omega)^2 + (-10 \Omega)^2} = 26 \Omega \quad (5)$$

Zusammengefasst lauten die Ergebnisse: $\underline{Z} = 24 \Omega - j10 \Omega$ und $Z = 26 \Omega$

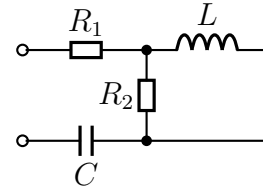
0.22 KOMPLEX-21a

In nebenstehender Schaltung sind folgende Werte gegeben:

$$R_1 = 6 \Omega; R_2 = 60 \Omega;$$

$$C = 1\,000 \mu\text{F}; L = 40 \text{ mH}$$

Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit der Kreisfrequenz $\omega = 500 \frac{1}{\text{s}}$ betrieben.



a) Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der nebenstehende Schaltung sowie seinen Betrag $|\underline{Z}|$!

b) Geben Sie eine Ersatzschaltung mit **zwei idealen** Bauelementen an, die gegebene Schaltung bei der vorgegebenen Frequenz ersetzen kann. Geben Sie auch die zugehörigen **Widerstandswerte** sowie ggf. **Induktivität** oder **Kapazität** dieser Bauelemente an!

Lösung a) Zunächst bestimmen wir X_L und X_C .

$$X_L = \omega \cdot L = 500 \frac{1}{\text{s}} \cdot 40 \text{ mH} = 20 \Omega \quad (2)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{500 \frac{1}{\text{s}} \cdot 1\,000 \mu\text{F}} = 2 \Omega \quad (2)$$

Als nächstes bestimmen die **komplexen** Größen:

$$\underline{R}_1 = 6 \Omega; \quad \underline{R}_2 = 60 \Omega;$$

$$\underline{X}_C = -j2 \Omega; \quad \underline{X}_L = j20 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus R_2 und X_L zu Z_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{R}_2 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{60 \Omega \cdot j20 \Omega}{60 \Omega + j20 \Omega} \\ &= \frac{j1\,200 \Omega^2}{60 \Omega + j20 \Omega} \\ &= \frac{j1\,200 \Omega^2 \cdot (60 \Omega - j20 \Omega)}{(60 \Omega + j20 \Omega) \cdot (60 \Omega - j20 \Omega)} \\ &= \frac{j72\,000 \Omega^3 + 24\,000 \Omega^3}{3\,600 \Omega^2 + 400 \Omega^2} \\ &= \frac{j72\,000 \Omega^3}{4\,000 \Omega^2} + \frac{24\,000 \Omega^3}{4\,000 \Omega^2} \\ \underline{Z}_1 &= j18 \Omega + 6 \Omega \quad (4) \end{aligned}$$

In Reihe zu Z_1 liegen die Widerstände R_1 und X_C . Das kann mit der Formel für die Reihenschaltung zu Z zusammengefasst werden.

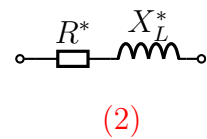
$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{R}_1 + \underline{Z}_1 + \underline{X}_C \\ &= 6\Omega + j18\Omega + 6\Omega - j2\Omega \\ \underline{Z} &= 12\Omega + j16\Omega \quad (4)\end{aligned}$$

Den Betrag erhalten wir über die Grundformel für den Betrag:

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(12\Omega)^2 + (16\Omega)^2} = 20\Omega \quad (4)$$

Zusammengefasst lauten die Ergebnisse: $\underline{Z} = 12\Omega + j16\Omega$ und $Z = 20\Omega$

Lösung b) Nebstehend ist die gesuchte Ersatzschaltung dargestellt. Da der Imaginärteil von \underline{Z} **positiv** ist, muss der zugehörige Blindwiderstand eine Induktivität darstellen. Wir berechnen die zugehörige Induktivität L^* :



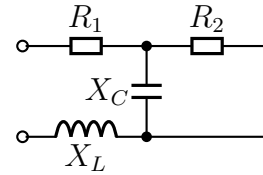
$$\begin{aligned}X_L^* &= 16\Omega \\ X_L^* &= \omega \cdot L^* \\ L^* &= \frac{X_L^*}{\omega} \\ L^* &= \frac{16\Omega}{500 \frac{1}{s}} \\ L^* &= 32\text{mH} \quad (4)\end{aligned}$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $R^* = 12\Omega$ und $L^* = 32\text{mH}$ (1)

0.23 KOMPLEX-22

Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung sowie seinen Betrag $|\underline{Z}|$ mit folgenden Werten:

$$\begin{aligned} R_1 &= 27 \, \Omega; & R_2 &= 90 \, \Omega; \\ X_C &= 30 \, \Omega; & X_L &= 42 \, \Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{R}_1 = 27 \, \Omega; \quad \underline{R}_2 = 90 \, \Omega; \quad \underline{X}_C = -j30 \, \Omega; \quad \underline{X}_L = j42 \, \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus R_2 und X_C zu Z_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C}{\underline{R}_2 + \underline{X}_C} \\ &= \frac{90 \, \Omega \cdot (-j30 \, \Omega)}{90 \, \Omega - j30 \, \Omega} \\ &= \frac{-j2700 \, \Omega^2}{90 \, \Omega - j30 \, \Omega} \\ &= \frac{-j2700 \, \Omega^2 \cdot (90 \, \Omega + j30 \, \Omega)}{(90 \, \Omega - j30 \, \Omega) \cdot (90 \, \Omega + j30 \, \Omega)} \\ &= \frac{-j243000 \, \Omega^3 + 81000 \, \Omega^3}{8100 \, \Omega^2 + 900 \, \Omega^2} \\ &= \frac{-j243000 \, \Omega^3}{9000 \, \Omega^2} + \frac{81000 \, \Omega^3}{9000 \, \Omega^2} \\ \underline{Z}_1 &= -j27 \, \Omega + 9 \, \Omega \quad (8) \end{aligned}$$

In Reihe zu Z_1 liegen die Widerstände R_1 und X_L . Das kann mit der Formel für die Reihenschaltung zu \underline{Z} zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{R}_1 + \underline{Z}_1 + \underline{X}_L \\ &= 27 \, \Omega - j27 \, \Omega + 9 \, \Omega + j42 \, \Omega \\ \underline{Z} &= 36 \, \Omega + j15 \, \Omega \quad (5) \end{aligned}$$

Den Betrag erhalten wir über die Grundformel für den Betrag:

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(36 \, \Omega)^2 + (15 \, \Omega)^2} = 39 \, \Omega \quad (5)$$

Zusammengefasst lauten die Ergebnisse: $\underline{Z} = 36 \, \Omega + j15 \, \Omega$ und $Z = 39 \, \Omega$

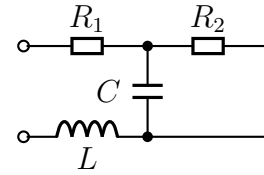
0.24 KOMPLEX-22a

In nebenstehender Schaltung sind folgende Werte gegeben:

$$R_1 = 12 \Omega; \quad R_2 = 120 \Omega;$$

$$C = 125 \mu\text{F}; \quad L = 20 \text{ mH}$$

Die Schaltung wird mit der konstanten Kreisfrequenz $\omega = 200 \frac{1}{\text{s}}$ betrieben.



a) Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der nebenstehende Schaltung sowie seinen Betrag $|\underline{Z}|$!

b) Geben Sie eine Ersatzschaltung mit **zwei idealen** Bauelementen an, die gegebene Schaltung bei der vorgegebenen Frequenz ersetzen kann. Geben Sie auch die zugehörigen **Widerstandswerte** sowie ggf. **Induktivität** oder **Kapazität** dieser Bauelemente an!

Lösung a) Zunächst bestimmen wir X_L und X_C .

$$X_L = \omega \cdot L = 200 \frac{1}{\text{s}} \cdot 20 \text{ mH} = 4 \Omega \quad (2)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{200 \frac{1}{\text{s}} \cdot 125 \mu\text{F}} = 40 \Omega \quad (2)$$

Nun bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{R}_1 = 12 \Omega; \quad \underline{R}_2 = 120 \Omega; \quad \underline{X}_C = -j40 \Omega; \quad \underline{X}_L = j4 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R}_2 und \underline{X}_C zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C}{\underline{R}_2 + \underline{X}_C} \\ &= \frac{120 \Omega \cdot (-j40 \Omega)}{120 \Omega - j40 \Omega} \\ &= \frac{-j4800 \Omega^2}{120 \Omega - j40 \Omega} \\ &= \frac{-j4800 \Omega^2 \cdot (120 \Omega + j40 \Omega)}{(120 \Omega - j40 \Omega) \cdot (120 \Omega + j40 \Omega)} \\ &= \frac{-j576000 \Omega^3 + 192000 \Omega^3}{14400 \Omega^2 + 1600 \Omega^2} \\ &= \frac{-j576000 \Omega^3}{16000 \Omega^2} + \frac{192000 \Omega^3}{16000 \Omega^2} \\ \underline{Z}_1 &= -j36 \Omega + 12 \Omega \quad (6) \end{aligned}$$

In Reihe zu Z_1 liegen die Widerstände R_1 und X_L . Das kann mit der Formel für die Reihenschaltung zu Z zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{R}_1 + \underline{Z}_1 + \underline{X}_L \\ &= 12\,\Omega - j36\,\Omega + 12\,\Omega + j4\,\Omega \\ \underline{Z} &= 24\,\Omega - j32\,\Omega \quad (4)\end{aligned}$$

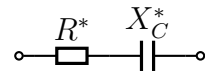
Den Betrag erhalten wir über die Grundformel für den Betrag:

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(24\,\Omega)^2 + (-32\,\Omega)^2} = 40\,\Omega \quad (5)$$

Zusammengefasst lauten die Ergebnisse: $\underline{Z} = 24\,\Omega - j32\,\Omega$ und $Z = 40\,\Omega$

Lösung b) Nebstehend ist die gesuchte Ersatzschaltung dargestellt. Da der Imaginärteil von \underline{Z} **negativ** ist, muss der zugehörige Blindwiderstand eine Kapazität darstellen. Wir erhalten die Werte:

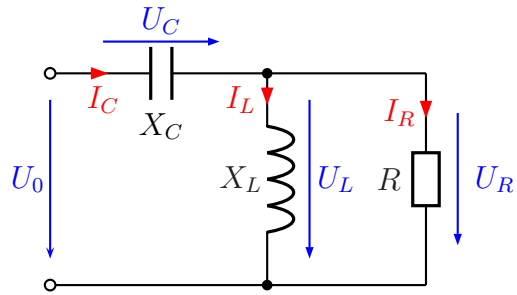
$$\underline{R}^* = 24\,\Omega \quad \text{und} \quad \underline{X}_C^* = 32\,\Omega \quad (2)$$



0.25 KOMPLEX-23

Berechnen Sie den Strom I_R in nebenstehender Schaltung! Bekannt sind die Werte:

$$\begin{aligned} U_0 &= 10 \text{ V}; & X_L &= 100 \Omega; \\ X_C &= 100 \Omega; & R &= 300 \Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{U}_0 = 10 \text{ V}; \quad \underline{X}_L = j100 \Omega; \quad \underline{X}_C = -j100 \Omega; \quad \underline{R} = 300 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R} und \underline{X}_L zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_L}{\underline{R} + \underline{X}_L} \\ &= \frac{300 \Omega \cdot j100 \Omega}{300 \Omega + j100 \Omega} \\ &= \frac{300 \Omega \cdot j100 \Omega}{100 \Omega \cdot (3 + j1)} \\ &= \frac{j300 \Omega}{3 + j1} \\ &= \frac{j300 \Omega \cdot (3 - j1)}{(3 + j1) \cdot (3 - j1)} \\ &= \frac{j900 \Omega + 300 \Omega}{9 + 1} \\ &= \frac{j900 \Omega + 300 \Omega}{10} \\ \underline{Z}_1 &= j90 \Omega + 30 \Omega \quad (5) \end{aligned}$$

Damit können wir den Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_C + \underline{Z}_1 \\ &= -j100 \Omega + j90 \Omega + 30 \Omega \\ \underline{Z} &= 30 \Omega - j10 \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Ich bestimme den Gesamtstrom \underline{I}_C , der im Kondensator (und damit auch in \underline{Z}) fließt.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{10 \text{ V}}{30 \Omega - j10 \Omega} \\
 &= \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega \cdot (3 - j1)} \\
 &= \frac{1 \text{ A}}{3 - j1} \\
 &= \frac{1 \text{ A} \cdot (3 + j1)}{(3 - j1) \cdot (3 + j1)} \\
 &= \frac{3 \text{ A} + j1 \text{ A}}{9 + 1} \\
 &= \frac{3 \text{ A} + j1 \text{ A}}{10} \\
 \underline{I}_C &= 300 \text{ mA} + j100 \text{ mA} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Durch \underline{Z}_1 fließt der gleiche Strom. Damit kann ich die Spannung an \underline{Z}_1 und damit auch an \underline{R} bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_R &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_C \\
 &= (j90 \Omega + 30 \Omega) \cdot (300 \text{ mA} + j100 \text{ mA}) \\
 &= j27 \text{ V} - 9 \text{ V} + 9 \text{ V} + j3 \text{ V} \\
 \underline{U}_R &= j30 \text{ V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz erhalte ich \underline{I}_R .

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_R}{\underline{R}} \\
 &= \frac{j30 \text{ V}}{300 \Omega} \\
 \underline{I}_R &= j100 \text{ mA} \quad (2)
 \end{aligned}$$

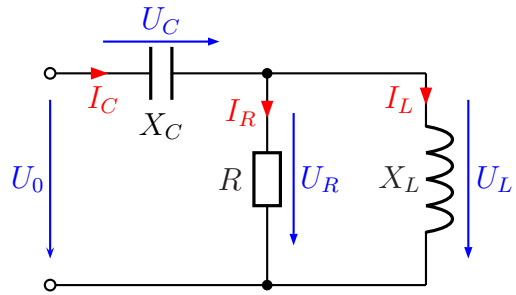
Gesucht ist I_R , also der Betrag von \underline{I}_R . Da \underline{I}_R rein imaginär ist, ergibt sich ohne Rechnung:

$$\boxed{I_R = 100 \text{ mA}} \quad (1)$$

0.26 KOMPLEX-24

Berechnen Sie den Strom I_L in nebenstehender Schaltung! Bekannt sind die Werte:

$$\begin{aligned} U_0 &= 100 \text{ V}; & X_L &= 1 \text{ k}\Omega; \\ X_C &= 1 \text{ k}\Omega; & R &= 2 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{U}_0 = 100 \text{ V}; \quad \underline{X}_L = j1 \text{ k}\Omega; \quad \underline{X}_C = -j1 \text{ k}\Omega; \quad \underline{R} = 2 \text{ k}\Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus R und X_L zu Z_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_L}{\underline{R} + \underline{X}_L} \\ &= \frac{2 \text{ k}\Omega \cdot j1 \text{ k}\Omega}{2 \text{ k}\Omega + j1 \text{ k}\Omega} \\ &= \frac{2 \text{ k}\Omega \cdot j1 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega \cdot (2 + j1)} \\ &= \frac{j2 \text{ k}\Omega}{2 + j1} \\ &= \frac{j2 \text{ k}\Omega \cdot (2 - j1)}{(2 + j1) \cdot (2 - j1)} \\ &= \frac{j4 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega}{4 + 1} \\ &= \frac{j4 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega}{5} \\ \underline{Z}_1 &= j800 \Omega + 400 \Omega \quad (5) \end{aligned}$$

Damit können wir den Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_C + \underline{Z}_1 \\ &= -j1 \text{ k}\Omega + j800 \Omega + 400 \Omega \\ \underline{Z} &= 400 \Omega - j200 \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Ich bestimme den Gesamtstrom \underline{I}_C , der im Kondensator (und damit auch in \underline{Z}) fließt.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{100 \text{ V}}{400 \Omega - j200 \Omega} \\
 &= \frac{100 \text{ V}}{100 \Omega \cdot (4 - j2)} \\
 &= \frac{1 \text{ A}}{4 - j2} \\
 &= \frac{1 \text{ A} \cdot (4 + j2)}{(4 - j2) \cdot (4 + j2)} \\
 &= \frac{4 \text{ A} + j2 \text{ A}}{16 + 4} \\
 &= \frac{4 \text{ A} + j2 \text{ A}}{20} \\
 \underline{I}_C &= 200 \text{ mA} + j100 \text{ mA} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Durch \underline{Z}_1 fließt der gleiche Strom. Damit kann ich die Spannung an \underline{Z}_1 und damit auch an \underline{X}_L bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_L &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_C \\
 &= (j800 \Omega + 400 \Omega) \cdot (200 \text{ mA} + j100 \text{ mA}) \\
 &= j160 \text{ V} - 80 \text{ V} + 80 \text{ V} + j40 \text{ V} \\
 \underline{U}_L &= j200 \text{ V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz erhalte ich \underline{I}_L .

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_L}{\underline{X}_L} \\
 &= \frac{j200 \text{ V}}{j1 \text{ k}\Omega} \\
 \underline{I}_L &= 200 \text{ mA} \quad (2)
 \end{aligned}$$

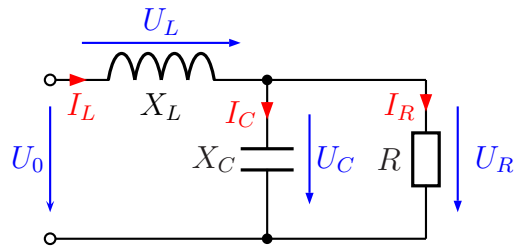
Es mag überraschen, dass \underline{I}_L eine **reelle** Größe ist. Das liegt aber daran, dass die Bezugsgröße \underline{U}_0 und nicht \underline{U}_L ist. Der gesuchte Betrag von \underline{I}_L ist dann natürlich auch reell. Ergebnis:

$$\boxed{I_L = 200 \text{ mA}} \quad (1)$$

0.27 KOMPLEX-25

Berechnen Sie den Strom I_C in nebenstehender Schaltung! Bekannt sind die Werte:

$$\begin{aligned} U_0 &= 30 \text{ V}; & X_L &= 100 \Omega; \\ X_C &= 100 \Omega; & R &= 300 \Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{U}_0 = 30 \text{ V}; \quad \underline{X}_L = j100 \Omega; \quad \underline{X}_C = -j100 \Omega; \quad \underline{R} = 300 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R} und \underline{X}_C zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} \\ &= \frac{300 \Omega \cdot (-j100 \Omega)}{300 \Omega - j100 \Omega} \\ &= \frac{-300 \Omega \cdot j100 \Omega}{100 \Omega \cdot (3 - j1)} \\ &= \frac{-j300 \Omega}{3 - j1} \\ &= \frac{-j300 \Omega \cdot (3 + j1)}{(3 - j1) \cdot (3 + j1)} \\ &= \frac{-j900 \Omega + 300 \Omega}{9 + 1} \\ &= \frac{-j900 \Omega + 300 \Omega}{10} \\ \underline{Z}_1 &= -j90 \Omega + 30 \Omega \quad (5) \end{aligned}$$

Damit können wir den Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_L + \underline{Z}_1 \\ &= j100 \Omega - j90 \Omega + 30 \Omega \\ \underline{Z} &= 30 \Omega + j10 \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Ich bestimme den Gesamtstrom \underline{I}_L , der in der Induktivität (und damit auch in \underline{Z}) fließt.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{30 \text{ V}}{30 \Omega + j10 \Omega} \\
 &= \frac{30 \text{ V}}{10 \Omega \cdot (3 + j1)} \\
 &= \frac{3 \text{ A}}{3 + j1} \\
 &= \frac{3 \text{ A} \cdot (3 - j1)}{(3 + j1) \cdot (3 - j1)} \\
 &= \frac{9 \text{ A} - j3 \text{ A}}{9 + 1} \\
 &= \frac{9 \text{ A} - j3 \text{ A}}{10} \\
 \underline{I}_L &= 900 \text{ mA} - j300 \text{ mA} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Durch \underline{Z}_1 fließt der gleiche Strom. Damit kann ich die Spannung an \underline{Z}_1 und damit auch an \underline{X}_C bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_C &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_L \\
 &= (-j90 \Omega + 30 \Omega) \cdot (900 \text{ mA} - j300 \text{ mA}) \\
 &= -j81 \text{ V} - 27 \text{ V} + 27 \text{ V} - j9 \text{ V} \\
 \underline{U}_C &= -j90 \text{ V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz erhalte ich \underline{I}_C .

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_C}{\underline{X}_C} \\
 &= \frac{-j90 \text{ V}}{-j300 \Omega} \\
 \underline{I}_C &= 300 \text{ mA} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Es mag überraschen, dass \underline{I}_C eine **reelle** Größe ist. Das liegt aber daran, dass die Bezugsgröße \underline{U}_0 und nicht \underline{U}_C ist. Der gesuchte Betrag von \underline{I}_C ist dann natürlich auch reell. Ergebnis:

$$\boxed{I_C = 300 \text{ mA}} \quad (1)$$

0.28 KOMPLEX-26

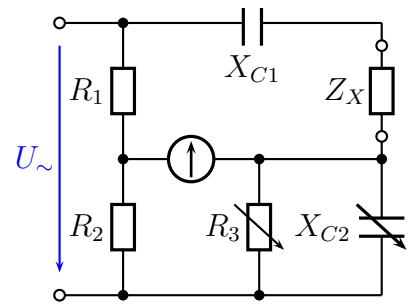
An einer **Scheinwiderstandsmessbrücke** gemäß nebenstehender Schaltung ergeben sich nach Abgleich folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_1 &= 80 \, \Omega; & R_2 &= 160 \, \Omega; \\ R_3 &= 40 \, \Omega; & X_{C1} &= 24 \, \Omega; \\ X_{C2} &= 20 \, \Omega \end{aligned}$$

Welchen Scheinwiderstand hat der komplexe Widerstand \underline{Z}_X ? **Lösungshinweis:** Die Abgleichbedingung lautet:

$$\frac{\underline{R}_1}{\underline{R}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$

mit: \underline{Z}_1 bestehend aus \underline{Z}_X und \underline{X}_{C1} und
 \underline{Z}_2 bestehend aus \underline{R}_3 und \underline{X}_{C2} .



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Werte der gegebenen Größen:

$$\underline{R}_1 = 80 \, \Omega; \underline{R}_2 = 160 \, \Omega; \underline{R}_3 = 40 \, \Omega; \underline{X}_{C1} = -j24 \, \Omega; \underline{X}_{C2} = -j20 \, \Omega \quad (2)$$

Als nächstes wird \underline{Z}_2 bestimmt.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{R}_3 \cdot \underline{X}_{C2}}{\underline{R}_3 + \underline{X}_{C2}} \\ &= \frac{40 \, \Omega \cdot (-j20 \, \Omega)}{40 \, \Omega - j20 \, \Omega} \quad | 20 \, \Omega \text{ ausklammern} \\ &= \frac{40 \, \Omega \cdot (-j20 \, \Omega)}{20 \, \Omega \cdot (2 - j)} \quad | \text{ kürzen} \\ &= \frac{-j40 \, \Omega}{2 - j} \quad | \text{ konjugiert komplex erweitern} \\ &= \frac{(-j40 \, \Omega) \cdot (2 + j)}{(2 - j) \cdot (2 + j)} \\ &= \frac{-j80 \, \Omega + 40 \, \Omega}{4 + 1} \\ &= \frac{-j80 \, \Omega + 40 \, \Omega}{5} \\ \underline{Z}_2 &= 8 \, \Omega - j16 \, \Omega \quad (8) \end{aligned}$$

Nun kann \underline{Z}_1 aufgestellt werden:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_{C1} + \underline{Z}_X = -j24 \, \Omega + \underline{Z}_X \quad (2)$$

Diese Werte können in die **Abgleichbedingung** eingesetzt werden. Anschließend wird die Gleichung nach \underline{Z}_X aufgelöst.

$$\begin{aligned}
 \frac{\underline{R}_1}{\underline{R}_2} &= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \\
 \frac{80\,\Omega}{160\,\Omega} &= \frac{-j24\,\Omega + \underline{Z}_X}{8\,\Omega - j16\,\Omega} \\
 \frac{1}{2} &= \frac{-j24\,\Omega + \underline{Z}_X}{8\,\Omega - j16\,\Omega} \quad | \cdot (8\,\Omega - j16\,\Omega) \\
 4\,\Omega - j8\,\Omega &= -j24\,\Omega + \underline{Z}_X \quad | + j24\,\Omega \\
 4\,\Omega + j16\,\Omega &= \underline{Z}_X \quad (8)
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung: $\underline{Z}_X = 4\,\Omega + j16\,\Omega$

0.29 KOMPLEX-27

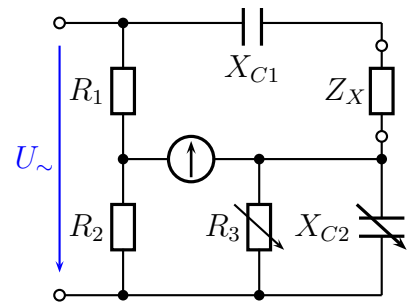
An einer **Scheinwiderstandsmessbrücke** gemäß nebenstehender Schaltung ergeben sich nach Abgleich folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_1 &= 100 \, \Omega; & R_2 &= 200 \, \Omega; \\ R_3 &= 50 \, \Omega & X_{C1} &= 30 \, \Omega; \\ X_{C2} &= 25 \, \Omega \end{aligned}$$

Welchen Scheinwiderstand hat der komplexe Widerstand \underline{Z}_X ? **Lösungshinweis:** Die Abgleichbedingung lautet:

$$\frac{\underline{R}_1}{\underline{R}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$

mit: \underline{Z}_1 bestehend aus \underline{Z}_X und \underline{X}_{C1} und
 \underline{Z}_2 bestehend aus \underline{R}_3 und \underline{X}_{C2} .



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Werte der gegebenen Größen:

$$\underline{R}_1 = 100 \, \Omega; \underline{R}_2 = 200 \, \Omega; \underline{R}_3 = 50 \, \Omega; \underline{X}_{C1} = -j30 \, \Omega; \underline{X}_{C2} = -j25 \, \Omega \quad (2)$$

Als nächstes wird \underline{Z}_2 bestimmt.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{R}_3 \cdot \underline{X}_{C2}}{\underline{R}_3 + \underline{X}_{C2}} \\ &= \frac{50 \, \Omega \cdot (-j25 \, \Omega)}{50 \, \Omega - j25 \, \Omega} \quad | 25 \, \Omega \text{ ausklammern} \\ &= \frac{50 \, \Omega \cdot (-j25 \, \Omega)}{25 \, \Omega \cdot (2 - j)} \quad | \text{ kürzen} \\ &= \frac{-j50 \, \Omega}{2 - j} \quad | \text{ konjugiert komplex erweitern} \\ &= \frac{(-j50 \, \Omega) \cdot (2 + j)}{(2 - j) \cdot (2 + j)} \\ &= \frac{-j100 \, \Omega + 50 \, \Omega}{4 + 1} \\ &= \frac{-j100 \, \Omega + 50 \, \Omega}{5} \\ \underline{Z}_2 &= 10 \, \Omega - j20 \, \Omega \quad (8) \end{aligned}$$

Nun kann \underline{Z}_1 aufgestellt werden:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_{C1} + \underline{Z}_X = -j30 \, \Omega + \underline{Z}_X \quad (2)$$

Diese Werte können in die **Abgleichbedingung** eingesetzt werden. Anschließend wird die Gleichung nach \underline{Z}_X aufgelöst.

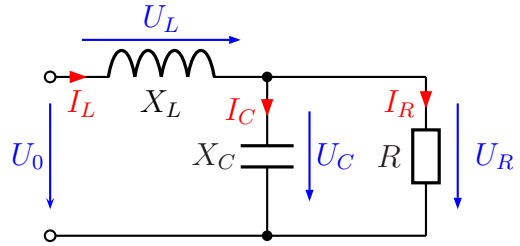
$$\begin{aligned}
 \frac{\underline{R}_1}{\underline{R}_2} &= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \\
 \frac{100\,\Omega}{200\,\Omega} &= \frac{-j30\,\Omega + \underline{Z}_X}{10\,\Omega - j20\,\Omega} \\
 \frac{1}{2} &= \frac{-j30\,\Omega + \underline{Z}_X}{10\,\Omega - j20\,\Omega} \quad | \cdot (10\,\Omega - j20\,\Omega) \\
 5\,\Omega - j10\,\Omega &= 50\,\Omega + \underline{Z}_X \quad | + j30\,\Omega \\
 5\,\Omega + j20\,\Omega &= \underline{Z}_X \quad (8)
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung: $\underline{Z}_X = 5\,\Omega + j20\,\Omega$

0.30 KOMPLEX-28

Berechnen Sie den Strom I_C in nebenstehender Schaltung! Bekannt sind die Werte:

$$\begin{aligned} U_0 &= 10 \text{ V}; & X_L &= 100 \Omega; \\ X_C &= 100 \Omega; & R &= 300 \Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{U}_0 = 10 \text{ V}; \quad \underline{X}_L = j100 \Omega; \quad \underline{X}_C = -j100 \Omega; \quad \underline{R} = 300 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R} und \underline{X}_C zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} \\ &= \frac{300 \Omega \cdot (-j100 \Omega)}{300 \Omega - j100 \Omega} \\ &= \frac{-300 \Omega \cdot j100 \Omega}{100 \Omega \cdot (3 - j1)} \\ &= \frac{-j300 \Omega}{3 - j1} \\ &= \frac{-j300 \Omega \cdot (3 + j1)}{(3 - j1) \cdot (3 + j1)} \\ &= \frac{-j900 \Omega + 300 \Omega}{9 + 1} \\ &= \frac{-j900 \Omega + 300 \Omega}{10} \\ \underline{Z}_1 &= -j90 \Omega + 30 \Omega \quad (5) \end{aligned}$$

Damit können wir den Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_L + \underline{Z}_1 \\ &= j100 \Omega - j90 \Omega + 30 \Omega \\ \underline{Z} &= 30 \Omega + j10 \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Ich bestimme den Gesamtstrom \underline{I}_L , der in der Induktivität (und damit auch in \underline{Z}) fließt.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{10 \text{ V}}{30 \Omega + j10 \Omega} \\
 &= \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega \cdot (3 + j1)} \\
 &= \frac{1 \text{ A}}{3 + j1} \\
 &= \frac{1 \text{ A} \cdot (3 - j1)}{(3 + j1) \cdot (3 - j1)} \\
 &= \frac{3 \text{ A} - j1 \text{ A}}{9 + 1} \\
 &= \frac{3 \text{ A} - j1 \text{ A}}{10} \\
 \underline{I}_L &= 300 \text{ mA} - j100 \text{ mA} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Durch \underline{Z}_1 fließt der gleiche Strom. Damit kann ich die Spannung an \underline{Z}_1 und damit auch an \underline{X}_C bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_C &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_L \\
 &= (-j90 \Omega + 30 \Omega) \cdot (300 \text{ mA} - j100 \text{ mA}) \\
 &= -j27 \text{ V} - 9 \text{ V} + 9 \text{ V} - j3 \text{ V} \\
 \underline{U}_C &= -j30 \text{ V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz erhalte ich \underline{I}_C .

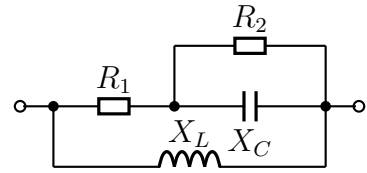
$$\begin{aligned}
 \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_C}{\underline{X}_C} \\
 &= \frac{-j30 \text{ V}}{-j300 \Omega} \\
 \underline{I}_C &= 100 \text{ mA} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Es mag überraschen, dass \underline{I}_C eine **reelle** Größe ist. Das liegt aber daran, dass die Bezugsgröße \underline{U}_0 und nicht \underline{U}_C ist. Der gesuchte Betrag von \underline{I}_C ist dann natürlich auch reell. Ergebnis:

$$\boxed{I_C = 100 \text{ mA}} \quad (1)$$

0.31 KOMPLEX-29

Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand der nebenstehenden Schaltung! Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben. Bekannt sind die folgenden Daten:



$$\begin{aligned} R_1 &= 100 \, \Omega; & R_2 &= 200 \, \Omega; \\ X_C &= 100 \, \Omega; & X_L &= 100 \, \Omega \end{aligned}$$

Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{R}_1 = 100 \, \Omega; \quad \underline{R}_2 = 200 \, \Omega; \quad \underline{X}_C = -j100 \, \Omega; \quad \underline{X}_L = j100 \, \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R}_2 und \underline{X}_C zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C}{\underline{R}_2 + \underline{X}_C} \\ &= \frac{200 \, \Omega \cdot (-j100 \, \Omega)}{200 \, \Omega - j100 \, \Omega} \\ &= \frac{200 \, \Omega \cdot (-j100 \, \Omega)}{100 \, \Omega \cdot (2 - j)} \\ &= \frac{-j200 \, \Omega}{2 - j} \\ &= \frac{-j200 \, \Omega \cdot (2 + j)}{(2 - j) \cdot (2 + j)} \\ &= \frac{-j400 \, \Omega + 200 \, \Omega}{4 + 1} \\ &= \frac{-j400 \, \Omega + 200 \, \Omega}{5} \\ \underline{Z}_1 &= -j80 \, \Omega + 40 \, \Omega \quad (8) \end{aligned}$$

Damit können wir die Reihenschaltung aus \underline{Z}_1 und \underline{R}_1 zu \underline{Z}_2 zusammenfassen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \underline{R}_1 + \underline{Z}_1 \\ &= 100 \, \Omega - j80 \, \Omega + 40 \, \Omega \\ \underline{Z}_2 &= 140 \, \Omega - j80 \, \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Zu \underline{Z}_2 ist \underline{X}_L parallel geschaltet. Das Ergebnis dieser Parallelschaltung ist der gesuchte Wert \underline{Z}_{ges} .

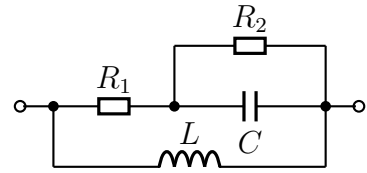
$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{ges} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{X}_L} \\
 &= \frac{(140 \Omega - j80 \Omega) \cdot j100 \Omega}{140 \Omega - j80 \Omega + j100 \Omega} \\
 &= \frac{j14\,000 \Omega^2 + 8\,000 \Omega^2}{140 \Omega + j20 \Omega} \\
 &= \frac{20 \Omega \cdot (j700 \Omega + 400 \Omega)}{20 \Omega \cdot (7 + j)} \\
 &= \frac{j700 \Omega + 400 \Omega}{7 + j} \\
 &= \frac{(j700 \Omega + 400 \Omega) \cdot (7 - j)}{(7 + j) \cdot (7 - j)} \\
 &= \frac{j4\,900 \Omega + 700 \Omega + 2\,800 \Omega - j400 \Omega}{49 + 1} \\
 &= \frac{3\,500 \Omega + j4\,500 \Omega}{50} \\
 \underline{Z}_{ges} &= 70 \Omega + j90 \Omega \quad (8)
 \end{aligned}$$

Ersatzwiderstand der Schaltung: $\underline{Z}_{ges} = 70 \Omega + j90 \Omega$

0.32 KOMPLEX-29a

Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit der konstanter Kreisfrequenz $\omega = 1000 \frac{1}{s}$ betrieben. Bekannt sind die folgenden Daten:

$$\begin{aligned} R_1 &= 100 \Omega; & R_2 &= 200 \Omega; \\ C &= 10 \mu\text{F}; & L &= 100 \text{ mH}; \end{aligned}$$



- Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand der nebenstehenden Schaltung!
- Geben Sie eine Schaltung mit **zwei idealen Bauelementen** an, die für die gegebene Frequenz eine Ersatzschaltung der gegebenen Schaltung darstellt! Geben Sie auch die zugehörigen **Widerstandswerte** sowie ggf. **Induktivität** oder **Kapazität** dieser Bauelemente an!

Lösung a) Zunächst bestimmen wir X_L und X_C :

$$X_L = \omega \cdot L = 1000 \frac{1}{s} \cdot 100 \text{ mH} = 100 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{1000 \frac{1}{s} \cdot 10 \mu\text{F}} = 100 \Omega$$

Jetzt bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{R}_1 = 100 \Omega; \quad \underline{R}_2 = 200 \Omega; \quad \underline{X}_C = -j100 \Omega; \quad \underline{X}_L = j100 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R}_2 und \underline{X}_C zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_C}{\underline{R}_2 + \underline{X}_C} \\ &= \frac{200 \Omega \cdot (-j100 \Omega)}{200 \Omega - j100 \Omega} \\ &= \frac{200 \Omega \cdot (-j100 \Omega)}{100 \Omega \cdot (2 - j)} \\ &= \frac{-j200 \Omega}{2 - j} \\ &= \frac{-j200 \Omega \cdot (2 + j)}{(2 - j) \cdot (2 + j)} \\ &= \frac{-j400 \Omega + 200 \Omega}{4 + 1} \\ &= \frac{-j400 \Omega + 200 \Omega}{5} \\ \underline{Z}_1 &= -j80 \Omega + 40 \Omega \quad (8) \end{aligned}$$

Damit können wir die Reihenschaltung aus \underline{Z}_1 und \underline{R}_1 zu \underline{Z}_2 zusammenfassen.

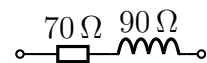
$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= \underline{R}_1 + \underline{Z}_1 \\ &= 100 \Omega - j80 \Omega + 40 \Omega \\ \underline{Z}_2 &= 140 \Omega - j80 \Omega \quad (2)\end{aligned}$$

Zu \underline{Z}_2 ist \underline{X}_L parallel geschaltet. Das Ergebnis dieser Parallelschaltung ist der gesuchte Wert \underline{Z}_{ges} .

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{ges} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{(140 \Omega - j80 \Omega) \cdot j100 \Omega}{140 \Omega - j80 \Omega + j100 \Omega} \\ &= \frac{j14\,000 \Omega^2 + 8\,000 \Omega^2}{140 \Omega + j20 \Omega} \\ &= \frac{20 \Omega \cdot (j700 \Omega + 400 \Omega)}{20 \Omega \cdot (7 + j)} \\ &= \frac{j700 \Omega + 400 \Omega}{7 + j} \\ &= \frac{(j700 \Omega + 400 \Omega) \cdot (7 - j)}{(7 + j) \cdot (7 - j)} \\ &= \frac{j4\,900 \Omega + 700 \Omega + 2\,800 \Omega - j400 \Omega}{49 + 1} \\ &= \frac{3\,500 \Omega + j4\,500 \Omega}{50} \\ \underline{Z}_{ges} &= 70 \Omega + j90 \Omega \quad (8)\end{aligned}$$

Ersatzwiderstand der Schaltung: $\underline{Z}_{ges} = 70 \Omega + j90 \Omega$

Lösung b) Das Ergebnis für \underline{Z}_{ges} hat neben dem Realteil einen **positiven** Imaginärteil. Der Realteil repräsentiert in jedem Fall einen Ohmschen Widerstand, der positive Imaginärteil eine Induktivität. Daher stellt die nebenstehende Schaltung die Ersatzschaltung dar. Die Induktivität muss noch berechnet werden:

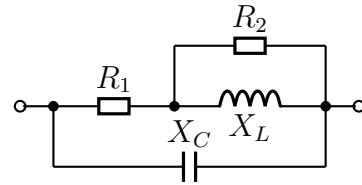


$$X_L^* = \omega \cdot L^* \quad \Rightarrow \quad L^* = \frac{X_L^*}{\omega} = \frac{90 \Omega}{1\,000 \frac{1}{s}} = 90 \text{ mH}$$

0.33 KOMPLEX-30

Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand der nebenstehenden Schaltung! Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben. Bekannt sind die folgenden Daten:

$$\begin{aligned} R_1 &= 20 \, \Omega; & R_2 &= 40 \, \Omega; \\ X_C &= 20 \, \Omega; & X_L &= 20 \, \Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{R}_1 = 20 \, \Omega; \quad \underline{R}_2 = 40 \, \Omega; \quad \underline{X}_C = -j20 \, \Omega; \quad \underline{X}_L = j20 \, \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R}_2 und \underline{X}_L zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{R}_2 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{40 \, \Omega \cdot j20 \, \Omega}{40 \, \Omega + j20 \, \Omega} \\ &= \frac{40 \, \Omega \cdot j20 \, \Omega}{20 \, \Omega \cdot (2 - j)} \\ &= \frac{j40 \, \Omega}{2 - j} \\ &= \frac{j40 \, \Omega \cdot (2 + j)}{(2 - j) \cdot (2 + j)} \\ &= \frac{j80 \, \Omega + 40 \, \Omega}{4 + 1} \\ &= \frac{j80 \, \Omega + 40 \, \Omega}{5} \\ \underline{Z}_1 &= j16 \, \Omega + 8 \, \Omega \quad (8) \end{aligned}$$

Damit können wir die Reihenschaltung aus \underline{Z}_1 und \underline{R}_1 zu \underline{Z}_2 zusammenfassen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \underline{R}_1 + \underline{Z}_1 \\ &= 20 \, \Omega + j16 \, \Omega + 8 \, \Omega \\ \underline{Z}_2 &= 28 \, \Omega + j16 \, \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Zu Z_2 ist X_C parallel geschaltet. Das Ergebnis dieser Parallelschaltung ist der gesuchte Wert Z_{ges} .

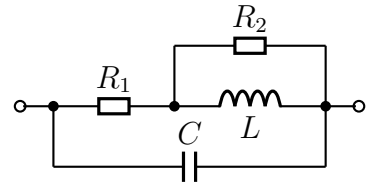
$$\begin{aligned}
 Z_{ges} &= \frac{Z_2 \cdot X_C}{Z_2 + X_C} \\
 &= \frac{(28 \Omega + j16 \Omega) \cdot (-j20 \Omega)}{28 \Omega + j16 \Omega - j20 \Omega} \\
 &= \frac{-j560 \Omega^2 + 320 \Omega^2}{28 \Omega - j4 \Omega} \\
 &= \frac{4 \Omega \cdot (-j140 \Omega + 80 \Omega)}{4 \Omega \cdot (7 - j)} \\
 &= \frac{-j140 \Omega + 80 \Omega}{7 - j} \\
 &= \frac{(-j140 \Omega + 80 \Omega) \cdot (7 + j)}{(7 - j) \cdot (7 + j)} \\
 &= \frac{-j980 \Omega + 140 \Omega + 560 \Omega + j80 \Omega}{49 + 1} \\
 &= \frac{700 \Omega - j900 \Omega}{50} \\
 Z_{ges} &= 14 \Omega - j18 \Omega \quad (8)
 \end{aligned}$$

Ersatzwiderstand der Schaltung: $Z_{ges} = 14 \Omega - j18 \Omega$

0.34 KOMPLEX-30a

Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit der konstanter Kreisfrequenz $\omega = 500 \frac{1}{s}$ betrieben. Bekannt sind die folgenden Daten:

$$\begin{aligned} R_1 &= 20 \Omega; & C &= 100 \mu\text{F}; \\ R_2 &= 40 \Omega; & L &= 40 \text{ mH}; \end{aligned}$$



- Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand der nebenstehenden Schaltung!
- Geben Sie eine Schaltung mit **zwei idealen Bauelementen** an, die für die gegebene Frequenz eine Ersatzschaltung der gegebenen Schaltung darstellt! Geben Sie auch die zugehörigen **Widerstandswerte** sowie ggf. **Induktivität** oder **Kapazität** dieser Bauelemente an!

Lösung: Zunächst werden X_C und X_L berechnet:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{500 \frac{1}{s} \cdot 100 \mu\text{F}} = 20 \Omega \quad (2)$$

$$X_L = \omega \cdot L = 500 \frac{1}{s} \cdot 40 \text{ mH} = 20 \Omega \quad (2)$$

Nun bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{R}_1 = 20 \Omega; \quad \underline{R}_2 = 40 \Omega; \quad \underline{X}_C = -j20 \Omega; \quad \underline{X}_L = j20 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R}_2 und \underline{X}_L zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{R}_2 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{40 \Omega \cdot j20 \Omega}{40 \Omega + j20 \Omega} \\ &= \frac{40 \Omega \cdot j20 \Omega}{20 \Omega \cdot (2 - j)} \\ &= \frac{j40 \Omega}{2 - j} \\ &= \frac{j40 \Omega \cdot (2 + j)}{(2 - j) \cdot (2 + j)} \\ &= \frac{j80 \Omega + 40 \Omega}{4 + 1} \\ &= \frac{j80 \Omega + 40 \Omega}{5} \\ \underline{Z}_1 &= j16 \Omega + 8 \Omega \quad (7) \end{aligned}$$

Damit können wir die Reihenschaltung aus \underline{Z}_1 und \underline{R}_1 zu \underline{Z}_2 zusammenfassen.

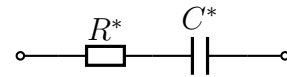
$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= \underline{R}_1 + \underline{Z}_1 \\ &= 20\,\Omega + j16\,\Omega + 8\,\Omega \\ \underline{Z}_2 &= 28\,\Omega + j16\,\Omega \quad (2)\end{aligned}$$

Zu Z_2 ist X_C parallel geschaltet. Das Ergebnis dieser Parallelschaltung ist der gesuchte Wert Z_{ges} .

$$\begin{aligned}
 Z_{ges} &= \frac{Z_2 \cdot X_C}{Z_2 + X_C} \\
 &= \frac{(28 \Omega + j16 \Omega) \cdot (-j20 \Omega)}{28 \Omega + j16 \Omega - j20 \Omega} \\
 &= \frac{-j560 \Omega^2 + 320 \Omega^2}{28 \Omega - j4 \Omega} \\
 &= \frac{4 \Omega \cdot (-j140 \Omega + 80 \Omega)}{4 \Omega \cdot (7 - j)} \\
 &= \frac{-j140 \Omega + 80 \Omega}{7 - j} \\
 &= \frac{(-j140 \Omega + 80 \Omega) \cdot (7 + j)}{(7 - j) \cdot (7 + j)} \\
 &= \frac{-j980 \Omega + 140 \Omega + 560 \Omega + j80 \Omega}{49 + 1} \\
 &= \frac{700 \Omega - j900 \Omega}{50} \\
 Z_{ges} &= 14 \Omega - j18 \Omega \quad (7)
 \end{aligned}$$

Ersatzwiderstand der Schaltung: $Z_{ges} = 14 \Omega - j18 \Omega$

Für eine Ersatzschaltung gilt: Der Realteil des Ergebnisses entspricht einem Ohmschen Widerstand, der (negative) Imaginärteil entspricht einem kapazitiven Blindwiderstand. Nebenstehend ist die Schaltung dargestellt, die dazu gehört. Hierbei ist:



$$R^* = 14 \Omega \quad \text{und} \quad X_C^* = 18 \Omega \quad (2)$$

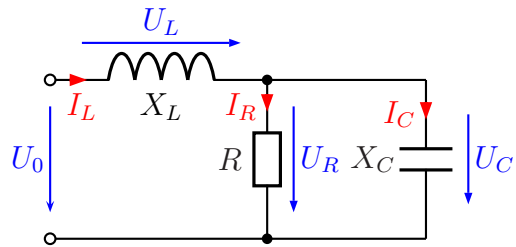
Der kapazitive Widerstand kann dann noch in eine Kapazität umgerechnet werden:

$$X_C^* = \frac{1}{\omega \cdot C^*} \quad \Leftrightarrow \quad C^* = \frac{1}{\omega \cdot X_C^*} = \frac{1}{500 \frac{1}{s} \cdot 18 \Omega} = 111 \mu\text{F} \quad (1)$$

0.35 KOMPLEX-31

Berechnen Sie in nebenstehender Schaltung den Strom I_R ! Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung U_0 mit konstanter Frequenz betrieben. Bekannt sind die Werte:

$$\begin{aligned} U_0 &= 50 \text{ V}; & X_L &= 1 \text{ k}\Omega; \\ X_C &= 1 \text{ k}\Omega; & R &= 2 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$U_0 = 50 \text{ V}; \quad X_L = j1 \text{ k}\Omega; \quad X_C = -j1 \text{ k}\Omega; \quad R = 2 \text{ k}\Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R} und \underline{X}_C zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} \\ &= \frac{2 \text{ k}\Omega \cdot (-j1 \text{ k}\Omega)}{2 \text{ k}\Omega - j1 \text{ k}\Omega} \\ &= \frac{2 \text{ k}\Omega \cdot (-j1 \text{ k}\Omega)}{1 \text{ k}\Omega \cdot (2 - j1)} \\ &= \frac{-j2 \text{ k}\Omega}{2 - j1} \\ &= \frac{-j2 \text{ k}\Omega \cdot (2 + j1)}{(2 - j1) \cdot (2 + j1)} \\ &= \frac{-j4 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega}{4 + 1} \\ &= \frac{-j4 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega}{5} \\ \underline{Z}_1 &= -j800 \Omega + 400 \Omega \quad (5) \end{aligned}$$

Damit können wir den Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_L + \underline{Z}_1 \\ &= j1 \text{ k}\Omega - j800 \Omega + 400 \Omega \\ \underline{Z} &= 400 \Omega + j200 \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Ich bestimme den Gesamtstrom \underline{I}_L , der in der Spule (und damit auch in \underline{Z}) fließt.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{50 \text{ V}}{400 \Omega + j200 \Omega} \\
 &= \frac{50 \text{ V}}{50 \Omega \cdot (8 + j4)} \\
 &= \frac{1 \text{ A}}{8 + j4} \\
 &= \frac{1 \text{ A} \cdot (8 - j4)}{(8 + j4) \cdot (8 - j4)} \\
 &= \frac{8 \text{ A} - j4 \text{ A}}{64 + 16} \\
 &= \frac{8 \text{ A} - j4 \text{ A}}{80} \\
 \underline{I}_L &= 100 \text{ mA} - j50 \text{ mA} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Durch \underline{Z}_1 fließt der gleiche Strom. Damit kann ich die Spannung an \underline{Z}_1 und damit auch an \underline{R} bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_R &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_L \\
 &= (-j800 \Omega + 400 \Omega) \cdot (100 \text{ mA} - j50 \text{ mA}) \\
 &= -j80 \text{ V} - 40 \text{ V} + 40 \text{ V} - j20 \text{ V} \\
 \underline{U}_R &= -j100 \text{ V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz am Widerstand \underline{R} erhalte ich \underline{I}_R :

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_R}{\underline{R}} \\
 &= \frac{-j100 \text{ V}}{2 \text{ k}\Omega} \\
 \underline{I}_R &= -j50 \text{ mA} \quad (2)
 \end{aligned}$$

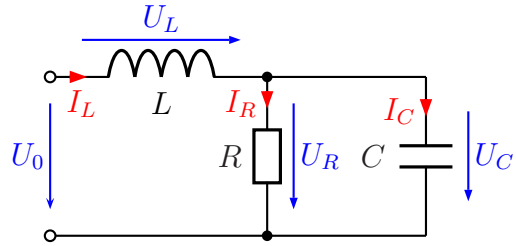
Es mag überraschen, dass \underline{I}_R eine rein **imaginäre** Größe ist. Das liegt aber daran, dass die Bezugsgröße \underline{U}_0 und nicht \underline{U}_R ist. Der gesuchte Betrag von \underline{I}_R ist dann der Betrag davon:

$$\boxed{I_R = 50 \text{ mA}} \quad (1)$$

0.36 KOMPLEX-31a

Berechnen Sie in nebenstehender Schaltung den Strom I_R ! Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung U_0 mit der konstanten Kreisfrequenz $\omega = 2000 \frac{1}{s}$ betrieben. Bekannt sind folgende Werte:

$$U_0 = 50 \text{ V}; \quad L = 500 \text{ mH}; \\ C = 0,5 \mu\text{F}; \quad R = 2 \text{ k}\Omega$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir X_L und X_C :

$$X_L = \omega \cdot L = 2000 \frac{1}{s} \cdot 500 \text{ mH} = 1 \text{ k}\Omega \quad (2, 5)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2000 \frac{1}{s} \cdot 0,5 \mu\text{F}} = 1 \text{ k}\Omega \quad (2, 5)$$

Jetzt bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{U}_0 = 50 \text{ V}; \quad \underline{X}_L = j1 \text{ k}\Omega; \quad \underline{X}_C = -j1 \text{ k}\Omega; \quad \underline{R} = 2 \text{ k}\Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R} und \underline{X}_C zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} \\ &= \frac{2 \text{ k}\Omega \cdot (-j1 \text{ k}\Omega)}{2 \text{ k}\Omega - j1 \text{ k}\Omega} \\ &= \frac{2 \text{ k}\Omega \cdot (-j1 \text{ k}\Omega)}{1 \text{ k}\Omega \cdot (2 - j1)} \\ &= \frac{-j2 \text{ k}\Omega}{2 - j1} \\ &= \frac{-j2 \text{ k}\Omega \cdot (2 + j1)}{(2 - j1) \cdot (2 + j1)} \\ &= \frac{-j4 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega}{4 + 1} \\ &= \frac{-j4 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega}{5} \\ \underline{Z}_1 &= -j800 \Omega + 400 \Omega \quad (5) \end{aligned}$$

Damit können wir den Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_L + \underline{Z}_1 \\ &= j1 \text{ k}\Omega - j800 \Omega + 400 \Omega \\ \underline{Z} &= 400 \Omega + j200 \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Ich bestimme den Gesamtstrom \underline{I}_L , der in der Spule (und damit auch in \underline{Z}) fließt.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{50 \text{ V}}{400 \Omega + j200 \Omega} \\
 &= \frac{50 \text{ V}}{50 \Omega \cdot (8 + j4)} \\
 &= \frac{1 \text{ A}}{8 + j4} \\
 &= \frac{1 \text{ A} \cdot (8 - j4)}{(8 + j4) \cdot (8 - j4)} \\
 &= \frac{8 \text{ A} - j4 \text{ A}}{64 + 16} \\
 &= \frac{8 \text{ A} - j4 \text{ A}}{80} \\
 \underline{I}_L &= 100 \text{ mA} - j50 \text{ mA} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Durch \underline{Z}_1 fließt der gleiche Strom. Damit kann ich die Spannung an \underline{Z}_1 und damit auch an \underline{R} bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_R &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_L \\
 &= (-j800 \Omega + 400 \Omega) \cdot (100 \text{ mA} - j50 \text{ mA}) \\
 &= -j80 \text{ V} - 40 \text{ V} + 40 \text{ V} - j20 \text{ V} \\
 \underline{U}_R &= -j100 \text{ V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz am Widerstand \underline{R} erhalte ich \underline{I}_R :

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_R}{\underline{R}} \\
 &= \frac{-j100 \text{ V}}{2 \text{ k}\Omega} \\
 \underline{I}_R &= -j50 \text{ mA} \quad (2)
 \end{aligned}$$

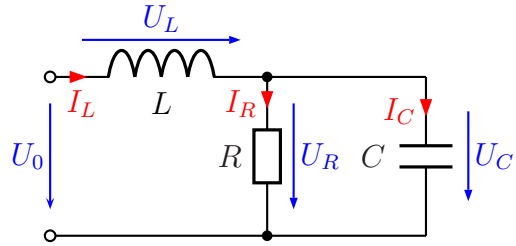
Es mag überraschen, dass \underline{I}_R eine rein **imaginäre** Größe ist. Das liegt aber daran, dass die Bezugsgröße \underline{U}_0 und nicht \underline{U}_R ist. Der gesuchte Betrag von \underline{I}_R ist dann der Betrag davon:

$$\boxed{I_R = 50 \text{ mA}} \quad (1)$$

0.37 KOMPLEX-31b

Berechnen Sie in nebenstehender Schaltung den Strom I_R ! Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung U_0 mit der konstanten Kreisfrequenz $\omega = 5\,000 \frac{1}{s}$ betrieben. Bekannt sind folgende Werte:

$$\begin{aligned} U_0 &= 100 \text{ V}; & L &= 100 \text{ mH}; \\ C &= 0,4 \mu\text{F}; & R &= 1 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir X_L und X_C :

$$X_L = \omega \cdot L = 5\,000 \frac{1}{s} \cdot 100 \text{ mH} = 500 \Omega \quad (2,5)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{5\,000 \frac{1}{s} \cdot 0,4 \mu\text{F}} = 500 \Omega \quad (2,5)$$

Jetzt bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{U}_0 = 100 \text{ V}; \quad \underline{X}_L = j500 \Omega; \quad \underline{X}_C = -j500 \Omega; \quad \underline{R} = 1 \text{ k}\Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus \underline{R} und \underline{X}_C zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} \\ &= \frac{1 \text{ k}\Omega \cdot (-j0,5 \text{ k}\Omega)}{1 \text{ k}\Omega - j0,5 \text{ k}\Omega} \\ &= \frac{1 \text{ k}\Omega \cdot (-j0,5 \text{ k}\Omega)}{1 \text{ k}\Omega \cdot (1 - j0,5)} \\ &= \frac{-j0,5 \text{ k}\Omega}{1 - j0,5} \\ &= \frac{-j0,5 \text{ k}\Omega \cdot (1 + j0,5)}{(1 - j0,5) \cdot (1 + j0,5)} \\ &= \frac{-j0,5 \text{ k}\Omega + 0,25 \text{ k}\Omega}{1 + 0,25} \\ &= \frac{-j0,5 \text{ k}\Omega + 0,25 \text{ k}\Omega}{1,25} \\ \underline{Z}_1 &= -j400 \Omega + 200 \Omega \quad (5) \end{aligned}$$

Damit können wir den Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_L + \underline{Z}_1 \\ &= j500 \Omega - j400 \Omega + 200 \Omega \\ \underline{Z} &= 200 \Omega + j100 \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Ich bestimme den Gesamtstrom \underline{I}_L , der in der Spule (und damit auch in \underline{Z}) fließt.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{100 \text{ V}}{200 \Omega + j100 \Omega} \\
 &= \frac{100 \text{ V}}{100 \Omega \cdot (2 + j1)} \\
 &= \frac{1 \text{ A}}{2 + j1} \\
 &= \frac{1 \text{ A} \cdot (2 - j1)}{(2 + j1) \cdot (2 - j1)} \\
 &= \frac{2 \text{ A} - j1 \text{ A}}{4 + 1} \\
 &= \frac{2 \text{ A} - j1 \text{ A}}{5} \\
 \underline{I}_L &= 400 \text{ mA} - j200 \text{ mA} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Durch \underline{Z}_1 fließt der gleiche Strom. Damit kann ich die Spannung an \underline{Z}_1 und damit auch an \underline{R} bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_R &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_L \\
 &= (-j400 \Omega + 200 \Omega) \cdot (400 \text{ mA} - j200 \text{ mA}) \\
 &= -j160 \text{ V} - 80 \text{ V} + 80 \text{ V} - j40 \text{ V} \\
 \underline{U}_R &= -j200 \text{ V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz am Widerstand \underline{R} erhalte ich \underline{I}_R :

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_R}{\underline{R}} \\
 &= \frac{-j200 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} \\
 \underline{I}_R &= -j200 \text{ mA} \quad (2)
 \end{aligned}$$

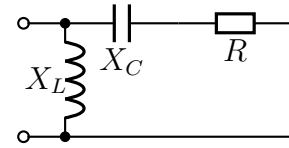
Es mag überraschen, dass \underline{I}_R eine rein **imaginäre** Größe ist. Das liegt aber daran, dass die Bezugsgröße \underline{U}_0 und nicht \underline{U}_R ist. Der gesuchte Betrag von \underline{I}_R ist dann der Betrag davon:

$$\boxed{I_R = 200 \text{ mA}} \quad (1)$$

0.38 KOMPLEX-32

Bestimmen Sie den kapazitiven Blindwiderstand \underline{X}_C so, dass der Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung **reell** wird (Kompensation)! Bekannt sind die Werte:

$R = 15 \Omega$ und $X_L = 50 \Omega$.



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\begin{aligned}\underline{R} &= 15 \Omega \\ \underline{X}_L &= j50 \Omega \\ \underline{X}_C &= -jX \quad (2)\end{aligned}$$

Es muss also nur noch die **reelle** Größe X berechnet werden.

Die Zusammenfassung der Reihenschaltung aus X_C und R nenne ich Z_1 . Damit ergibt sich:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_C + \underline{R} = -jX + 15 \Omega \quad (2)$$

Parallel zu Z_1 liegt X_L . Also kann der Gesamtwiderstand \underline{Z} mit der Formel für die Parallelschaltungen berechnet werden.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{(-jX + 15 \Omega) \cdot j50 \Omega}{-jX + 15 \Omega + j50 \Omega} \\ \underline{Z} &= \frac{50 \Omega X + j750 \Omega^2}{15 \Omega - jX + j50 \Omega} \quad (3)\end{aligned}$$

Da bekannt ist, dass der Imaginärteil von \underline{Z} gleich Null ist, kann ich \underline{Z} durch Z ersetzen. Dadurch ist es dann möglich, dass die Gleichung in eine Lineare Gleichung umgewandelt und dann in eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen aufgespalten wird.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= Z \\ Z &= \frac{50 \Omega X + j750 \Omega^2}{15 \Omega - jX + j50 \Omega} \quad | \cdot (15 \Omega - jX + j50 \Omega) \\ (15 \Omega - jX + j50 \Omega) \cdot Z &= 50 \Omega X + j750 \Omega^2 \\ 15 \Omega Z - jXZ + j50 \Omega Z &= 50 \Omega X + j750 \Omega^2 \quad (4)\end{aligned}$$

Aufspalten in Realteilgleichung und Imaginärteilgleichung:

$$\begin{aligned}\text{Re:} \quad 15 \Omega Z &= 50 \Omega X \\ \text{Im:} \quad -XZ + 50 \Omega Z &= 750 \Omega^2 \quad (2)\end{aligned}$$

Ich stelle die Realteilgleichung nach Z um und setze das Ergebnis in die Imaginärteilgleichung ein:

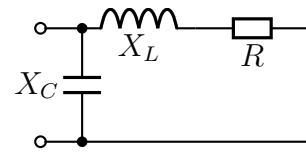
$$\begin{array}{rcll}
 \text{Re:} & 15 \Omega Z & = & 50 \Omega X & | : 15 \Omega \\
 & Z & = & \frac{50 \Omega}{15 \Omega} X & \\
 & Z & = & \frac{10}{3} X & (2) \\
 \text{Im:} & -XZ + 50 \Omega Z & = & 750 \Omega^2 & | \text{ einsetzen:} \\
 & -X \cdot \left(\frac{10}{3} X\right) + 50 \Omega \cdot \frac{10}{3} X & = & 750 \Omega^2 & | \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) \\
 & X^2 - 50 \Omega X & = & -225 \Omega^2 & | + 225 \Omega^2 \\
 & X^2 - 50 \Omega X + 225 \Omega^2 & = & 0 & \\
 & X_{1/2} & = & 25 \Omega \pm \sqrt{625 \Omega^2 - 225 \Omega^2} & \\
 & & = & 25 \Omega \pm \sqrt{400 \Omega^2} & \\
 & X_{1/2} & = & 25 \Omega \pm 20 \Omega &
 \end{array}$$

Wir erhalten also 2 Lösungen: $X_{C1} = 45 \Omega$ und $X_{C2} = 5 \Omega$ (5)

0.39 KOMPLEX-33

Bestimmen Sie den induktiven Blindwiderstand \underline{X}_L so, dass der Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung **reell** wird (Kompensation)! Bekannt sind die Werte:

$R = 12 \Omega$ und $X_C = 40 \Omega$.



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\begin{aligned}\underline{R} &= 12 \Omega \\ \underline{X}_C &= -j40 \Omega \\ \underline{X}_L &= jX \quad (2)\end{aligned}$$

Es muss also nur noch die **reelle** Größe X berechnet werden.

Die Zusammenfassung der Reihenschaltung aus X_L und R nenne ich Z_1 . Damit ergibt sich:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_L + \underline{R} = jX + 12 \Omega \quad (2)$$

Parallel zu Z_1 liegt X_C . Also kann der Gesamtwiderstand \underline{Z} mit der Formel für die Parallelschaltungen berechnet werden.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_C} \\ &= \frac{(jX + 12 \Omega) \cdot (-j40 \Omega)}{jX + 12 \Omega - j40 \Omega} \\ \underline{Z} &= \frac{40 \Omega X - j480 \Omega^2}{12 \Omega + jX - j40 \Omega} \quad (3)\end{aligned}$$

Da bekannt ist, dass der Imaginärteil von \underline{Z} gleich Null ist, kann ich \underline{Z} durch Z ersetzen. Dadurch ist es dann möglich, dass die Gleichung in eine Lineare Gleichung umgewandelt und dann in eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen aufgespalten wird.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= Z \\ Z &= \frac{40 \Omega X - j480 \Omega^2}{12 \Omega + jX - j40 \Omega} \quad | \cdot (12 \Omega + jX - j40 \Omega) \\ (12 \Omega + jX - j40 \Omega) \cdot Z &= 40 \Omega X - j480 \Omega^2 \\ 12 \Omega Z + jXZ - j40 \Omega Z &= 40 \Omega X - j480 \Omega^2 \quad (4)\end{aligned}$$

Aufspalten in Realteilgleichung und Imaginärteilgleichung:

$$\begin{aligned}\text{Re:} \quad 12 \Omega Z &= 40 \Omega X \\ \text{Im:} \quad XZ - 40 \Omega Z &= -480 \Omega^2 \quad (2)\end{aligned}$$

Ich stelle die Realteilgleichung nach Z um und setze das Ergebnis in die Imaginärteilgleichung ein:

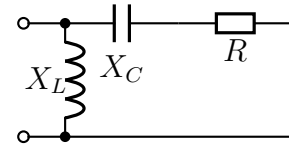
$$\begin{array}{rcll}
 \text{Re:} & 12 \Omega Z & = & 40 \Omega X & | : 12 \Omega \\
 & Z & = & \frac{40 \Omega}{12 \Omega} X & \\
 & Z & = & \frac{10}{3} X & (2) \\
 \text{Im:} & X Z - 40 \Omega Z & = & -480 \Omega^2 & | \text{ einsetzen:} \\
 & X \cdot \left(\frac{10}{3} X\right) - 40 \Omega \cdot \frac{10}{3} X & = & -480 \Omega^2 & | \cdot \frac{3}{10} \\
 & X^2 - 40 \Omega X & = & -144 \Omega^2 & | + 144 \Omega^2 \\
 & X^2 - 40 \Omega X + 144 \Omega^2 & = & 0 & \\
 & X_{1/2} & = & 20 \Omega \pm \sqrt{400 \Omega^2 - 144 \Omega^2} & \\
 & & = & 20 \Omega \pm \sqrt{256 \Omega^2} & \\
 & X_{1/2} & = & 20 \Omega \pm 16 \Omega &
 \end{array}$$

Wir erhalten also 2 Lösungen: $X_{L1} = 36 \Omega$ und $X_{L2} = 4 \Omega$ (5)

0.40 KOMPLEX-33b

Bestimmen Sie den induktiven Blindwiderstand \underline{X}_L so, dass der Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung **reell** wird (Kompensation)! Bekannt sind die Werte:

$R = 12 \Omega$ und $X_C = 36 \Omega$.



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\begin{aligned}\underline{R} &= 12 \Omega \\ \underline{X}_C &= -j36 \Omega \\ \underline{X}_L &= jX \quad (2)\end{aligned}$$

Es muss also nur noch die **reelle** Größe X berechnet werden.

Die Zusammenfassung der Reihenschaltung aus X_C und R nenne ich Z_1 . Damit ergibt sich:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_C + \underline{R} = -j36 \Omega + 12 \Omega \quad (2)$$

Parallel zu Z_1 liegt X_L . Also kann der Gesamtwiderstand \underline{Z} mit der Formel für die Parallelschaltungen berechnet werden.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_L} \\ \underline{Z} &= \frac{(-j36 \Omega + 12 \Omega) \cdot jX}{(-j36 \Omega + 12 \Omega) + jX} \quad (3)\end{aligned}$$

Da bekannt ist, dass der Imaginärteil von \underline{Z} gleich Null ist, kann ich \underline{Z} durch Z ersetzen. Dadurch ist es dann möglich, dass die Gleichung in eine Lineare Gleichung umgewandelt und anschließend in eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen aufgespalten wird.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= Z \\ Z &= \frac{(-j36 \Omega + 12 \Omega) \cdot jX}{-j36 \Omega + 12 \Omega + jX} \quad | \cdot (-j36 \Omega + 12 \Omega + jX) \\ (-j36 \Omega + 12 \Omega + jX) \cdot Z &= (-j36 \Omega + 12 \Omega) \cdot jX \\ -j36 \Omega Z + 12 \Omega Z + jXZ &= 36 \Omega X + j12 \Omega X \quad (4)\end{aligned}$$

Aufspalten in Realteilgleichung und Imaginärteilgleichung:

$$\begin{aligned}\text{Re:} \quad 12 \Omega Z &= 36 \Omega X \\ \text{Im:} \quad XZ - 36 \Omega Z &= 12 \Omega X \quad (2)\end{aligned}$$

Ich stelle die Realteilgleichung nach Z um und setze das Ergebnis in die Imaginärteilgleichung ein:

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Re:} & 12\Omega Z & = & 36\Omega X \quad | : 12\Omega \\
 & Z & = & 3X \quad (2) \\
 \text{Im:} & XZ - 36\Omega Z & = & 12\Omega X \quad | \text{ einsetzen:} \\
 & X \cdot 3X - 36\Omega \cdot 3X & = & 12\Omega X \\
 & 3X^2 - 108\Omega X & = & 12\Omega X \quad | - 12\Omega X \\
 & 3X^2 - 120\Omega X & = & 0 \\
 & X \cdot (3X - 120\Omega) & = & 0 \\
 & X_1 & = & 0 \quad (\text{entfällt}) \\
 & 3X_2 - 120\Omega & = & 0 \quad | + 120\Omega \\
 & 3X_2 & = & 120\Omega \quad | : 3 \\
 & X_2 & = & 40\Omega
 \end{array}$$

Wir erhalten damit die Lösung: $\underline{X}_L = j40\Omega$ (5)

0.41 KOMPLEX-34

Bestimmen Sie die reelle Größe x so, dass der Imaginärteil des Terms \underline{Z} **Null** wird und bestimmen Sie den Wert von \underline{Z} !

$$\underline{Z} = \frac{(3 - j6) \cdot (2x - j4)}{2 - j5}$$

Lösung: Da \underline{Z} **reell** werden soll, kann ich \underline{Z} durch Z ersetzen.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{(3 - j6) \cdot (2x - j4)}{2 - j5} \\ Z &= \frac{(3 - j6) \cdot (2x - j4)}{2 - j5} \quad | \cdot (2 - j5) \\ (2 - j5) \cdot Z &= (3 - j6) \cdot (2x - j4) \\ 2Z - j5Z &= 6x - j12 - j12x - 24\end{aligned}$$

Wir haben eine **Lineare** Gleichung erhalten. Die können wir in eine **Reelle** und eine **Imaginäre** Gleichung aufspalten. Das so entstandene Lineargleichungssystem löse ich mit dem **Additionsverfahren**.

$$\begin{array}{rcll} \text{Re:} & 2Z & = & 6x - 24 \quad | \cdot 2 \\ \text{Im:} & -5Z & = & -12 - 12x \\ \hline \text{Re:} & 4Z & = & 12x - 48 \quad | \\ \text{Im:} & -5Z & = & -12x - 12 \quad | + \\ \hline & -Z & = & -60 \quad | : (-1) \\ & Z & = & 60 \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in die Realteilgleichung ein.

$$\begin{aligned}2Z &= 6x - 24 \\ 2 \cdot 60 &= 6x - 24 \\ 120 &= 6x - 24 \quad | + 24 \\ 144 &= 6x \quad | : 6 \\ 24 &= x\end{aligned}$$

Die Lösungen lauten: $x = 24 \quad \underline{Z} = 60$

0.42 KOMPLEX-35

Bestimmen Sie die reelle Größe x so, dass der Imaginärteil von \underline{Z} zu 0 wird und bestimmen Sie den Wert des Terms \underline{Z} .

$$\underline{Z} = \frac{12 - j2(2x - 8)}{3 - j2}$$

Aus: $\text{Im } \underline{Z} = 0$ folgt: $\underline{Z} = Z$

$$\underline{Z} = \frac{12 - j2(2x - 8)}{3 - j2}$$

$$Z = \frac{12 - j2(2x - 8)}{3 - j2} \quad | \cdot (3 - j2) \quad (2)$$

$$3Z - j2Z = 12 - j2(2x - 8)$$

$$3Z - j2Z = 12 - j4x + j16 \quad (4)$$

Diese Gleichung kann nun in eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen aufgespalten werden.

$$\text{Re:} \quad 3Z = 12 \quad (3)$$

$$\text{Im:} \quad -2Z = -4x + 16 \quad (3)$$

Aus Gleichung (Re) ergibt sich:

$$3Z = 12 \quad | : 3$$

$$Z = 4 \quad (4)$$

Eingesetzt in Gleichung (Im) erhalten wir:

$$-2Z = -4x + 16$$

$$-2 \cdot 4 = -4x + 16$$

$$-8 = -4x + 16 \quad | - 16$$

$$-24 = -4x \quad | : (-4)$$

$$6 = x \quad (4)$$

0.43 KOMPLEX-36

Bestimmen Sie die reelle Größe x so, dass der Imaginärteil von \underline{Z} zu 0 wird und bestimmen Sie den Wert des Terms \underline{Z} .

$$\underline{Z} = \frac{18 - j3(3x - 8)}{6 - j4}$$

Aus: $\text{Im } \underline{Z} = 0$ folgt: $\underline{Z} = Z$

$$\underline{Z} = \frac{18 - j3(3x - 8)}{6 - j4}$$

$$Z = \frac{18 - j3(3x - 8)}{6 - j4} \quad | \cdot (6 - j4) \quad (2)$$

$$6Z - j4Z = 18 - j3(3x - 8)$$

$$6Z - j4Z = 18 - j9x + j24 \quad (4)$$

Diese Gleichung kann nun in eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen aufgespalten werden.

$$\text{Re:} \quad 6Z = 18 \quad (3)$$

$$\text{Im:} \quad -4Z = -9x + 24 \quad (3)$$

Aus Gleichung (Re) ergibt sich:

$$6Z = 18 \quad | : 6$$

$$Z = 3 \quad (4)$$

Eingesetzt in Gleichung (Im) erhalten wir:

$$-4Z = -9x + 24$$

$$-4 \cdot 3 = -9x + 24$$

$$-12 = -9x + 24 \quad | - 24$$

$$-36 = -9x \quad | : (-9)$$

$$4 = x \quad (4)$$

0.44 KOMPLEX-37

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des nachfolgenden Komplexen Gleichungssystems!

$$\begin{aligned}(1 + j2) \cdot \underline{x} - (3 - j4) \cdot \underline{y} &= -20 + j30 \\ (3 - j) \cdot \underline{x} + (2 - j2) \cdot \underline{y} &= 16 + j2\end{aligned}$$

Die Lösung führe ich mit der **Cramerschen Regel** durch.

$$\begin{aligned}\underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix} (-20 + j30) & (-3 + j4) \\ (16 + j2) & (2 - j2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 + j2) & (-3 + j4) \\ (3 - j) & (2 - j2) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(-20 + j30) \cdot (2 - j2) - (16 + j2) \cdot (-3 + j4)}{(1 + j2) \cdot (2 - j2) - (3 - j) \cdot (-3 + j4)} \\ &= \frac{(-40 + j40 + j60 + 60) - (-48 + j64 - j6 - 8)}{(2 - j2 + j4 + 4) - (-9 + j12 + j3 + 4)} \\ &= \frac{-40 + j40 + j60 + 60 + 48 - j64 + j6 + 8}{2 - j2 + j4 + 4 + 9 - j12 - j3 - 4} \\ &= \frac{76 + j42}{11 - j13} \\ &= \frac{(76 + j42) \cdot (11 + j13)}{(11 - j13) \cdot (11 + j13)} \\ &= \frac{836 + j988 + j462 - 546}{121 + 169} \\ &= \frac{290 + j1450}{290} \\ \underline{x} &= 1 + j5 \quad (12)\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die erste Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 (1 + j2) \cdot \underline{x} - (3 - j4) \cdot \underline{y} &= -20 + j30 \\
 (1 + j2) \cdot (1 + j5) - (3 - j4) \cdot \underline{y} &= -20 + j30 \\
 1 + j5 + j2 - 10 - (3 - j4) \cdot \underline{y} &= -20 + j30 \\
 -9 + j7 - (3 - j4) \cdot \underline{y} &= -20 + j30 \quad | + 9 - j7 \\
 (-3 + j4) \cdot \underline{y} &= -11 + j23 \quad | : (-3 + j4) \\
 \underline{y} &= \frac{-11 + j23}{-3 + j4} \\
 \underline{y} &= \frac{(-11 + j23) \cdot (-3 - j4)}{(-3 + j4) \cdot (-3 - j4)} \\
 \underline{y} &= \frac{33 + j44 - j69 + 92}{9 + 16} \\
 \underline{y} &= \frac{125 - j25}{25} \\
 \underline{y} &= 5 - j \quad (8)
 \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{(1 + j5) | (5 - j)\}$

0.45 KOMPLEX-38

Zerlegen Sie \underline{z} in **Realteil** und **Imaginärteil** und bestimmen Sie den **Betrag** und das **Argument** von \underline{z} !

$$\underline{z} = \frac{-16}{j2} + \frac{4 + j20}{2 - j3} - 1$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\underline{z} &= \frac{-16}{j2} + \frac{4 + j20}{2 - j3} - 1 \\ &= \frac{-j16}{j^2 2} + \frac{(4 + j20) \cdot (2 + j3)}{(2 - j3) \cdot (2 + j3)} - 1 \quad (4) \\ &= \frac{-j16}{-2} + \frac{8 + j12 + j40 - 60}{4 + 9} - 1 \\ &= j8 + \frac{-52 + j52}{13} - 1 \quad (5) \\ &= j8 - 4 + j4 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{z} &= -5 + j12 \\ \operatorname{Re}\underline{z} &= -5 \quad \operatorname{Im}\underline{z} = 12 \quad (3)\end{aligned}$$

Betrag:

$$z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{z})^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = 13 \quad (4)$$

Argument: Da der Realteil **negativ** ist, muss 180° zum Ergebnis hinzuaddiert werden:

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im}\underline{z}}{\operatorname{Re}\underline{z}} + 180^\circ = \arctan \frac{12}{-5} + 180^\circ \approx -67,38^\circ + 180^\circ = 112,62^\circ \quad (4)$$

0.46 KOMPLEX-39

Zerlegen Sie \underline{z} in **Realteil** und **Imaginärteil** und bestimmen Sie den **Betrag** und das **Argument** von \underline{z} !

$$\underline{z} = \frac{-2}{j2} + \frac{-18 + j64}{7 - j6} - 6$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\underline{z} &= \frac{-2}{j2} + \frac{-18 + j64}{7 - j6} - 6 \\ &= \frac{-j2}{j^2 2} + \frac{(-18 + j64) \cdot (7 + j6)}{(7 - j6) \cdot (7 + j6)} - 6 \quad (4) \\ &= \frac{-j2}{-2} + \frac{-126 - j108 + j448 - 384}{49 + 36} - 6 \\ &= j + \frac{-510 + j340}{85} - 6 \quad (5) \\ &= j - 6 + j4 - 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{z} &= -12 + j5 \\ \operatorname{Re}\underline{z} &= -12 \quad \operatorname{Im}\underline{z} = 5 \quad (3)\end{aligned}$$

Betrag:

$$z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{z})^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = 13 \quad (4)$$

Argument: Da der Realteil **negativ** ist, muss 180° zum Ergebnis hinzuaddiert werden:

$$\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im}\underline{z}}{\operatorname{Re}\underline{z}} + 180^\circ = \arctan \frac{5}{-12} + 180^\circ \approx -22,62^\circ + 180^\circ = 157,38^\circ \quad (4)$$

0.47 KOMPLEX-40

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der **Komplexen Gleichung!** Bestimmen Sie auch die **Definitionsmenge!**

$$\frac{3\underline{x} + j2\underline{x}}{6\underline{x} - j2} - \frac{j3\underline{x} + 11 + j19}{15\underline{x} - j5} = 0$$

Lösung: Zunächst bestimmen wir den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren:

$$\begin{array}{rcl} 6\underline{x} - j2 & = & 2 \quad \cdot (3\underline{x} - j) \quad | \quad EF = 5 \\ 15\underline{x} - j5 & = & 5 \quad \cdot (3\underline{x} - j) \quad | \quad EF = 2 \\ \hline HN & = & 2 \cdot 5 \cdot (3\underline{x} - j) \quad | \quad (5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{3\underline{x} + j2\underline{x}}{6\underline{x} - j2} - \frac{j3\underline{x} + 11 + j19}{15\underline{x} - j5} &= 0 \quad | \cdot HN \\ (3\underline{x} + j2\underline{x}) \cdot 5 - (j3\underline{x} + 11 + j19) \cdot 2 &= 0 \quad (4) \\ 15\underline{x} + j10\underline{x} - j6\underline{x} - 22 - j38 &= 0 \\ 15\underline{x} + j4\underline{x} - 22 - j38 &= 0 \quad | + 22 + j38 \\ 15\underline{x} + j4\underline{x} &= 22 + j38 \\ \underline{x} \cdot (15 + j4) &= 22 + j38 \quad | : (15 + j4) \\ \underline{x} &= \frac{22 + j38}{15 + j4} \quad (4) \\ \underline{x} &= \frac{(22 + j38) \cdot (15 - j4)}{(15 + j4) \cdot (15 - j4)} \\ \underline{x} &= \frac{330 - j88 + j570 + 152}{225 + 16} \\ \underline{x} &= \frac{482 + j482}{241} \\ \underline{x} &= 2 + j2 \\ L &= \{2 + j2\} \quad (4) \end{aligned}$$

Zusatzfrage Wir müssen prüfen, wo der Hauptnenner=0 wird. Diesen Wert müssen wir aus \mathbb{C} ausschließen.

$$\begin{aligned} 3\underline{x} - j &= 0 \quad | + j \\ 3\underline{x} &= j \quad | : 3 \\ \underline{x} &= \frac{j}{3} \\ D &= \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{j}{3} \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

0.48 KOMPLEX-41

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der **Komplexen Gleichung!** Bestimmen Sie auch die **Definitionsmenge!**

$$\frac{6\underline{x} + j3\underline{x}}{12\underline{x} + j3} - \frac{j4\underline{x} + 32 - j17}{20\underline{x} + j5} = 0$$

Lösung: Zunächst bestimmen wir den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren:

$$\begin{array}{rcl} 12\underline{x} + j3 & = & 3 \quad \cdot (4\underline{x} + j) \quad | \quad EF = 5 \\ 20\underline{x} + j5 & = & 5 \quad \cdot (4\underline{x} + j) \quad | \quad EF = 3 \\ \hline HN & = & 3 \cdot 5 \cdot (4\underline{x} + j) \quad | \quad (5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{6\underline{x} + j3\underline{x}}{12\underline{x} + j3} - \frac{j4\underline{x} + 32 - j17}{20\underline{x} + j5} &= 0 \quad | \cdot HN \\ (6\underline{x} + j3\underline{x}) \cdot 5 - (j4\underline{x} + 32 - j17) \cdot 3 &= 0 \quad (4) \\ 30\underline{x} + j15\underline{x} - j12\underline{x} - 96 + j51 &= 0 \\ 30\underline{x} + j3\underline{x} - 96 + j51 &= 0 \quad | + 96 - j51 \\ 30\underline{x} + j3\underline{x} &= 96 - j51 \\ \underline{x} \cdot (30 + j3) &= 96 - j51 \quad | : (30 + j3) \\ \underline{x} &= \frac{96 - j51}{30 + j3} \quad (4) \\ \underline{x} &= \frac{(96 - j51) \cdot (30 - j3)}{(30 + j3) \cdot (30 - j3)} \\ \underline{x} &= \frac{2880 - j288 - j1530 - 153}{900 + 9} \\ \underline{x} &= \frac{2727 - j1818}{909} \\ \underline{x} &= 3 - j2 \\ L &= \{3 - j2\} \quad (4) \end{aligned}$$

Zusatzfrage Wir müssen prüfen, wo der Hauptnenner=0 wird. Diesen Wert müssen wir aus \mathbb{C} ausschließen.

$$\begin{aligned} 4\underline{x} + j &= 0 \quad | -j \\ 4\underline{x} &= -j \quad | : 4 \\ \underline{x} &= -\frac{j}{4} \\ D &= \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{j}{4} \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

0.49 KOMPLEX-42

Bestimmen Sie die reelle Größe x so, dass der Imaginärteil des Terms \underline{Z} **Null** wird und bestimmen Sie den Wert von \underline{Z} !

$$\underline{Z} = \frac{5 + j(2x + 4)}{2 + j4}$$

Da \underline{Z} **reell** werden soll, kann ich \underline{Z} durch Z ersetzen.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{5 + j(2x + 4)}{2 + j4} \\ Z &= \frac{5 + j(2x + 4)}{2 + j4} \quad | \cdot (2 + j4) \quad (3) \\ 2Z + j4Z &= 5 + j2x + j4 \quad (3)\end{aligned}$$

Wir haben eine **Lineare** Gleichung erhalten. Die können wir in eine **Reelle** und eine **Imaginäre** Gleichung aufspalten.

$$\begin{aligned}\text{Re: } 2Z &= 5 \quad (3) \\ \text{Im: } 4Z &= 2x + 4 \quad (3)\end{aligned}$$

Aus Gleichung (Re) kann man sofort Z bestimmen.

$$\begin{aligned}2Z &= 5 \quad | : 2 \\ Z &= 2,5 \quad (4)\end{aligned}$$

Das Ergebnis kann in Gleichung (Im) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}4Z &= 2x + 4 \\ 4 \cdot 2,5 &= 2x + 4 \\ 10 &= 2x + 4 \quad | - 4 \\ 6 &= 2x \quad | : 2 \\ x &= 3 \quad (4)\end{aligned}$$

Die Lösungen lauten: $x = 3 \quad \underline{Z} = 2,5$

0.50 KOMPLEX-43

Bestimmen Sie die reelle Größe x so, dass der Imaginärteil des Terms \underline{Z} **Null** wird und bestimmen Sie den Wert von \underline{Z} !

$$\underline{Z} = \frac{5 + j(2x + 4)}{1 + j2}$$

Da \underline{Z} **reell** werden soll, kann ich \underline{Z} durch Z ersetzen.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{5 + j(2x + 4)}{1 + j2} \\ Z &= \frac{5 + j(2x + 4)}{1 + j2} \quad | \cdot (1 + j2) \quad (3) \\ Z + j2Z &= 5 + j2x + j4 \quad (3)\end{aligned}$$

Wir haben eine **Lineare** Gleichung erhalten. Die können wir in eine **Reelle** und eine **Imaginäre** Gleichung aufspalten.

$$\begin{aligned}\text{Re: } Z &= 5 \quad (3) \\ \text{Im: } 2Z &= 2x + 4 \quad (3)\end{aligned}$$

Aus Gleichung (Re) kann man sofort Z ablesen. Das Ergebnis kann in Gleichung (Im) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}2Z &= 2x + 4 \\ 2 \cdot 5 &= 2x + 4 \quad (4) \\ 10 &= 2x + 4 \quad | - 4 \\ 6 &= 2x \quad | : 2 \\ x &= 3 \quad (4)\end{aligned}$$

Die Lösungen lauten: $x = 3 \quad \underline{Z} = 5$

0.51 KOMPLEX-44

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Komplexen Gleichungssystems!

$$\begin{array}{lcl} (1) & (1 - j2) \cdot \underline{x} & -(2 + j2) \cdot \underline{y} = -1 - j2 \\ (2) & j2 \cdot \underline{x} & +(1 + j3) \cdot \underline{y} = 1 + j7 \end{array}$$

Die Lösung führe ich mit der **Cramerschen Regel** durch.

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix} (-1 - j2) & (-2 - j2) \\ (1 + j7) & (1 + j3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1 - j2) & (-2 - j2) \\ j2 & (1 + j3) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(-1 - j2) \cdot (1 + j3) - (1 + j7) \cdot (-2 - j2)}{(1 - j2) \cdot (1 + j3) - j2 \cdot (-2 - j2)} \\ &= \frac{(-1 - j3 - j2 + 6) - (-2 - j2 - j14 + 14)}{(1 + j3 - j2 + 6) + j4 - 4} \\ &= \frac{-1 - j3 - j2 + 6 + 2 + j2 + j14 - 14}{1 + j3 - j2 + 6 + j4 - 4} \\ \underline{y} &= \frac{(-7 + j11) \cdot (3 - j5)}{(3 + j5) \cdot (3 - j5)} \\ \underline{y} &= \frac{-21 + j35 + j33 + 55}{9 + 25} \\ \underline{y} &= \frac{34 + j68}{34} \\ \underline{x} &= 1 + j2 \quad (12) \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die zweite Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} j2\underline{x} + (1 + j3) \cdot \underline{y} &= 1 + j7 \\ j2(1 + j2) + (1 + j3) \cdot \underline{y} &= 1 + j7 \\ j2 - 4 + (1 + j3) \cdot \underline{y} &= 1 + j7 \quad | -j2 + 4 \\ (1 + j3) \cdot \underline{y} &= 5 + j5 \quad | : (1 + j3) \\ \underline{y} &= \frac{5 + j5}{1 + j3} \\ \underline{y} &= \frac{(5 + j5) \cdot (1 - j3)}{(1 + j3) \cdot (1 - j3)} \\ \underline{y} &= \frac{5 - j15 + j5 + 15}{1 + 9} \\ \underline{y} &= \frac{20 - j10}{10} \\ \underline{y} &= 2 - j \quad (8) \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{(1 + j2)|(2 - j)\}$

0.52 KOMPLEX-45

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Komplexen Gleichungssystems!

$$\begin{array}{lcl} (1) & (2 + j3) \cdot \underline{x} & + (2 - j) \cdot \underline{y} = 1 + j3 \\ (2) & j3 \cdot \underline{x} & - (1 - j3) \cdot \underline{y} = 2 + j11 \end{array}$$

Die Lösung führe ich mit der **Cramerschen Regel** durch.

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix} (1 + j3) & (2 - j) \\ (2 + j11) & (-1 + j3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2 + j3) & (2 - j) \\ j3 & (-1 + j3) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(1 + j3) \cdot (-1 + j3) - (2 + j11) \cdot (2 - j)}{(2 + j3) \cdot (-1 + j3) - j3 \cdot (2 - j)} \\ &= \frac{(-1 + j3 - j3 - 9) - (4 - j2 + j22 + 11)}{(-2 + j6 - j3 - 9) - j6 - 3} \\ &= \frac{-1 + j3 - j3 - 9 - 4 + j2 - j22 - 11}{-2 + j6 - j3 - 9 - j6 - 3} \\ &= \frac{-25 - j20}{-14 - j3} \cdot \frac{-14 + j3}{-14 + j3} \\ &= \frac{350 - j75 + j280 + 60}{196 + 9} \\ &= \frac{410 + j205}{205} \\ \underline{x} &= 2 + j \quad (12) \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die zweite Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} j3 \cdot \underline{x} - (1 - j3) \cdot \underline{y} &= 2 + j11 \\ j3 \cdot (2 + j) - (1 - j3) \cdot \underline{y} &= 2 + j11 \\ j6 - 3 + (-1 + j3) \cdot \underline{y} &= 2 + j11 \quad | -j6 + 3 \\ (-1 + j3) \cdot \underline{y} &= 5 + j5 \quad | : (-1 + j3) \\ \underline{y} &= \frac{5 + j5}{-1 + j3} \\ \underline{y} &= \frac{5 + j5}{-1 + j3} \cdot \frac{-1 - j3}{-1 - j3} \\ \underline{y} &= \frac{-5 - j15 - j5 + 15}{1 + 9} \\ \underline{y} &= \frac{10 - j20}{10} \\ \underline{y} &= 1 - j2 \quad (8) \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{(2 + j)|(1 - j2)\}$

0.53 KOMPLEX-46

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Komplexen Gleichungssystems!

$$\begin{array}{lcl} (1) & (2 + j3) \cdot \underline{x} & + (2 - j) \cdot \underline{y} = -1 + j4 \\ (2) & j3 \cdot \underline{x} & - (1 - j3) \cdot \underline{y} = 3 + j8 \end{array}$$

Die Lösung führe ich mit der **Cramerschen Regel** durch.

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix} (-1 + j4) & (2 - j) \\ (3 + j8) & (-1 + j3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2 + j3) & (2 - j) \\ j3 & (-1 + j3) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(-1 + j4) \cdot (-1 + j3) - (3 + j8) \cdot (2 - j)}{(2 + j3) \cdot (-1 + j3) - j3 \cdot (2 - j)} \\ &= \frac{(1 - j3 - j4 - 12) - (6 - j3 + j16 + 8)}{(-2 + j6 - j3 - 9) - j6 - 3} \\ &= \frac{1 - j3 - j4 - 12 - 6 + j3 - j16 - 8}{-2 + j6 - j3 - 9 - j6 - 3} \\ &= \frac{-25 - j20}{-14 - j3} \cdot \frac{-14 + j3}{-14 + j3} \\ &= \frac{350 - j75 + j280 + 60}{196 + 9} \\ &= \frac{410 + j205}{205} \\ \underline{x} &= 2 + j \quad (12) \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die zweite Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} j3 \cdot \underline{x} - (1 - j3) \cdot \underline{y} &= 3 + j8 \\ j3 \cdot (2 + j) - (1 - j3) \cdot \underline{y} &= 3 + j8 \\ j6 - 3 - (1 - j3) \cdot \underline{y} &= 3 + j8 \quad | -j6 + 3 \\ -(1 - j3) \cdot \underline{y} &= 6 + j2 \quad | : (-1 + j3) \\ \underline{y} &= \frac{6 + j2}{-1 + j3} \\ \underline{y} &= \frac{6 + j2}{-1 + j3} \cdot \frac{-1 - j3}{-1 - j3} \\ \underline{y} &= \frac{-6 - j18 - j2 + 6}{1 + 9} \\ \underline{y} &= \frac{-j20}{10} \\ \underline{y} &= -j2 \quad (8) \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{(2 + j)|(-j2)\}$

0.54 KOMPLEX-47

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Komplexen Gleichungssystems!

$$\begin{aligned} (1) \quad (2-j) \cdot \underline{x} + (3-j2) \cdot \underline{y} &= 12-j9 \\ (2) \quad (1+j2) \cdot \underline{x} - (2+j2) \cdot \underline{y} &= -8+j \end{aligned}$$

Die Lösung führe ich mit der **Cramerschen Regel** durch.

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix} (12-j9) & (3-j2) \\ (-8+j) & (-2-j2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2-j) & (3-j2) \\ (1+j2) & (-2-j2) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(12-j9) \cdot (-2-j2) - (-8+j) \cdot (3-j2)}{(2-j) \cdot (-2-j2) - (1+j2) \cdot (3-j2)} \\ &= \frac{(-24-j24+j18-18) - (-24+j16+j3+2)}{(-4-j4+j2-2) - (3-j2+j6+4)} \\ &= \frac{-24-j24+j18-18+24-j16-j3-2}{-4-j4+j2-2-3+j2-j6-4} \\ &= \frac{-20-j25}{-13-j6} \\ &= \frac{-20-j25}{-13-j6} \cdot \frac{-13+j6}{-13+j6} \\ &= \frac{260-j120+j325+150}{169+36} \\ &= \frac{410+j205}{205} \\ \underline{x} &= 2+j \quad (12) \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die erste Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} (2-j) \cdot \underline{x} + (3-j2) \cdot \underline{y} &= 12-j9 \\ (2-j) \cdot (2+j) + (3-j2) \cdot \underline{y} &= 12-j9 \\ 4+j2-j2+1 + (3-j2) \cdot \underline{y} &= 12-j9 \quad | -5 \\ (3-j2) \cdot \underline{y} &= 7-j9 \quad | \cdot (3-j2) \\ \underline{y} &= \frac{7-j9}{3-j2} \cdot \frac{3+j2}{3+j2} \\ \underline{y} &= \frac{21+j14-j27+18}{9+4} \\ \underline{y} &= \frac{39-j13}{13} \\ \underline{y} &= 3-j \quad (8) \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{(2-j)|(3-j)\}$

0.55 KOMPLEX-48

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Komplexen Gleichungssystems!

$$\begin{aligned} (1) \quad (2-j) \cdot \underline{x} + (3-j2) \cdot \underline{y} &= 11-j5 \\ (2) \quad (1+j2) \cdot \underline{x} - (2+j2) \cdot \underline{y} &= 2-j3 \end{aligned}$$

Die Lösung führe ich mit der **Cramerschen Regel** durch.

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \frac{\begin{vmatrix} (11-j5) & (3-j2) \\ (2-j3) & (-2-j2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2-j) & (3-j2) \\ (1+j2) & (-2-j2) \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(11-j5) \cdot (-2-j2) - (2-j3) \cdot (3-j2)}{(2-j) \cdot (-2-j2) - (1+j2) \cdot (3-j2)} \\ &= \frac{(-22-j22+j10-10) - (6-j4-j9-6)}{(-4-j4+j2-2) - (3-j2+j6+4)} \\ &= \frac{-22-j22+j10-10-6+j4+j9+6}{-4-j4+j2-2-3+j2-j6-4} \\ &= \frac{-32+j}{-13-j6} \cdot \frac{-13+j6}{-13+j6} \\ &= \frac{416-j192-j13-6}{169+36} \\ &= \frac{410-j205}{205} \\ \underline{x} &= 2-j \quad (12) \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die erste Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} (2-j) \cdot \underline{x} + (3-j2) \cdot \underline{y} &= 11-j5 \\ (2-j) \cdot (2-j) + (3-j2) \cdot \underline{y} &= 11-j5 \\ 4-j2-j2-1 + (3-j2) \cdot \underline{y} &= 11-j5 \quad | -3+j4 \\ (3-j2) \cdot \underline{y} &= 8-j \quad | \cdot (3-j2) \\ \underline{y} &= \frac{8-j}{3-j2} \cdot \frac{3+j2}{3+j2} \\ \underline{y} &= \frac{24+j16-j3+2}{9+4} \\ \underline{y} &= \frac{26+j13}{13} \\ \underline{y} &= 2+j \quad (8) \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösungsmenge: $L = \{(2-j)|(2+j)\}$

0.56 KOMPLEX-49

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der **Komplexen Gleichung!** Bestimmen Sie auch die **Definitionsmenge!**

$$\frac{3\underline{x} + j2\underline{x}}{2\underline{x} + j4 - 2} - \frac{j3\underline{x} + 11 + j19}{5\underline{x} + j10 - 5} = 0$$

Lösung: Zunächst bestimmen wir den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren:

$$\begin{array}{rcl} 2\underline{x} + j4 - 2 & = & 2 \quad \cdot (\underline{x} + j2 - 1) \quad | \quad EF = 5 \\ 5\underline{x} + j10 - 5 & = & 5 \quad \cdot (\underline{x} + j2 - 1) \quad | \quad EF = 2 \\ \hline HN & = & 2 \cdot 5 \cdot (\underline{x} + j2 - 1) \quad | \quad (5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{3\underline{x} + j2\underline{x}}{2\underline{x} + j4 - 2} - \frac{j3\underline{x} + 11 + j19}{5\underline{x} + j10 - 5} &= 0 \quad | \cdot HN \\ (3\underline{x} + j2\underline{x}) \cdot 5 - (j3\underline{x} + 11 + j19) \cdot 2 &= 0 \quad (4) \\ 15\underline{x} + j10\underline{x} - j6\underline{x} - 22 - j38 &= 0 \\ 15\underline{x} + j4\underline{x} - 22 - j38 &= 0 \quad | + 22 + j38 \\ 15\underline{x} + j4\underline{x} &= 22 + j38 \\ \underline{x} \cdot (15 + j4) &= 22 + j38 \quad | : (15 + j4) \\ \underline{x} &= \frac{22 + j38}{15 + j4} \quad (4) \\ \underline{x} &= \frac{(22 + j38) \cdot (15 - j4)}{(15 + j4) \cdot (15 - j4)} \\ \underline{x} &= \frac{330 - j88 + j570 + 152}{225 + 16} \\ \underline{x} &= \frac{482 + j482}{241} \\ \underline{x} &= 2 + j2 \\ L &= \{2 + j2\} \quad (4) \end{aligned}$$

Zusatzfrage Wir müssen prüfen, wo der Hauptnenner=0 wird. Diesen Wert müssen wir aus \mathbb{C} ausschließen.

$$\begin{aligned} \underline{x} + j2 - 1 &= 0 \quad | - j2 + 1 \\ \underline{x} &= 1 - j2 \\ D &= \mathbb{C} \setminus \{1 - j2\} \quad (3) \end{aligned}$$

0.57 KOMPLEX-50

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der **Komplexen Gleichung!** Bestimmen Sie auch die **Definitionsmenge!**

$$\frac{6\underline{x} + j3\underline{x}}{3\underline{x} - 6 - j3} - \frac{j4\underline{x} + 32 - j17}{5\underline{x} - 10 - j5} = 0$$

Lösung: Zunächst bestimmen wir den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren:

$$\begin{array}{rcll} 3\underline{x} - 6 - j3 & = & 3 & \cdot (\underline{x} - 2 - j) \quad | \quad EF = 5 \\ 5\underline{x} - 10 - j5 & = & 5 & \cdot (\underline{x} - 2 - j) \quad | \quad EF = 3 \\ \hline HN & = & 3 \cdot 5 \cdot (\underline{x} - 2 - j) & | \quad (5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{6\underline{x} + j3\underline{x}}{3\underline{x} - 6 - j3} - \frac{j4\underline{x} + 32 - j17}{5\underline{x} - 10 - j5} &= 0 \quad | \cdot HN \\ (6\underline{x} + j3\underline{x}) \cdot 5 - (j4\underline{x} + 32 - j17) \cdot 3 &= 0 \quad (4) \\ 30\underline{x} + j15\underline{x} - j12\underline{x} - 96 + j51 &= 0 \\ 30\underline{x} + j3\underline{x} - 96 + j51 &= 0 \quad | + 96 - j51 \\ 30\underline{x} + j3\underline{x} &= 96 - j51 \\ \underline{x} \cdot (30 + j3) &= 96 - j51 \quad | : (30 + j3) \\ \underline{x} &= \frac{96 - j51}{30 + j3} \quad (4) \\ \underline{x} &= \frac{(96 - j51) \cdot (30 - j3)}{(30 + j3) \cdot (30 - j3)} \\ \underline{x} &= \frac{2880 - j288 - j1530 - 153}{900 + 9} \\ \underline{x} &= \frac{2727 - j1818}{909} \\ \underline{x} &= 3 - j2 \\ L &= \{3 - j2\} \quad (4) \end{aligned}$$

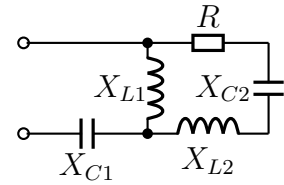
Zusatzfrage Wir müssen prüfen, wo der Hauptnenner=0 wird. Diesen Wert müssen wir aus \mathbb{C} ausschließen.

$$\begin{aligned} \underline{x} - 2 - j &= 0 \quad | + 2 + j \\ \underline{x} &= 2 + j \\ D &= \mathbb{C} \setminus \{2 + j\} \quad (3) \end{aligned}$$

0.58 KOMPLEX-51

Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung sowie seinen Betrag $|\underline{Z}|$! Bekannt sind die nachfolgenden Werte:

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ k}\Omega & X_{L1} &= 2 \text{ k}\Omega & X_{L2} &= 4 \text{ k}\Omega \\ X_{C1} &= 500 \Omega & X_{C2} &= 3 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$



Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben.

Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{R} = 1 \text{ k}\Omega; \quad \underline{X}_{L1} = j2 \text{ k}\Omega; \quad \underline{X}_{L2} = j4 \text{ k}\Omega; \quad \underline{X}_{C1} = -j500 \Omega; \quad \underline{X}_{C2} = -j3 \text{ k}\Omega \quad (3)$$

Die Reihenschaltung aus \underline{R} , \underline{X}_{C2} und \underline{X}_{L2} nenne ich \underline{Z}_1 .

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{C2} + \underline{X}_{L2} = 1 \text{ k}\Omega - j3 \text{ k}\Omega + j4 \text{ k}\Omega = 1 \text{ k}\Omega + j1 \text{ k}\Omega \quad (3)$$

Die Parallelschaltung aus \underline{Z}_1 und \underline{X}_{L1} nenne ich \underline{Z}_2 .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{L1}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{L1}} \\ &= \frac{(1 \text{ k}\Omega + j1 \text{ k}\Omega) \cdot j2 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + j1 \text{ k}\Omega + j2 \text{ k}\Omega} \\ &= \frac{j2 \text{ k}\Omega^2 - 2 \text{ k}\Omega^2}{1 \text{ k}\Omega + j3 \text{ k}\Omega} \quad (2) \\ &= \frac{(j2 \text{ k}\Omega^2 - 2 \text{ k}\Omega^2) \cdot (1 \text{ k}\Omega - j3 \text{ k}\Omega)}{(1 \text{ k}\Omega + j3 \text{ k}\Omega) \cdot (1 \text{ k}\Omega - j3 \text{ k}\Omega)} \quad (2) \\ &= \frac{j2 \text{ k}\Omega^3 + 6 \text{ k}\Omega^3 - 2 \text{ k}\Omega^3 + j6 \text{ k}\Omega^3}{1 \text{ k}\Omega^2 + 9 \text{ k}\Omega^2} \\ &= \frac{4 \text{ k}\Omega^3 + j8 \text{ k}\Omega^3}{10 \text{ k}\Omega^2} \quad (2) \\ &= 0,4 \text{ k}\Omega + j0,8 \text{ k}\Omega \\ \underline{Z}_2 &= 400 \Omega + j800 \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

\underline{Z} ist die Reihenschaltung aus \underline{X}_{C1} und \underline{Z}_2 .

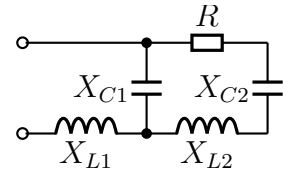
$$\underline{Z} = \underline{X}_{C1} + \underline{Z}_2 = -j500 \Omega + 400 \Omega + j800 \Omega = 400 \Omega + j300 \Omega \quad (3)$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{(\text{Re}\underline{Z})^2 + (\text{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(400 \Omega)^2 + (300 \Omega)^2} = 500 \Omega \quad (3)$$

0.59 KOMPLEX-52

Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung sowie seinen Betrag $|\underline{Z}|$! Bekannt sind die nachfolgenden Werte:

$$\begin{aligned} R &= 20 \, \Omega & X_{L1} &= 10 \, \Omega & X_{L2} &= 60 \, \Omega \\ X_{C1} &= 40 \, \Omega & X_{C2} &= 80 \, \Omega \end{aligned}$$



Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben.

Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{R} = 20 \, \Omega; \quad \underline{X}_{L1} = j10 \, \Omega; \quad \underline{X}_{L2} = j60 \, \Omega; \quad \underline{X}_{C1} = -j40 \, \Omega; \quad \underline{X}_{C2} = -j80 \, \Omega \quad (3)$$

Die Reihenschaltung aus \underline{R} , \underline{X}_{C2} und \underline{X}_{L2} nenne ich \underline{Z}_1 .

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{C2} + \underline{X}_{L2} = 20 \, \Omega - j80 \, \Omega + j60 \, \Omega = 20 \, \Omega - j20 \, \Omega \quad (3)$$

Die Parallelschaltung aus \underline{Z}_1 und \underline{X}_{C1} nenne ich \underline{Z}_2 .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C1}} \\ &= \frac{(20 \, \Omega - j20 \, \Omega) \cdot (-j40 \, \Omega)}{20 \, \Omega - j20 \, \Omega - j40 \, \Omega} \\ &= \frac{-j800 \, \Omega^2 - 800 \, \Omega^2}{20 \, \Omega - j60 \, \Omega} \quad (2) \\ &= \frac{(-j800 \, \Omega^2 - 800 \, \Omega^2) \cdot (20 \, \Omega + j60 \, \Omega)}{(20 \, \Omega - j60 \, \Omega) \cdot (20 \, \Omega + j60 \, \Omega)} \quad (2) \\ &= \frac{-j16000 \, \Omega^3 + 48000 \, \Omega^3 - 16000 \, \Omega^3 - j48000 \, \Omega^3}{400 \, \Omega^2 + 3600 \, \Omega^2} \\ &= \frac{32000 \, \Omega^3 - j64000 \, \Omega^3}{4000 \, \Omega^2} \quad (2) \\ \underline{Z}_2 &= 8 \, \Omega - j16 \, \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

\underline{Z} ist die Reihenschaltung aus \underline{X}_{L1} und \underline{Z}_2 .

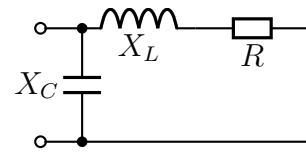
$$\underline{Z} = \underline{X}_{L1} + \underline{Z}_2 = j10 \, \Omega + 8 \, \Omega - j16 \, \Omega = 8 \, \Omega - j6 \, \Omega \quad (3)$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(8 \, \Omega)^2 + (-6 \, \Omega)^2} = 10 \, \Omega \quad (3)$$

0.60 KOMPLEX-53

Bestimmen Sie den ohmschen Widerstand R so, dass der Ersatzwiderstand Z der Schaltung **reell** wird (Kompensation)! Bekannt sind die Werte:

$$X_L = 36 \Omega \text{ und } X_C = 40 \Omega.$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{X}_L = j36 \Omega \quad \underline{X}_C = -j40 \Omega \quad \underline{R} = R \quad (3)$$

Es muss also nur noch die **reelle** Größe R berechnet werden.

Die Zusammenfassung der Reihenschaltung aus X_L und R nenne ich Z_1 . Damit ergibt sich:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_L + \underline{R} = j36 \Omega + R \quad (2)$$

Parallel zu Z_1 liegt X_C . Also kann der Gesamtwiderstand \underline{Z} mit der Formel für die Parallelschaltungen berechnet werden.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_C} \\ &= \frac{(j36 \Omega + R) \cdot (-j40 \Omega)}{j36 \Omega + R - j40 \Omega} \\ \underline{Z} &= \frac{1440 \Omega^2 - j40 \Omega R}{R - j4 \Omega} \quad (3) \end{aligned}$$

Da bekannt ist, dass der Imaginärteil von \underline{Z} gleich Null ist, kann ich \underline{Z} durch Z ersetzen. Dadurch ist es dann möglich, dass die Gleichung in eine Lineare Gleichung umgewandelt und dann in eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen aufgespalten wird.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= Z \quad (1) \\ Z &= \frac{1440 \Omega^2 - j40 \Omega R}{R - j4 \Omega} \quad | \cdot (R - j4 \Omega) \\ Z \cdot (R - j4 \Omega) &= 1440 \Omega^2 - j40 \Omega R \\ ZR - j4 \Omega Z &= 1440 \Omega^2 - j40 \Omega R \quad (3) \end{aligned}$$

Aufspalten in Realteilgleichung und Imaginärteilgleichung:

$$\begin{aligned} \text{Re:} \quad ZR &= 1440 \Omega^2 \\ \text{Im:} \quad -4 \Omega Z &= -40 \Omega R \quad (2) \end{aligned}$$

Ich stelle die Imaginärteilgleichung nach Z um und setze das Ergebnis in die Realteilgleichung ein.

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Im:} & -4\Omega Z & = & -40\Omega R & | : (-4\Omega) \\
 & Z & = & 10R & \text{(2)} \\
 \text{Re:} & ZR & = & 1440\Omega^2 & | \text{ einsetzen:} \\
 & 10R^2 & = & 1440\Omega^2 & | : 10 \\
 & R^2 & = & 144\Omega^2 & | \sqrt{} \\
 & R_{1/2} & = & \pm 12\Omega & \text{(3)}
 \end{array}$$

Die Lösung $R_2 = -12\Omega$ entfällt, da nur **positive** Widerstände möglich sind.
 Es bleibt also nur eine Lösung übrig: (1)

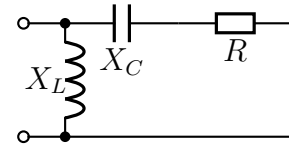
$$R_1 = R = 12\Omega$$

0.61 KOMPLEX-54

Bestimmen Sie den ohmschen Widerstand R so, dass der Ersatzwiderstand Z der Schaltung **reell** wird (Kompensation)!

Bekannt sind die Werte:

$$X_L = 30 \Omega \text{ und } X_C = 27 \Omega.$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{X}_L = j30 \Omega \quad \underline{X}_C = -j27 \Omega \quad \underline{R} = R \quad (3)$$

Es muss also nur noch die **reelle** Größe R berechnet werden.

Die Zusammenfassung der Reihenschaltung aus X_C und R nenne ich Z_1 . Damit ergibt sich:

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_C + \underline{R} = -j27 \Omega + R \quad (2)$$

Parallel zu Z_1 liegt X_L . Also kann der Gesamtwiderstand \underline{Z} mit der Formel für die Parallelschaltungen berechnet werden.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{(-j27 \Omega + R) \cdot j30 \Omega}{-j27 \Omega + R + j30 \Omega} \\ \underline{Z} &= \frac{810 \Omega^2 + j30 \Omega R}{R + j3 \Omega} \quad (3) \end{aligned}$$

Da bekannt ist, dass der Imaginärteil von \underline{Z} gleich Null ist, kann ich \underline{Z} durch Z ersetzen. Dadurch ist es dann möglich, dass die Gleichung in eine Lineare Gleichung umgewandelt und dann in eine mit den Realteilen und eine mit den Imaginärteilen aufgespalten wird.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= Z \quad (1) \\ Z &= \frac{810 \Omega^2 + j30 \Omega R}{R + j3 \Omega} \quad | \cdot (R + j3 \Omega) \\ Z \cdot (R + j3 \Omega) &= 810 \Omega^2 + j30 \Omega R \\ ZR + j3 \Omega Z &= 810 \Omega^2 + j30 \Omega R \quad (3) \end{aligned}$$

Aufspalten in Realteilgleichung und Imaginärteilgleichung:

$$\begin{aligned} \text{Re: } ZR &= 810 \Omega^2 \\ \text{Im: } 3 \Omega Z &= 30 \Omega R \quad (2) \end{aligned}$$

Ich stelle die Imaginärteilgleichung nach Z um und setze das Ergebnis in die Realteilgleichung ein.

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Im: } 3\Omega Z & = & 30\Omega R & | : 3\Omega \\
 & & Z & = 10R \quad (2) \\
 \text{Re: } ZR & = & 810\Omega^2 & | \text{ einsetzen:} \\
 10R^2 & = & 810\Omega^2 & | : 10 \\
 R^2 & = & 81\Omega^2 & | \sqrt{} \\
 R_{1/2} & = & \pm 9\Omega & (3)
 \end{array}$$

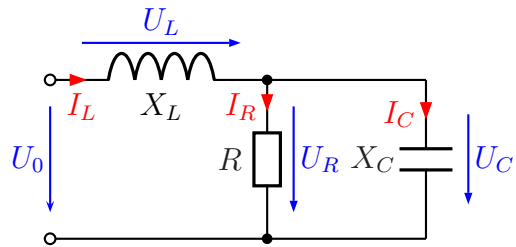
Die Lösung $R_2 = -9\Omega$ entfällt, da nur **positive** Widerstände möglich sind.
 Es bleibt also nur eine Lösung übrig: (1)

$$R_1 = R = 9\Omega$$

0.62 KOMPLEX-55

Berechnen Sie die Spannung U_R ! Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben. Gegeben sind die nachfolgenden Werte:

$$\begin{aligned} U_0 &= 10 \text{ V} & X_L &= 100 \Omega \\ X_C &= 100 \Omega & R &= 500 \Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{U}_0 = 10 \text{ V}; \quad \underline{X}_L = j100 \Omega; \quad \underline{X}_C = -j100 \Omega; \quad \underline{R} = 500 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus R und X_C zu Z_1 zusammen.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} \\ &= \frac{500 \Omega \cdot (-j100 \Omega)}{500 \Omega - j100 \Omega} \\ &= \frac{-500 \Omega \cdot j100 \Omega}{100 \Omega \cdot (5 - j1)} \\ &= \frac{-j500 \Omega}{5 - j1} \\ &= \frac{-j500 \Omega \cdot (5 + j1)}{(5 - j1) \cdot (5 + j1)} \\ &= \frac{-j2500 \Omega + 500 \Omega}{25 + 1} \\ &= \frac{-j2500 \Omega + 500 \Omega}{26} \\ Z_1 &= -j\frac{2500}{26} \Omega + \frac{500}{26} \Omega \quad (5) \\ &\approx -j96,1538 \Omega + 19,2308 \Omega \end{aligned}$$

Damit können wir den Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_L + Z_1 \\ &= j100 \Omega - j\frac{2500}{26} \Omega + \frac{500}{26} \Omega \\ \underline{Z} &= j\frac{100}{26} \Omega + \frac{500}{26} \Omega \quad (2) \\ &\approx j3,8462 \Omega + 19,2308 \Omega \end{aligned}$$

Ich bestimme den Gesamtstrom \underline{I}_L , der in der Spule (und damit auch in \underline{Z}) fließt.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{10 \text{ V}}{j \frac{100}{26} \Omega + \frac{500}{26} \Omega} \\
 &= \frac{10 \text{ V}}{\frac{j100 \Omega + 500 \Omega}{26}} \\
 &= \frac{10 \text{ V} \cdot 26}{j100 \Omega + 500 \Omega} \\
 &= \frac{260 \text{ V}}{500 \Omega + j100 \Omega} \\
 &= \frac{260 \text{ V}}{100 \Omega (5 + j)} \\
 &= \frac{2,6 \text{ A}}{5 + j} \\
 &= \frac{2,6 \text{ A} \cdot (5 - j)}{(5 + j) \cdot (5 - j)} \\
 &= \frac{13 \text{ A} - j2,6 \text{ A}}{25 + 1} \\
 &= \frac{13 \text{ A} - j2,6 \text{ A}}{26} \\
 \underline{I}_L &= 0,5 \text{ A} - j0,1 \text{ A} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Durch \underline{Z}_1 fließt der gleiche Strom. Damit kann ich die Spannung an \underline{Z}_1 und damit auch an \underline{R} bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_R &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_L \\
 &= \left(-j \frac{2500}{26} \Omega + \frac{500}{26} \Omega \right) \cdot (0,5 \text{ A} - j0,1 \text{ A}) \\
 &= -j \frac{1250}{26} \text{ V} - \frac{250}{26} \text{ V} + \frac{250}{26} \text{ V} - j \frac{50}{26} \text{ V} \\
 &= -j \frac{1300}{26} \text{ V} \\
 \underline{U}_R &= -j50 \text{ V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

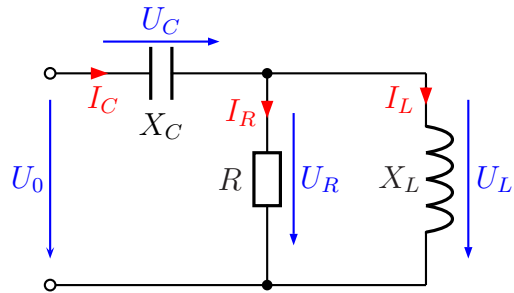
Gesucht ist der **Betrag** der Spannung. Ohne weitere Rechnung erhalten wir:

$$\boxed{U_R = 50 \text{ V}} \quad (2)$$

0.63 KOMPLEX-56

Berechnen Sie die Spannung U_R ! Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben. Gegeben sind die nachfolgenden Werte:

$$\begin{aligned} U_0 &= 20 \text{ V} & X_L &= 50 \Omega \\ X_C &= 50 \Omega & R &= 200 \Omega \end{aligned}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{U}_0 = 20 \text{ V}; \quad \underline{X}_L = j50 \Omega; \quad \underline{X}_C = -j50 \Omega; \quad \underline{R} = 200 \Omega \quad (2)$$

Nun fassen wir die Parallelschaltung aus R und X_L zu Z_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_L}{\underline{R} + \underline{X}_L} \\ &= \frac{200 \Omega \cdot j50 \Omega}{200 \Omega + j50 \Omega} \\ &= \frac{200 \Omega \cdot j50 \Omega}{50 \Omega \cdot (4 + j1)} \\ &= \frac{j200 \Omega}{4 + j1} \\ &= \frac{j200 \Omega \cdot (4 - j1)}{(4 + j1) \cdot (4 - j1)} \\ &= \frac{j800 \Omega + 200 \Omega}{16 + 1} \\ &= \frac{j800 \Omega + 200 \Omega}{17} \\ \underline{Z}_1 &= j\frac{800}{17} \Omega + \frac{200}{17} \Omega \quad (5) \\ &\approx j47,0588 \Omega + 11,7647 \Omega \end{aligned}$$

Damit können wir den Gesamtwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{X}_C + \underline{Z}_1 \\ &= -j50 \Omega + j\frac{800}{17} \Omega + \frac{200}{17} \Omega \\ \underline{Z} &= -j\frac{50}{17} \Omega + \frac{200}{17} \Omega \quad (2) \\ &\approx -j2,9412 \Omega + 11,7647 \Omega \end{aligned}$$

Ich bestimme den Gesamtstrom \underline{I}_C , der im Kondensator (und damit auch in \underline{Z}) fließt.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{20 \text{ V}}{-j\frac{50}{17} \Omega + \frac{200}{17} \Omega} \\
 &= \frac{20 \text{ V}}{\frac{-j50 \Omega + 200 \Omega}{17}} \\
 &= \frac{20 \text{ V} \cdot 17}{-j50 \Omega + 200 \Omega} \\
 &= \frac{340 \text{ V}}{200 \Omega - j50 \Omega} \\
 &= \frac{340 \text{ V}}{50 \Omega \cdot (4 - j)} \\
 &= \frac{6,8 \text{ A}}{4 - j} \\
 &= \frac{6,8 \text{ A} \cdot (4 + j)}{(4 - j) \cdot (4 + j)} \\
 &= \frac{27,2 \text{ A} + j6,8 \text{ A}}{16 + 1} \\
 &= \frac{27,2 \text{ A} + j6,8 \text{ A}}{17} \\
 \underline{I}_C &= 1,6 \text{ A} + j0,4 \text{ A} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Durch \underline{Z}_1 fließt der gleiche Strom. Damit kann ich die Spannung an \underline{Z}_1 und damit auch an \underline{R} bestimmen.

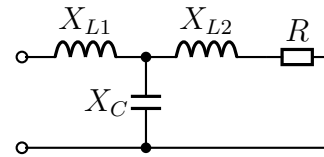
$$\begin{aligned}
 \underline{U}_R &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_C \\
 &= \left(j\frac{800}{17} \Omega + \frac{200}{17} \Omega \right) \cdot (1,6 \text{ A} + j0,4 \text{ A}) \\
 &= j\frac{1280}{17} \text{ V} - \frac{320}{17} \text{ V} + \frac{320}{17} \text{ V} + j\frac{80}{17} \text{ V} \\
 &= j\frac{1360}{17} \text{ V} \\
 \underline{U}_R &= j80 \text{ V} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Gesucht ist der **Betrag** der Spannung. Ohne weitere Rechnung erhalten wir:

$$\boxed{U_R = 80 \text{ V}} \quad (2)$$

0.64 KOMPLEX-57

Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} sowie seinen Betrag $|\underline{Z}|$. Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben. Bekannt sind die Werte:



$$\begin{aligned} X_{L1} &= 60 \, \Omega & X_C &= 40 \, \Omega \\ X_{L2} &= 32 \, \Omega & R &= 16 \, \Omega \end{aligned}$$

Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{X}_{L1} = j60 \, \Omega \quad \underline{X}_{L2} = j32 \, \Omega \quad \underline{X}_C = -j40 \, \Omega \quad \underline{R} = 16 \, \Omega \quad (3)$$

Wir fassen die Reihenschaltung aus \underline{X}_{L2} und \underline{R} zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{L2} = 16 \, \Omega + j32 \, \Omega \quad (3)$$

Zu \underline{Z}_1 ist \underline{X}_C parallelgeschaltet. Diese Zusammenfassung nenne ich \underline{Z}_2 .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_C} \\ &= \frac{(16 \, \Omega + j32 \, \Omega) \cdot (-j40 \, \Omega)}{16 \, \Omega + j32 \, \Omega - j40 \, \Omega} \quad (2) \\ &= \frac{-j640 \, \Omega^2 + 1280 \, \Omega^2}{16 \, \Omega - j8 \, \Omega} \\ &= \frac{(-j640 \, \Omega^2 + 1280 \, \Omega^2) \cdot (16 \, \Omega + j8 \, \Omega)}{(16 \, \Omega - j8 \, \Omega) \cdot (16 \, \Omega + j8 \, \Omega)} \quad (2) \\ &= \frac{-j10240 \, \Omega^3 + 5120 \, \Omega^3 + 20480 \, \Omega^3 + j10240 \, \Omega^3}{256 \, \Omega + 64 \, \Omega} \quad (2) \\ &= \frac{25600 \, \Omega^3}{320 \, \Omega^2} \\ \underline{Z}_2 &= 80 \, \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Zu \underline{Z}_2 ist \underline{X}_{L1} in Reihe geschaltet. Die Reihenschaltung ergibt den gesuchten Ersatzwiderstand \underline{Z} .

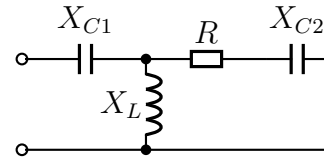
$$\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{X}_{L1} = 80 \, \Omega + j60 \, \Omega \quad (3)$$

Gesucht ist der Betrag von \underline{Z} .

$$Z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(80 \, \Omega)^2 + (60 \, \Omega)^2} = 100 \, \Omega \quad (3)$$

0.65 KOMPLEX-58

Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} sowie seinen Betrag $|\underline{Z}|$! Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben. Bekannt sind die Werte:



$$\begin{aligned} X_{C1} &= 45 \, \Omega & X_L &= 30 \, \Omega \\ X_{C2} &= 24 \, \Omega & R &= 12 \, \Omega \end{aligned}$$

Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\underline{X}_{C1} = -j45 \, \Omega \quad \underline{X}_{C2} = -j24 \, \Omega \quad \underline{X}_L = j30 \, \Omega \quad \underline{R} = 12 \, \Omega \quad (3)$$

Wir fassen die Reihenschaltung aus \underline{R} und \underline{X}_{C2} zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{C2} = 12 \, \Omega - j24 \, \Omega \quad (3)$$

Zu \underline{Z}_1 ist \underline{X}_L parallelgeschaltet. Diese Zusammenfassung nenne ich \underline{Z}_2 .

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{(12 \, \Omega - j24 \, \Omega) \cdot (j30 \, \Omega)}{12 \, \Omega - j24 \, \Omega + j30 \, \Omega} \quad (2) \\ &= \frac{j360 \, \Omega^2 + 720 \, \Omega^2}{12 \, \Omega + j6 \, \Omega} \\ &= \frac{(j360 \, \Omega^2 + 720 \, \Omega^2) \cdot (12 \, \Omega - j6 \, \Omega)}{(12 \, \Omega + j6 \, \Omega) \cdot (12 \, \Omega - j6 \, \Omega)} \quad (2) \\ &= \frac{j4320 \, \Omega^3 + 2160 \, \Omega^3 + 8640 \, \Omega^3 - j4320 \, \Omega^3}{144 \, \Omega^2 + 36 \, \Omega^2} \quad (2) \\ &= \frac{10800 \, \Omega^3}{180 \, \Omega^2} \\ \underline{Z}_2 &= 60 \, \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Zu \underline{Z}_2 ist \underline{X}_{C1} in Reihe geschaltet. Die Reihenschaltung ergibt den gesuchten Ersatzwiderstand \underline{Z} .

$$\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{X}_{C1} = 60 \, \Omega - j45 \, \Omega \quad (3)$$

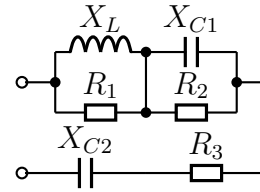
Gesucht ist der Betrag von \underline{Z} .

$$Z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(60 \, \Omega)^2 + (-45 \, \Omega)^2} = 75 \, \Omega \quad (3)$$

0.66 KOMPLEX-59

Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} sowie seinen Betrag $|\underline{Z}|$! Die Schaltung wird mit einer Wechselspannung mit konstanter Frequenz betrieben. Bekannt sind die Werte:

$$\begin{array}{lll} R_1 = 100 \, \Omega & R_2 = 100 \, \Omega & R_3 = 40 \, \Omega \\ X_L = 300 \, \Omega & X_{C1} = 200 \, \Omega & X_{C2} = 190 \, \Omega \end{array}$$



Lösung: Zunächst bestimmen wir die **komplexen** Größen:

$$\begin{array}{lll} \underline{R}_1 = 100 \, \Omega & \underline{R}_2 = 100 \, \Omega & \underline{R}_3 = 40 \, \Omega \\ \underline{X}_L = j300 \, \Omega & \underline{X}_{C1} = -j200 \, \Omega & \underline{X}_{C2} = -j190 \, \Omega \end{array} \quad (2)$$

Wir fassen die Parallelschaltung aus \underline{R}_1 und \underline{X}_L zu \underline{Z}_1 zusammen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_1 \cdot \underline{X}_L}{\underline{R}_1 + \underline{X}_L} \\ &= \frac{100 \, \Omega \cdot j300 \, \Omega}{100 \, \Omega + j300 \, \Omega} \quad (2) \\ &= \frac{100 \, \Omega \cdot j300 \, \Omega}{100 \, \Omega \cdot (1 + j3)} \\ &= \frac{j300 \, \Omega}{1 + j3} \\ &= \frac{j300 \, \Omega \cdot (1 - j3)}{(1 + j3) \cdot (1 - j3)} \quad (2) \\ &= \frac{j300 \, \Omega + 900 \, \Omega}{1 + 9} \\ &= \frac{j300 \, \Omega + 900 \, \Omega}{10} \\ \underline{Z}_1 &= j30 \, \Omega + 90 \, \Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Wir fassen die Parallelschaltung aus \underline{R}_2 und \underline{X}_{C1} zu \underline{Z}_2 zusammen.

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{R}_2 + \underline{X}_{C1}} \\
 &= \frac{100 \, \Omega \cdot (-j200 \, \Omega)}{100 \, \Omega - j200 \, \Omega} \quad (2) \\
 &= \frac{100 \, \Omega \cdot (-j200 \, \Omega)}{100 \, \Omega \cdot (1 - j2)} \\
 &= \frac{-j200 \, \Omega}{1 - j2} \\
 &= \frac{-j200 \, \Omega \cdot (1 + j2)}{(1 - j2) \cdot (1 + j2)} \quad (2) \\
 &= \frac{-j200 \, \Omega + 400 \, \Omega}{1 + 4} \\
 &= \frac{-j200 \, \Omega + 400 \, \Omega}{5} \\
 \underline{Z}_2 &= -j40 \, \Omega + 80 \, \Omega \quad (2)
 \end{aligned}$$

Der Gesamtwiderstand \underline{Z} ist die Reihenschaltung aus \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 , \underline{R}_3 und \underline{X}_{C2} .

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{R}_3 + \underline{X}_{C2} \\
 &= (j30 \, \Omega + 90 \, \Omega) + (-j40 \, \Omega + 80 \, \Omega) + 40 \, \Omega - j190 \, \Omega \\
 &= j30 \, \Omega + 90 \, \Omega - j40 \, \Omega + 80 \, \Omega + 40 \, \Omega - j190 \, \Omega \\
 \underline{Z} &= 210 \, \Omega - j200 \, \Omega \quad (2)
 \end{aligned}$$

Gesucht ist der Betrag von \underline{Z} .

$$Z = \sqrt{(\operatorname{Re}\underline{Z})^2 + (\operatorname{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(210 \, \Omega)^2 + (-200 \, \Omega)^2} = 290 \, \Omega \quad (2)$$

0.67 KOMPLEX-60

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$(5\underline{x} + 1) \cdot (2\underline{x} + 5) - 78 - j42 = (\underline{x} - 2) \cdot (10\underline{x} + j4) + 33 + j99$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(5\underline{x} + 1) \cdot (2\underline{x} + 5) - 78 - j42 &= (\underline{x} - 2) \cdot (10\underline{x} + j4) + 33 + j99 \\ 10\underline{x}^2 + 25\underline{x} + 2\underline{x} + 5 - 78 - j42 &= 10\underline{x}^2 + j4\underline{x} - 20\underline{x} - j8 + 33 + j99 \quad | - 10\underline{x}^2 \\ 27\underline{x} - 73 - j42 &= j4\underline{x} - 20\underline{x} + 33 + j91 \quad | - j4\underline{x} + 20\underline{x} + 73 + j42 \\ 47\underline{x} - j4\underline{x} &= 106 + j133 \\ (47 - j4) \cdot \underline{x} &= 106 + j133 \quad | : (37 - j4) \\ \underline{x} &= \frac{106 + j133}{47 - j4} \\ &= \frac{(106 + j133) \cdot (47 + j4)}{(47 - j4) \cdot (47 + j4)} \\ &= \frac{4982 + j424 + j6251 - 532}{2209 + 16} \\ &= \frac{4450 + j6675}{2225} \\ \underline{x} &= 2 + j3 \\ L &= \{2 + j3\}\end{aligned}$$

0.68 KOMPLEX-61

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$\frac{36\underline{x} - j30}{3 - j2} = 9\underline{x} + 15$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{36\underline{x} - j30}{3 - j2} &= 9\underline{x} + 15 && | \cdot (3 - j2) \\ 36\underline{x} - j30 &= (9\underline{x} + 15) \cdot (3 - j2) \\ 36\underline{x} - j30 &= 27\underline{x} - j18\underline{x} + 45 - j30 && | - 27\underline{x} + j18\underline{x} + j30 \\ 9\underline{x} + j18\underline{x} &= 45 && \text{(5)} \\ \underline{x} \cdot (9 + j18) &= 45 && | : (9 + j18) \\ \underline{x} &= \frac{45}{9 + j18} && \text{(5)} \\ \underline{x} &= \frac{45 \cdot (9 - j18)}{(9 + j18) \cdot (9 - j18)} && \text{(4)} \\ \underline{x} &= \frac{405 - j810}{81 + 324} \\ \underline{x} &= \frac{405 - j810}{405} \\ \underline{x} &= \frac{405}{405} - j \frac{810}{405} \\ \underline{x} &= 1 - j2 \\ L &= \{1 - j2\} && \text{(6)} \end{aligned}$$

0.69 KOMPLEX-62

Berechnen Sie:

$$(4 - j5) \cdot (j - j^3) \cdot j^{17} \cdot (4 + j5) = \dots$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(4 - j5) \cdot (j - j^3) \cdot j^{17} \cdot (4 + j5) &= (4 - j5) \cdot (j + j) \cdot j \cdot (4 + j5) && (5) \\ &= (4 - j5) \cdot j2 \cdot j \cdot (4 + j5) && (3) \\ &= (4 - j5) \cdot (-2) \cdot (4 + j5) && (3) \\ &= (-8 + j10) \cdot (4 + j5) && (3) \\ &= -32 - j40 + j40 - 50 && (3) \\ &= -82 && (3)\end{aligned}$$

0.70 KOMPLEX-63

Berechnen Sie:

$$(6 - j5) \cdot (j4 - j^9) \cdot j^{15} \cdot (6 + j5) = \dots$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(6 - j5) \cdot (j4 - j^9) \cdot j^{15} \cdot (6 + j5) &= (6 - j5) \cdot (j4 - j) \cdot (-j) \cdot (6 + j5) && (5) \\ &= (6 - j5) \cdot j3 \cdot (-j) \cdot (6 + j5) && (3) \\ &= (6 - j5) \cdot 3 \cdot (6 + j5) && (3) \\ &= (18 - j15) \cdot (6 + j5) && (3) \\ &= 108 + j90 - j90 + 75 && (3) \\ &= 183 && (3)\end{aligned}$$

0.71 KOMPLEX-64

Berechnen Sie:

$$(4 + j5) \cdot (j3 - j^5) \cdot j^{19} \cdot (4 - j5) = \dots$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(4 + j5) \cdot (j3 - j^5) \cdot j^{19} \cdot (4 - j5) &= (4 + j5) \cdot (j3 - j) \cdot (-j) \cdot (4 - j5) && (5) \\ &= (4 + j5) \cdot j2 \cdot (-j) \cdot (4 - j5) && (3) \\ &= (4 + j5) \cdot 2 \cdot (4 - j5) && (3) \\ &= (8 + j10) \cdot (4 - j5) && (3) \\ &= 32 - j40 + j40 + 50 && (3) \\ &= 82 && (3)\end{aligned}$$

0.72 KOMPLEX-65

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Komplexen Gleichung!

$$\frac{2\underline{x} + 1 + j4}{\underline{x} + j3} = \frac{2\underline{x} - 4 - j}{\underline{x} - 1}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{2\underline{x} + 1 + j4}{\underline{x} + j3} &= \frac{2\underline{x} - 4 - j}{\underline{x} - 1} && | \cdot \text{HN} \\ (2\underline{x} + 1 + j4) \cdot (\underline{x} - 1) &= (2\underline{x} - 4 - j) \cdot (\underline{x} + j3) && (4) \\ 2\underline{x}^2 - 2\underline{x} + \underline{x} - 1 + j4\underline{x} - j4 &= 2\underline{x}^2 + j6\underline{x} - 4\underline{x} - j12 - j\underline{x} + 3 && | - 2\underline{x}^2 \\ -\underline{x} + j4\underline{x} - 1 - j4 &= j5\underline{x} - 4\underline{x} - j12 + 3 && | - j5\underline{x} + 4\underline{x} + j4 + 1 \quad (4) \\ 3\underline{x} - j\underline{x} &= 4 - j8 \\ \underline{x} \cdot (3 - j) &= 4 - j8 && | : (3 - j) \\ \underline{x} &= \frac{4 - j8}{3 - j} && (4) \\ &= \frac{(4 - j8) \cdot (3 + j)}{(3 - j) \cdot (3 + j)} && (3) \\ &= \frac{12 + j4 - j24 + 8}{9 + 1} \\ &= \frac{20 - j20}{10} \\ \underline{x} &= 2 - j2 && (4) \\ L &= \{2 - j2\} && (1) \end{aligned}$$

0.73 KOMPLEX-66

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Komplexen Gleichung!

$$\frac{3\underline{x} + 1 - j2}{\underline{x} - j3} = \frac{3\underline{x} - 10 + j}{\underline{x} - 1}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{3\underline{x} + 1 - j2}{\underline{x} - j3} &= \frac{3\underline{x} - 10 + j}{\underline{x} - 1} && | \cdot \text{HN} \\ (3\underline{x} + 1 - j2) \cdot (\underline{x} - 1) &= (3\underline{x} - 10 + j) \cdot (\underline{x} - j3) && (4) \\ 3\underline{x}^2 - 3\underline{x} + \underline{x} - 1 - j2\underline{x} + j2 &= 3\underline{x}^2 - j9\underline{x} - 10\underline{x} + j30 + j\underline{x} + 3 && | - 3\underline{x}^2 \\ -2\underline{x} - 1 - j2\underline{x} + j2 &= -j8\underline{x} - 10\underline{x} + j30 + 3 && | + 1 - j2 + j8\underline{x} + 10\underline{x} \quad (4) \\ 8\underline{x} + j6\underline{x} &= 4 + j28 \\ \underline{x} \cdot (8 + j6) &= 4 + j28 && | : (8 + j6) \\ \underline{x} &= \frac{4 + j28}{8 + j6} && (4) \\ &= \frac{(4 + j28) \cdot (8 - j6)}{(8 + j6) \cdot (8 - j6)} && (3) \\ &= \frac{32 - j24 + j224 + 168}{64 + 36} \\ &= \frac{200 + j200}{100} \\ \underline{x} &= 2 + j2 && (4) \\ L &= \{2 + j2\} && (1) \end{aligned}$$

0.74 KOMPLEX-67

Berechnen Sie:

$$(3 - j5) \cdot (j - j^3) \cdot j^{13} \cdot (3 + j5)$$

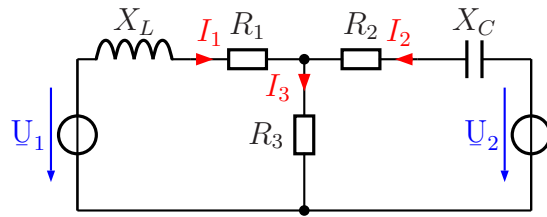
Lösung:

$$\begin{aligned}(3 - j5) \cdot (j - j^3) \cdot j^{13} \cdot (3 + j5) &= (3 - j5) \cdot (j + j) \cdot j \cdot (3 + j5) && (5) \\ &= (3 - j5) \cdot j2 \cdot j \cdot (3 + j5) && (3) \\ &= (3 - j5) \cdot (-2) \cdot (3 + j5) && (3) \\ &= (-6 + j10) \cdot (3 + j5) && (3) \\ &= -18 - j30 + j30 - 50 && (3) \\ &= -68 && (3)\end{aligned}$$

0.75 KOMPLEX-68a

Die Ströme I_1 , I_2 und I_3 in nebenstehende Schaltung sind gesucht. Bekannt sind folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 1 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 1 \text{ k}\Omega \\ X_L &= 3 \text{ k}\Omega \\ X_C &= 3 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$



Weiterhin ist bekannt, dass beide Spannungen einen Betrag von 12 Volt haben, jedoch eilt U_2 der Spannung U_1 in der Phasenlage um 90° voraus.

Lösung: Festlegung der Bezugsspannung:

$$\underline{U}_1 = 12 \text{ V}$$

Die **voraussetzende** Spannung heißt dann:

$$\underline{U}_2 = j12 \text{ V}$$

Die komplexen Widerstände lauten:

$$\begin{aligned} \underline{R}_1 &= 1 \text{ k}\Omega \\ \underline{R}_2 &= 1 \text{ k}\Omega \\ \underline{R}_3 &= 1 \text{ k}\Omega \\ \underline{X}_L &= j3 \text{ k}\Omega \\ \underline{X}_C &= -j3 \text{ k}\Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Zur Lösung verwendet man sinnvollerweise das Maschenstromverfahren. Den Vollständigen Baum lege ich durch R_3 . Dadurch ergeben sich die Ströme \underline{I}_1 und \underline{I}_2 als Maschenströme. Ich bilde die beiden Maschengleichungen:

$$\begin{array}{lcl} (1) & (\underline{X}_L + \underline{R}_1 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_1 & + \underline{R}_3 \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_1 \\ (2) & \underline{R}_3 \cdot \underline{I}_1 & + (\underline{X}_C + \underline{R}_2 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \end{array} \quad (2)$$

Die bekannten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} (1) & (j3 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1 & + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 = 12 \text{ V} \\ (2) & 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_1 & + (-j3 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_2 = j12 \text{ V} \end{array}$$

Die Klammerausdrücke können noch etwas zusammengefasst werden.

$$\begin{array}{lcl} (1) & (j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1 & + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 = 12 \text{ V} \\ (2) & 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_1 & + (-j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_2 = j12 \text{ V} \end{array} \quad (2)$$

Dieses Gleichungssystem kann nun mit jedem beliebigen Lösungsverfahren aufgelöst werden.

Ich führe als Beispiel die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel durch.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 12 \text{ V} & 1 \text{ k}\Omega \\ j12 \text{ V} & -j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega & 1 \text{ k}\Omega \\ 1 \text{ k}\Omega & -j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{12 \text{ V} \cdot (-j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) - j12 \text{ V} \cdot 1 \text{ k}\Omega}{(j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot (-j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) - 1 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ k}\Omega} \\
 &= \frac{-j36 \text{ k}\Omega \text{ V} + 24 \text{ k}\Omega \text{ V} - j12 \text{ k}\Omega \text{ V}}{9 \text{ k}\Omega^2 + j6 \text{ k}\Omega^2 - j6 \text{ k}\Omega^2 + 4 \text{ k}\Omega^2 - 1 \text{ k}\Omega^2} \\
 &= \frac{-j48 \text{ k}\Omega \text{ V} + 24 \text{ k}\Omega \text{ V}}{12 \text{ k}\Omega^2} \\
 \underline{I}_1 &= 2 \text{ mA} - j4 \text{ mA} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1) eingesetzt, um \underline{I}_2 zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 (j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1 + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} \\
 (j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot (2 \text{ mA} - j4 \text{ mA}) + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} \\
 j6 \text{ V} + 12 \text{ V} + 4 \text{ V} - j8 \text{ V} + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} \\
 16 \text{ V} - j2 \text{ V} + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} & | -16 \text{ V} + j2 \text{ V} \\
 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= -4 \text{ V} + j2 \text{ V} & | : 1 \text{ k}\Omega \\
 \underline{I}_2 &= -4 \text{ mA} + j2 \text{ mA} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Der Strom \underline{I}_3 kann über die Kirchhoffsche Knotenregel am Verbindungspunkt von R_1 , R_2 und R_3 bestimmt werden.

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2 \text{ mA} - j4 \text{ mA} - 4 \text{ mA} + j2 \text{ mA} = -2 \text{ mA} - j2 \text{ mA} \quad (2)$$

Die zugehörigen **Beträge** müssen noch berechnet werden:

$$I_1 = \sqrt{(\text{Re } \underline{I}_1)^2 + (\text{Im } \underline{I}_1)^2} = \sqrt{(2 \text{ mA})^2 + (-4 \text{ mA})^2} \approx 4,472 \text{ mA} \quad (1)$$

$$I_2 = \sqrt{(\text{Re } \underline{I}_2)^2 + (\text{Im } \underline{I}_2)^2} = \sqrt{(-4 \text{ mA})^2 + (2 \text{ mA})^2} \approx 4,472 \text{ mA} \quad (1)$$

$$I_3 = \sqrt{(\text{Re } \underline{I}_3)^2 + (\text{Im } \underline{I}_3)^2} = \sqrt{(-2 \text{ mA})^2 + (-2 \text{ mA})^2} \approx 2,828 \text{ mA} \quad (1)$$

Zusammengefasste Ergebnisse:

$$\underline{I}_1 = 2 \text{ mA} - j4 \text{ mA}$$

$$I_1 \approx 4,472 \text{ mA}$$

$$\underline{I}_2 = -4 \text{ mA} + j2 \text{ mA}$$

$$I_2 \approx 4,472 \text{ mA}$$

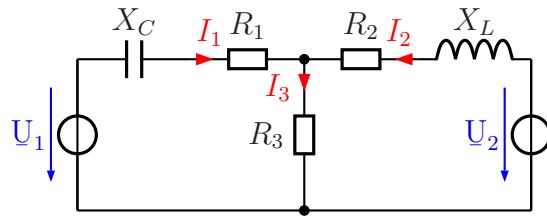
$$\underline{I}_3 = -2 \text{ mA} - j2 \text{ mA}$$

$$I_3 \approx 2,828 \text{ mA}$$

0.76 KOMPLEX-68b

Die Ströme I_1 , I_2 und I_3 in nebenstehende Schaltung sind gesucht. Bekannt sind folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_1 &= 3 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 3 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 1 \text{ k}\Omega \\ X_L &= 3 \text{ k}\Omega \\ X_C &= 3 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$



Weiterhin ist bekannt, dass beide Spannungen einen Betrag von 12 Volt haben, jedoch eilt U_2 der Spannung U_1 in der Phasenlage um 90° voraus.

Lösung: Festlegung der Bezugsspannung:

$$\underline{U}_1 = 12 \text{ V}$$

Die **vorausseilende** Spannung heißt dann:

$$\underline{U}_2 = j12 \text{ V}$$

Die komplexen Widerstände lauten:

$$\begin{aligned} \underline{R}_1 &= 3 \text{ k}\Omega \\ \underline{R}_2 &= 3 \text{ k}\Omega \\ \underline{R}_3 &= 1 \text{ k}\Omega \\ \underline{X}_L &= j3 \text{ k}\Omega \\ \underline{X}_C &= -j3 \text{ k}\Omega \quad (2) \end{aligned}$$

Zur Lösung verwendet man sinnvollerweise das Maschenstromverfahren. Den Vollständigen Baum lege ich durch R_3 . Dadurch ergeben sich die Ströme \underline{I}_1 und \underline{I}_2 als Maschenströme. Ich bilde die beiden Maschengleichungen:

$$\begin{array}{lcl} (1) & (\underline{X}_C + \underline{R}_1 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_1 & + \underline{R}_3 \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_1 \\ (2) & \underline{R}_3 \cdot \underline{I}_1 & + (\underline{X}_L + \underline{R}_2 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \end{array} \quad (2)$$

Die bekannten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lcl} (1) & (-j3 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1 & + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 = 12 \text{ V} \\ (2) & 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_1 & + (j3 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_2 = j12 \text{ V} \end{array}$$

Die Klammerausdrücke können noch etwas zusammengefasst werden.

$$\begin{array}{lcl} (1) & (-j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1 & + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 = 12 \text{ V} \\ (2) & 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_1 & + (j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_2 = j12 \text{ V} \end{array} \quad (2)$$

Dieses Gleichungssystem kann nun mit jedem beliebigen Lösungsverfahren aufgelöst werden.

Ich führe als Beispiel die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel durch.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 12 \text{ V} & 1 \text{ k}\Omega \\ j12 \text{ V} & j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega & 1 \text{ k}\Omega \\ 1 \text{ k}\Omega & j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{12 \text{ V} \cdot (j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega) - j12 \text{ V} \cdot 1 \text{ k}\Omega}{(-j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega) \cdot (j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega) - 1 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ k}\Omega} \\
 &= \frac{j36 \text{ k}\Omega \text{ V} + 48 \text{ k}\Omega \text{ V} - j12 \text{ k}\Omega \text{ V}}{9 \text{ k}\Omega^2 - j12 \text{ k}\Omega^2 + j12 \text{ k}\Omega^2 + 16 \text{ k}\Omega^2 - 1 \text{ k}\Omega^2} \\
 &= \frac{j24 \text{ k}\Omega \text{ V} + 48 \text{ k}\Omega \text{ V}}{24 \text{ k}\Omega^2} \\
 \underline{I}_1 &= 2 \text{ mA} + j1 \text{ mA} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1) eingesetzt, um \underline{I}_2 zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 (-j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1 + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} \\
 (-j3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega) \cdot (2 \text{ mA} + j1 \text{ mA}) + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} \\
 -j6 \text{ V} + 3 \text{ V} + 8 \text{ V} + j4 \text{ V} + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} \\
 11 \text{ V} - j2 \text{ V} + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} & | -11 \text{ V} + j2 \text{ V} \\
 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 1 \text{ V} + j2 \text{ V} & | : 1 \text{ k}\Omega \\
 \underline{I}_2 &= 1 \text{ mA} + j2 \text{ mA} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Der Strom \underline{I}_3 kann über die Kirchhoffsche Knotenregel am Verbindungspunkt von R_1 , R_2 und R_3 bestimmt werden.

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2 \text{ mA} + j1 \text{ mA} + 1 \text{ mA} + j2 \text{ mA} = 3 \text{ mA} - j3 \text{ mA} \quad (2)$$

Die zugehörigen **Beträge** müssen noch berechnet werden:

$$I_1 = \sqrt{(\text{Re } \underline{I}_1)^2 + (\text{Im } \underline{I}_1)^2} = \sqrt{(2 \text{ mA})^2 + (1 \text{ mA})^2} \approx 2,236 \text{ mA} \quad (1)$$

$$I_2 = \sqrt{(\text{Re } \underline{I}_2)^2 + (\text{Im } \underline{I}_2)^2} = \sqrt{(1 \text{ mA})^2 + (2 \text{ mA})^2} \approx 2,236 \text{ mA} \quad (1)$$

$$I_3 = \sqrt{(\text{Re } \underline{I}_3)^2 + (\text{Im } \underline{I}_3)^2} = \sqrt{(3 \text{ mA})^2 + (3 \text{ mA})^2} \approx 4,243 \text{ mA} \quad (1)$$

Zusammengefasste Ergebnisse:

$$\underline{I}_1 = 2 \text{ mA} + j1 \text{ mA}$$

$$I_1 \approx 2,236 \text{ mA}$$

$$\underline{I}_2 = 1 \text{ mA} + j2 \text{ mA}$$

$$I_2 \approx 2,236 \text{ mA}$$

$$\underline{I}_3 = 3 \text{ mA} + j3 \text{ mA}$$

$$I_3 \approx 4,243 \text{ mA}$$

0.77 KOMPLEX-70

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$(2\underline{x} - j4) \cdot (\underline{x} + 5) + j49 + 1 = (\underline{x} + 2) \cdot (2\underline{x} + j3) + 5 - j10$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(2\underline{x} - j4) \cdot (\underline{x} + 5) + j49 + 1 &= (\underline{x} + 2) \cdot (2\underline{x} + j3) + 5 - j10 \\ 2\underline{x}^2 + 10\underline{x} - j4\underline{x} - j20 + j49 + 1 &= 2\underline{x}^2 + j3\underline{x} + 4\underline{x} + j6 + 5 - j10 \quad | - 2\underline{x}^2 \\ 10\underline{x} - j4\underline{x} + j29 + 1 &= j3\underline{x} + 4\underline{x} - j4 + 5 \quad | - j29 - 1 - j3\underline{x} - 4\underline{x} \\ 6\underline{x} - j7\underline{x} &= -j33 + 4 \\ (6 - j7) \cdot \underline{x} &= -j33 + 4 \quad | : (6 - j7) \\ \underline{x} &= \frac{4 - j33}{6 - j7} \\ &= \frac{(4 - j33) \cdot (6 + j7)}{(6 - j7) \cdot (6 + j7)} \\ &= \frac{24 + j28 - j198 + 231}{36 + 49} \\ &= \frac{255 - j170}{85} \\ &= \frac{255}{85} - j \frac{170}{85} \\ \underline{x} &= 3 - j2 \\ L &= \{3 - j2\}\end{aligned}$$

0.78 KOMPLEX-71

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$(3\underline{x} - j2) \cdot (\underline{x} + 4) + j11 + 3 = (\underline{x} + 3) \cdot (3\underline{x} + j2) - 3 - j20$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (3\underline{x} - j2) \cdot (\underline{x} + 4) + j11 + 3 &= (\underline{x} + 3) \cdot (3\underline{x} + j2) - 3 - j20 \\ 3\underline{x}^2 + 12\underline{x} - j2\underline{x} - j8 + j11 + 3 &= 3\underline{x}^2 + j2\underline{x} + 9\underline{x} + j6 - 3 - j20 \quad | - 3\underline{x}^2 \\ 12\underline{x} - j2\underline{x} + j3 + 3 &= j2\underline{x} + 9\underline{x} - j14 - 3 \quad | - j3 - 3 - j2\underline{x} - 9\underline{x} \\ 3\underline{x} - j4\underline{x} &= -j17 - 6 \\ (3 - j4) \cdot \underline{x} &= -j17 - 6 \quad | : (3 - j4) \\ \underline{x} &= \frac{-j17 - 6}{3 - j4} \\ &= \frac{(-j17 - 6) \cdot (3 + j4)}{(3 - j4) \cdot (3 + j4)} \\ &= \frac{-j51 + 68 - 18 - j24}{9 + 16} \\ &= \frac{50 - j75}{25} \\ &= \frac{50}{25} - j \frac{75}{25} \\ \underline{x} &= 2 - j3 \\ L &= \{2 - j3\} \end{aligned}$$

0.79 KOMPLEX-72

In nebenstehender Schaltung sind folgende Werte bekannt:

$$R_1 = 2 \Omega$$

$$R_2 = 4 \Omega$$

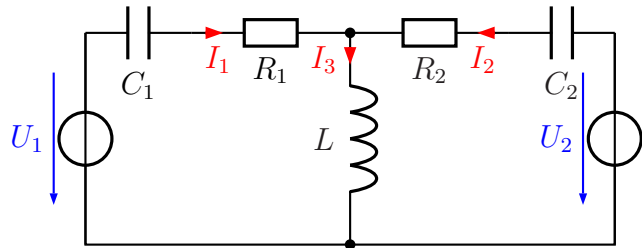
$$X_{C1} = 6 \Omega$$

$$X_{C2} = 8 \Omega$$

$$X_L = 4 \Omega$$

$$\underline{U}_1 = j24 \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = 24 \text{ V}$$



Berechnen Sie alle komplexen Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 sowie deren Beträge!

Lösung: Zunächst werden die komplexen Widerstände bestimmt.

$$\underline{R}_1 = 2 \Omega$$

$$\underline{R}_2 = 4 \Omega$$

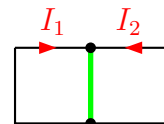
$$\underline{X}_{C1} = -j6 \Omega$$

$$\underline{X}_{C2} = -j8 \Omega$$

$$\underline{X}_L = j4 \Omega$$

1. Lösungsvariante: Maschenstromverfahren Zur Lösung möchte ich zunächst das **Maschenstromverfahren** verwenden. Auch mit Hilfe des Überlagerungssatzes ist eine Lösung möglich; diese möchte ich anschließend vorstellen.

Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem Maschenstromverfahren arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in **grüner** Farbe dargestellt. Er verläuft durch L . Damit ergeben sich die Maschenströme I_1 und I_2 , mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft über C_1 , R_1 , L und U_1 , Masche 2 entsprechend über C_2 , R_2 , L und U_2 .



Hiermit können nun die Maschengleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{array}{lcl} (1) & (\underline{X}_{C1} + \underline{R}_1 + \underline{X}_L) \cdot \underline{I}_1 & + \underline{X}_L \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_1 \\ (2) & \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 & + (\underline{X}_{C2} + \underline{R}_2 + \underline{X}_L) \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \end{array}$$

Als nächstes werden die gegebenen Werte in das Gleichungssystem eingesetzt, die Gleichungen werden dann noch vereinfacht.

$$\begin{array}{lcl} (1) & (-j6 \Omega + 2 \Omega + j4 \Omega) \cdot \underline{I}_1 & + j4 \Omega \cdot \underline{I}_2 = j24 \text{ V} \\ (2) & j4 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (-j8 \Omega + 4 \Omega + j4 \Omega) \cdot \underline{I}_2 = 24 \text{ V} \\ \hline (1) & (2 \Omega - j2 \Omega) \cdot \underline{I}_1 & + j4 \Omega \cdot \underline{I}_2 = j24 \text{ V} \\ (2) & j4 \Omega \cdot \underline{I}_1 & + (4 \Omega - j4 \Omega) \cdot \underline{I}_2 = 24 \text{ V} \quad (5) \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit jedem beliebigen Verfahren gelöst werden.

Variante 1: Einsetzungsverfahren Gleichung (2) wird nach \underline{I}_1 umgestellt und in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 j4\Omega \cdot \underline{I}_1 + (4\Omega - j4\Omega) \cdot \underline{I}_2 &= 24\text{ V} & | - (4\Omega - j4\Omega) \cdot \underline{I}_2 \\
 j4\Omega \cdot \underline{I}_1 &= 24\text{ V} - (4\Omega - j4\Omega) \cdot \underline{I}_2 & | : (j4\Omega) \\
 \underline{I}_1 &= \frac{24\text{ V}}{j4\Omega} - \frac{4\Omega - j4\Omega}{j4\Omega} \cdot \underline{I}_2 \\
 \underline{I}_1 &= \frac{j24\text{ V}}{j^24\Omega} - \left(\frac{4\Omega}{j4\Omega} - \frac{j4\text{ k}\Omega}{j4\Omega} \right) \cdot \underline{I}_2 \\
 \underline{I}_1 &= -j6\text{ A} - (-j1 - 1) \cdot \underline{I}_2 \\
 \underline{I}_1 &= -j6\text{ A} + j \cdot \underline{I}_2 + \underline{I}_2
 \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (1):

$$\begin{aligned}
 (2\Omega - j2\Omega) \cdot \underline{I}_1 + j4\Omega \cdot \underline{I}_2 &= j24\text{ V} \\
 (2\Omega - j2\Omega) \cdot (-j6\text{ A} + j \cdot \underline{I}_2 + \underline{I}_2) + j4\Omega \cdot \underline{I}_2 &= j24\text{ V} \\
 -j12\text{ V} + j2\Omega \cdot \underline{I}_2 + 2\Omega \cdot \underline{I}_2 - 12\text{ V} + 2\Omega \cdot \underline{I}_2 - j2\Omega \cdot \underline{I}_2 + j4\Omega \cdot \underline{I}_2 &= j24\text{ V} \\
 4\Omega \cdot \underline{I}_2 + j4\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12\text{ V} + j36\text{ V} \\
 (4\Omega + j4\Omega) \cdot \underline{I}_2 &= 12\text{ V} + j36\text{ V} \\
 \underline{I}_2 &= \frac{12\text{ V} + j36\text{ V}}{4\Omega + j4\Omega}
 \end{aligned}$$

Um den Bruch in Real- und Imaginärteil zu zerlegen, kann beispielsweise konjugiert komplex erweitert werden.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_2 &= \frac{12\text{ V} + j36\text{ V}}{4\Omega + j4\Omega} \\
 &= \frac{(12\text{ V} + j36\text{ V}) \cdot (4\Omega - j4\Omega)}{(4\Omega + j4\Omega) \cdot (4\Omega - j4\Omega)} \\
 &= \frac{48\text{ V}\Omega - j48\text{ V}\Omega + j144\text{ V}\Omega + 144\text{ V}\Omega}{16\Omega^2 + 16\Omega^2} \\
 &= \frac{192\text{ V}\Omega + j96\text{ V}\Omega}{32\Omega^2} \\
 \underline{I}_2 &= 6\text{ A} + j3\text{ A} \quad (25)
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt, um \underline{I}_1 zu berechnen.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= -j6\text{ A} + j \cdot \underline{I}_2 + \underline{I}_2 \\
 &= -j6\text{ A} + j \cdot (6\text{ A} + j3\text{ A}) + (6\text{ A} + j3\text{ A}) \\
 &= -j6\text{ A} + j6\text{ A} - 3\text{ A} + 6\text{ A} + j3\text{ A} \\
 \underline{I}_1 &= 3\text{ A} + j3\text{ A} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Variante 2: Cramersche Regel Man kann das Gleichungssystem auch mit Hilfe der Cramerschen Regel lösen. Das sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} j24 \text{ V} & j4 \Omega \\ 24 \text{ V} & (4 \Omega - j4 \Omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (2 \Omega - j2 \Omega) & j4 \Omega \\ j4 \Omega & (4 \Omega - j4 \Omega) \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{j24 \text{ V} \cdot (4 \Omega - j4 \Omega) - 24 \text{ V} \cdot j4 \Omega}{(2 \Omega - j2 \Omega) \cdot (4 \Omega - j4 \Omega) - j4 \Omega \cdot j4 \Omega} \\
 &= \frac{j96 \text{ V} \Omega + 96 \text{ V} \Omega - j96 \text{ V} \Omega}{8 \Omega^2 - j8 \Omega^2 - j8 \Omega^2 - 8 \Omega^2 + 16 \Omega^2} \\
 &= \frac{96 \text{ V} \Omega}{16 \Omega^2 - j16 \Omega^2} \\
 &= \frac{96 \text{ V}}{16 \Omega \cdot (1 - j1)} \\
 \underline{I}_1 &= 6 \text{ A} \cdot \frac{1}{1 - j1}
 \end{aligned}$$

Zum Zerlegen in Real- und Imaginärteil muss der Bruch konjugiert komplex erweitert werden.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= 6 \text{ A} \cdot \frac{1 \cdot (1 + j)}{(1 - j1) \cdot (1 + j)} \\
 &= 6 \text{ A} \cdot \frac{1 + j}{1 + 1} \\
 &= 6 \text{ A} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2} \right) \\
 \underline{I}_1 &= 3 \text{ A} + j3 \text{ A} \quad (25)
 \end{aligned}$$

\underline{I}_2 kann dann durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen bestimmt werden. Am einfachsten geht das mit Gleichung (1).

$$\begin{aligned}
 (2 \Omega - j2 \Omega) \cdot \underline{I}_1 + j4 \Omega \cdot \underline{I}_2 &= j24 \text{ V} \\
 (2 \Omega - j2 \Omega) \cdot (3 \text{ A} + j3 \text{ A}) + j4 \Omega \cdot \underline{I}_2 &= j24 \text{ V} \\
 6 \text{ V} + j6 \text{ V} - j6 \text{ V} + 6 \text{ V} + j4 \Omega \cdot \underline{I}_2 &= j24 \text{ V} \\
 12 \text{ V} + j4 \Omega \cdot \underline{I}_2 &= j24 \text{ V} \\
 j4 \Omega \cdot \underline{I}_2 &= j24 \text{ V} - 12 \text{ V} \\
 &= \frac{j24 \text{ V}}{j4 \Omega} - \frac{12 \text{ V}}{j4 \Omega} \\
 \underline{I}_2 &= 6 \text{ A} + j3 \text{ A} \quad (10)
 \end{aligned}$$

Restliche Lösung: Auch der Strom \underline{I}_3 ist gesucht. Aus der Schaltung ergibt sich:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Hiermit kann \underline{I}_3 bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\underline{I}_3 &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ &= 3 \text{ A} + j3 \text{ A} + 6 \text{ A} + j3 \text{ A} \\ \underline{I}_3 &= 9 \text{ A} + j6 \text{ A} \quad (5)\end{aligned}$$

Zum Schluss werden die zugehörigen Beträge berechnet:

$$I_1 = \sqrt{(3 \text{ A})^2 + (3 \text{ A})^2} \approx 4,2426 \text{ A} \quad (5)$$

$$I_2 = \sqrt{(6 \text{ A})^2 + (3 \text{ A})^2} \approx 6,7082 \text{ A} \quad (5)$$

$$I_3 = \sqrt{(9 \text{ A})^2 + (6 \text{ A})^2} \approx 10,817 \text{ A} \quad (5)$$

2. Lösungsvariante: Überlagerungssatz Mit dem Überlagerungssatz verläuft die Lösung in drei Schritten.

1. Spannungsquelle U_1 in Betrieb, Spannungsquelle U_2 kurzgeschlossen
2. Spannungsquelle U_2 in Betrieb, Spannungsquelle U_1 kurzgeschlossen
3. Addition der Teilströme

Schritt 1: Nur U_1 in Betrieb

In diesem Fall liegt die Reihenschaltung aus R_2 und C_2 parallel zu L . Den Ersatzwiderstand aus diesen drei Komponenten nenne ich $Z_{R_2C_2L}$.

$$\begin{aligned}
 Z_{R_2C_2L} &= \frac{(\underline{R}_2 + \underline{X}_{C_2}) \cdot \underline{X}_L}{(\underline{R}_2 + \underline{X}_{C_2}) + \underline{X}_L} \\
 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_L + \underline{X}_{C_2} \cdot \underline{X}_L}{\underline{R}_2 + \underline{X}_{C_2} + \underline{X}_L} \\
 &= \frac{4 \Omega \cdot j4 \Omega - j8 \Omega \cdot j4 \Omega}{4 \Omega - j8 \Omega + j4 \Omega} \\
 &= \frac{j16 \Omega^2 + 32 \Omega^2}{4 \Omega - j4 \Omega} \\
 &= \frac{(j16 \Omega^2 + 32 \Omega^2) \cdot (4 \Omega + j4 \Omega)}{(4 \Omega - j4 \Omega) \cdot (4 \Omega + j4 \Omega)} \\
 &= \frac{j64 \Omega^3 - 64 \Omega^3 + 128 \Omega^3 + j128 \Omega^3}{16 \Omega^2 + 16 \Omega^2} \\
 &= \frac{64 \Omega^3 + j192 \Omega^3}{32 \Omega^2} \\
 &= 2 \Omega + j6 \Omega
 \end{aligned}$$

Hierzu ist C_1 und R_1 in Reihe geschaltet. Den gesamten Ersatzwiderstand für diesen ersten Fall nenne ich Z_1 .

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_{C_1} + \underline{R}_1 + \underline{Z}_{R_2C_2L} = -j6 \Omega + 2 \Omega + 2 \Omega + j6 \Omega = 4 \Omega$$

Hiermit kann sofort \underline{I}_{11} (der Strom \underline{I}_1 für den ersten Fall) berechnet werden.

$$\underline{I}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{j24 \text{ V}}{4 \Omega} = j6 \text{ A}$$

Zur Berechnung der beiden anderen Ströme wird die Spannung am Ersatzwiderstand $Z_{R_2C_2L}$ benötigt. Ich nenne diese Spannung \underline{U}_{L1} , da sie ja auch an der Induktivität anliegt. Sie kann mit dem Ohmschen Gesetz an $Z_{R_2C_2L}$ bestimmt werden.

$$\underline{U}_{L1} = \underline{Z}_{R_2C_2L} \cdot \underline{I}_{11} = (2 \Omega + j6 \Omega) \cdot j6 \text{ A} = j12 \text{ V} - 36 \text{ V}$$

Hiermit kann jetzt der Strom \underline{I}_{31} über das Ohmsche Gesetz an L bestimmt werden.

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{L1}}{\underline{X}_L} = \frac{j12 \text{ V} - 36 \text{ V}}{j4 \Omega} = \frac{j^2 12 \text{ V} - j36 \text{ V}}{j^2 4 \Omega} = \frac{-12 \text{ V} - j36 \text{ V}}{-4 \Omega} = 3 \text{ A} + j9 \text{ A}$$

Nun fehlt nur noch der Strom \underline{I}_{21} . Zur Berechnung haben wir zwei Möglichkeiten, die ich beide vorstellen möchte.

Der Strom \underline{I}_{21} kann ähnlich wie \underline{I}_{31} bestimmt werden. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass der Strom in die andere Richtung als die Spannung orientiert ist. Als Widerstand muss die Reihenschaltung aus R_2 und C_2 verwendet werden, dann lässt sich das Ohmsche Gesetz anwenden.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_{21} &= -\frac{\underline{U}_{L1}}{\underline{R}_2 + \underline{X}_{C2}} \\
 &= -\frac{j12 \text{ V} - 36 \text{ V}}{4 \Omega - j8 \Omega} \\
 &= -\frac{(j12 \text{ V} - 36 \text{ V}) \cdot (4 \Omega + j8 \Omega)}{(4 \Omega - j8 \Omega) \cdot (4 \Omega + j8 \Omega)} \\
 &= -\frac{j48 \text{ V}\Omega - 96 \text{ V}\Omega - 144 \text{ V}\Omega - j288 \text{ V}\Omega}{16 \Omega^2 + 64 \Omega^2 - 240 \text{ V}\Omega - j240 \text{ V}\Omega} \\
 &= -\frac{80 \Omega^2}{80 \Omega^2} \\
 \underline{I}_{21} &= 3 \text{ A} + j3 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Alternativ zu diesem Lösungsweg kann \underline{I}_{21} natürlich auch mit der Kirchhoffschen Knotenregel am Knoten über L bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_{11} + \underline{I}_{21} &= \underline{I}_{31} \\
 \underline{I}_{21} &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{11} \\
 \underline{I}_{21} &= 3 \text{ A} + j9 \text{ A} - j6 \text{ A} \\
 \underline{I}_{21} &= 3 \text{ A} + j3 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir nun alle Teilströme zusammen und können in den zweiten Schritt einsteigen.

Schritt 2: Nur U_2 in Betrieb

In diesem Fall wird U_1 durch einen Kurzschluss ersetzt; damit liegt die Reihenschaltung aus C_1 und R_1 parallel zu L . Diese Parallelschaltung nenne ich $Z_{C_1 R_1 L}$.

$$\begin{aligned} Z_{C_1 R_1 L} &= \frac{(\underline{R}_1 + \underline{X}_{C_1}) \cdot \underline{X}_L}{(\underline{R}_1 + \underline{X}_{C_1}) + \underline{X}_L} \\ &= \frac{\underline{R}_1 \cdot \underline{X}_L + \underline{X}_{C_1} \cdot \underline{X}_L}{\underline{R}_1 + \underline{X}_{C_1} + \underline{X}_L} \\ &= \frac{2 \Omega \cdot j4 \Omega - j6 \Omega \cdot j4 \Omega}{2 \Omega - j6 \Omega + j4 \Omega} \\ &= \frac{j8 \Omega^2 + 24 \Omega^2}{2 \Omega - j2 \Omega} \\ &= \frac{(j8 \Omega^2 + 24 \Omega^2) \cdot (2 \Omega + j2 \Omega)}{(2 \Omega - j2 \Omega) \cdot (2 \Omega + j2 \Omega)} \\ &= \frac{j16 \Omega^3 - 16 \Omega^3 + 48 \Omega^3 + j48 \Omega^3}{4 \Omega^2 + 4 \Omega^2} \\ &= \frac{32 \Omega^3 + j64 \Omega^3}{8 \Omega^2} \\ &= 4 \Omega + j8 \Omega \end{aligned}$$

Zu $Z_{C_1 R_1 L}$ ist R_2 und C_2 in Reihe geschaltet. Den Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung nennen ich Z_2 .

$$Z_2 = Z_{C_1 R_1 L} + \underline{R}_2 + \underline{X}_{C_2} = 4 \Omega + j8 \Omega + 4 \Omega - j8 \Omega = 8 \Omega$$

Hiermit kann der Strom I_{22} über das Ohmsche Gesetz an Z_2 bestimmt werden.

$$I_{22} = \frac{\underline{U}_2}{Z_2} = \frac{24 \text{ V}}{8 \Omega} = 3 \text{ A}$$

Zur Berechnung der anderen Ströme wird die Spannung an $Z_{C_1 R_1 L}$ benötigt. Diese Spannung nenne ich U_{L2} .

$$\underline{U}_{L2} = Z_{C_1 R_1 L} \cdot I_{22} = (4 \Omega + j8 \Omega) \cdot 3 \text{ A} = 12 \text{ V} + j24 \text{ V}$$

Mit dieser Spannung kann nun der Strom I_{32} in L über das Ohmsche Gesetz berechnet werden.

$$I_{32} = \frac{\underline{U}_{L2}}{\underline{X}_L} = \frac{12 \text{ V} + j24 \text{ V}}{j4 \Omega} = \frac{j12 \text{ V} + j^2 24 \text{ V}}{j^2 4 \Omega} = \frac{j12 \text{ V} - 24 \text{ V}}{-4 \Omega} = -j3 \text{ A} + 6 \text{ A}$$

Jetzt fehlt nur noch der Strom I_{12} . Am einfachsten lässt er sich über die Kirchhoffschen Knotenregel am Knoten über L bestimmen.

$$\begin{aligned} I_{12} + I_{22} &= I_{32} \\ I_{12} &= I_{32} - I_{22} \\ I_{12} &= -j3 \text{ A} + 6 \text{ A} - 3 \text{ A} \\ I_{12} &= 3 \text{ A} - j3 \text{ A} \end{aligned}$$

Schritt 3: Zusammenfassen der Teilströme

Die Teilströme aus Schritt 1 und Schritt 2 können nun einfach addiert werden.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} + \underline{I}_{12} = j6 \text{ A} + 3 \text{ A} - j3 \text{ A} = 3 \text{ A} + j3 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{21} + \underline{I}_{22} = 3 \text{ A} + j3 \text{ A} + 3 \text{ A} = 6 \text{ A} + j3 \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} + \underline{I}_{32} = 3 \text{ A} + j9 \text{ A} - j3 \text{ A} + 6 \text{ A} = 9 \text{ A} + j6 \text{ A}$$

Die Berechnung der Beträge wurde schon in der Lösungsvariante mit dem Maschenstromverfahren vorgestellt und muss daher hier nicht wiederholt werden.

0.80 KOMPLEX-73

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$\frac{j5\underline{x} + 9 + j94}{j7 - 3} = 2\underline{x} + 4$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{j5\underline{x} + 9 + j94}{j7 - 3} &= 2\underline{x} + 4 && | \cdot (j7 - 3) \\ j5\underline{x} + 9 + j94 &= (2\underline{x} + 4) \cdot (j7 - 3) \\ j5\underline{x} + 9 + j94 &= j14\underline{x} + j28 - 6\underline{x} - 12 && | - 9 - j94 - j14\underline{x} + 6\underline{x} \\ 6\underline{x} - j9\underline{x} &= -21 - j66 \\ \underline{x} \cdot (6 - j9) &= -21 - j66 && | : (6 - j9) \\ \underline{x} &= \frac{-21 - j66}{6 - j9} \\ &= \frac{(-21 - j66) \cdot (6 + j9)}{(6 - j9) \cdot (6 + j9)} \\ &= \frac{-126 - j189 - j396 + 594}{36 + 81} \\ &= \frac{468 - j585}{117} \\ &= \frac{468}{117} - j \frac{585}{117} \\ \underline{x} &= 4 - j5 \\ L &= \{4 - j5\} \end{aligned}$$

0.81 KOMPLEX-74

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Komplexen Gleichung!

$$\frac{j4\underline{x} - 12 + j92}{j4 - 2} = 3\underline{x} + 7$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{j4\underline{x} - 12 + j92}{j4 - 2} &= 3\underline{x} + 7 && | \cdot (j4 - 2) \\ j4\underline{x} - 12 + j92 &= (3\underline{x} + 7) \cdot (j4 - 2) \\ j4\underline{x} - 12 + j92 &= j12\underline{x} - 6\underline{x} + j28 - 14 && | + 12 - j92 - j12\underline{x} + 6\underline{x} \\ 6\underline{x} - j8\underline{x} &= -j64 - 2 \\ \underline{x} \cdot (6 - j8) &= -j64 - 2 && | : (6 - j8) \\ \underline{x} &= \frac{-j64 - 2}{6 - j8} \\ &= \frac{(-j64 - 2) \cdot (6 + j8)}{(6 - j8) \cdot (6 + j8)} \\ &= \frac{-j384 + 512 - 12 - j16}{36 + 64} \\ &= \frac{-j400 + 500}{100} \\ &= -j\frac{400}{100} + \frac{500}{100} \\ \underline{x} &= -j4 + 5 \\ L &= \{5 - j4\} \end{aligned}$$

0.82 KOMPLEX-75

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

$$(4 + j2)(\underline{x} - j2\underline{x}) + j12 = (2 + j4)(2\underline{x} - j\underline{x}) - 24$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(4 + j2)(\underline{x} - j2\underline{x}) + j12 &= (2 + j4)(2\underline{x} - j\underline{x}) - 24 \\4\underline{x} - j8\underline{x} + j2\underline{x} + 4\underline{x} - j12 &= 4\underline{x} - j2\underline{x} + j8\underline{x} + 4\underline{x} - 24 && (3) \\8\underline{x} - j6\underline{x} + j12\underline{x} &= 8\underline{x} + j6\underline{x} - 24 && | - 8\underline{x} - j6\underline{x} - j12 \quad (2) \\-j12\underline{x} &= -24 - j12 && | : (-j12) \quad (3) \\\underline{x} &= \frac{-24 - j12}{-j12} && (3) \\&= \frac{-24 - j12}{-j12} \cdot \frac{j}{j} && (3) \\&= \frac{-j24 + 12}{12} && (3) \\\underline{x} &= 1 - j2 && (3)\end{aligned}$$

0.83 KOMPLEX-76

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

$$(6 + j3)(\underline{x} - j2\underline{x}) + j18 = (3 + j6)(2\underline{x} - j\underline{x}) - 36$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(6 + j3)(\underline{x} - j2\underline{x}) + j18 &= (3 + j6)(2\underline{x} - j\underline{x}) - 36 \\ 6\underline{x} - j12\underline{x} + j3\underline{x} + 6\underline{x} + j18 &= 6\underline{x} - j3\underline{x} + j23\underline{x} + 6\underline{x} - 36 & (3) \\ 12\underline{x} - j9\underline{x} + j18 &= 12\underline{x} + j9\underline{x} - 36 & | -12\underline{x} - j18 - j9\underline{x} \quad (2) \\ -j18\underline{x} &= -36 - j18 & | : (-j18) \quad (3) \\ \underline{x} &= \frac{-36 - j18}{-j18} & (3) \\ &= \frac{-36 - j18}{-j18} \cdot \frac{j}{j} & (3) \\ &= \frac{-j36 + 18}{18} & (3) \\ \underline{x} &= 1 - j2 & (3)\end{aligned}$$

0.84 KOMPLEX-77

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

$$(1 - j2)(2\underline{x} + j3\underline{x}) + 2 = (3 - j4)(\underline{x} + 5) + j21$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(1 - j2)(2\underline{x} + j3\underline{x}) + 2 &= (3 - j4)(\underline{x} + 5) + j21 \\ 2\underline{x} + j3\underline{x} - j4\underline{x} + 6\underline{x} + 2 &= 3\underline{x} + 15 - j4\underline{x} - j20 + j21 & (2) \\ 8\underline{x} - j\underline{x} + 2 &= 3\underline{x} - j4\underline{x} + 15 + j & | -2 - 3\underline{x} + j4\underline{x} & (2) \\ 5\underline{x} + j3\underline{x} &= 13 + j & (2) \\ \underline{x}(5 + j3) &= 13 + j & | : (5 + j3) & (2) \\ \underline{x} &= \frac{13 + j}{5 + j3} & (2) \\ &= \frac{(13 + j) \cdot (5 - j3)}{(5 + j3) \cdot (5 - j3)} & (3) \\ &= \frac{65 - j39 + j5 + 3}{25 + 9} & (3) \\ &= \frac{68 - j34}{34} & (2) \\ \underline{x} &= 2 - j & (2)\end{aligned}$$

0.85 KOMPLEX-78

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

$$(3 - j2)(3\underline{x} - j\underline{x}) + 15 = (2 - j3)(\underline{x} + 4) - j4$$

Lösung:

$$\begin{aligned}(3 - j2)(3\underline{x} - j\underline{x}) + 15 &= (2 - j3)(\underline{x} + 4) - j4 \\ 9\underline{x} - j3\underline{x} - j6\underline{x} - 2\underline{x} + 15 &= 2\underline{x} + 8 - j3\underline{x} - j12 - j4 & (2) \\ 7\underline{x} - j9\underline{x} + 15 &= 2\underline{x} - j3\underline{x} + 8 - j16 & | -15 - 2\underline{x} + j3\underline{x} & (2) \\ 5\underline{x} - j6\underline{x} &= -7 - j16 & (2) \\ \underline{x}(5 - j6) &= -7 - j16 & (2) \\ \underline{x} &= \frac{-7 - j16}{5 - j6} & (2) \\ &= \frac{(-7 - j16) \cdot (5 + j6)}{(5 - j6) \cdot (5 + j6)} & (3) \\ &= \frac{-35 - j42 - j80 + 96}{25 + 36} & (3) \\ &= \frac{61 - j122}{61} \\ \underline{x} &= 1 - j2 & (2)\end{aligned}$$

0.86 KOMPLEX-79

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

$$\frac{36\underline{x} - j30}{3\underline{x} + 5} = 9 - j6$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{36\underline{x} - j30}{3\underline{x} + 5} &= 9 - j6 && | \cdot (3\underline{x} + 5) \\ 36\underline{x} - j30 &= (9 - j6) \cdot (3\underline{x} + 5) && (2) \\ 36\underline{x} - j30 &= 27\underline{x} + 45 - j18\underline{x} - j30 && | + j30 - 27\underline{x} + j18\underline{x} \quad (2) \\ 9\underline{x} + j18\underline{x} &= 45 && (2) \\ \underline{x} \cdot (9 + j18) &= 45 && | : (9 + j18) \quad (2) \\ \underline{x} &= \frac{45}{9 + j18} && (2) \\ &= \frac{45 \cdot (9 - j18)}{(9 + j18) \cdot (9 - j18)} && (3) \\ &= \frac{405 - j810}{81 + 324} && (3) \\ &= \frac{405 - j810}{405} && (2) \\ \underline{x} &= 1 - j2 && (2)\end{aligned}$$

0.87 KOMPLEX-80

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

$$\frac{9\underline{x} + 19}{2\underline{x} + j6} = 6 - j5$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{9\underline{x} + 19}{2\underline{x} + j6} &= 6 - j5 && | \cdot (2\underline{x} + j6) \\ 9\underline{x} + 19 &= (6 - j5) \cdot (2\underline{x} + j6) && (2) \\ 9\underline{x} + 19 &= 12\underline{x} + j36 - j10\underline{x} + 30 && | - 19 - 12\underline{x} + j10\underline{x} \quad (2) \\ -3\underline{x} + j10\underline{x} &= 11 + j36 && (2) \\ \underline{x} \cdot (-3 + j10) &= 11 + j36 && | : (-3 + j10) \quad (2) \\ \underline{x} &= \frac{11 + j36}{-3 + j10} && (2) \\ &= \frac{(11 + j36) \cdot (-3 - j10)}{(-3 + j10) \cdot (-3 - j10)} && (3) \\ &= \frac{-33 - j110 - j108 + 360}{9 + 100} && (3) \\ &= \frac{327 - j218}{109} && (2) \\ \underline{x} &= 3 - j2 && (2)\end{aligned}$$

0.88 KOMPLEX-81

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

$$\frac{4\underline{x} - 17 - j6}{6\underline{x} - 12} = \frac{2\underline{x} - 2 - j3}{3\underline{x} - j9}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{4\underline{x} - 17 - j6}{6\underline{x} - 12} &= \frac{2\underline{x} - 2 - j3}{3\underline{x} - j9} && | \cdot (6\underline{x} - 12) \cdot (3\underline{x} - j9) \\ (4\underline{x} - 17 - j6) \cdot (3\underline{x} - j9) &= (2\underline{x} - 2 - j3) \cdot (6\underline{x} - 12) && (2) \\ 12\underline{x}^2 - j36\underline{x} - 51\underline{x} + j153 - j18\underline{x} - 54 &= 12\underline{x}^2 - 24\underline{x} - 12\underline{x} + 24 - j18\underline{x} + j36 && | - 12\underline{x}^2 \\ -j54\underline{x} - 51\underline{x} + j153 - 54 &= -36\underline{x} + 24 - j18\underline{x} + j36 && | - j153 + 54 + 36\underline{x} + j18\underline{x} \\ -15\underline{x} - j36\underline{x} &= 78 - j117 && (2) \\ \underline{x} \cdot (-15 - j36) &= 78 - j117 && | : (-15 - j117) \\ \underline{x} &= \frac{78 - j117}{-15 - j36} && (2) \\ &= \frac{(78 - j117) \cdot (-15 + j36)}{(-15 - j36) \cdot (-15 + j36)} && (2) \\ &= \frac{-1170 + j2808 + j1755 - 4212}{225 + 1296} && (2) \\ &= \frac{3042 + j4563}{1521} && (2) \\ \underline{x} &= 2 + j3 && (2) \end{aligned}$$

0.89 KOMPLEX-82

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung.

$$\frac{4x - 35 + j6}{10x - 20} = \frac{2x - 2 - j3}{5x + j15}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
 \frac{4x - 35 + j6}{10x - 20} &= \frac{2x - 2 - j3}{5x + j15} && | \cdot (10x - 20) \cdot (5x + j15) \\
 (4x - 35 + j6) \cdot (5x + j15) &= (2x - 2 - j3) \cdot (10x - 20) && (2) \\
 20x^2 + j60x - 175x - j525 + j30x - 90 &= 20x^2 - 40x - 20x + 40 - j30x + j60 && | - 20x^2 \\
 -175x + j90x - 90 - j525 &= -60x - j30x + 40 + j60 && | + 90 + j525 + 60x + j30x \\
 -115x + j120x &= 130 + j585 && (2) \\
 x \cdot (-115 + j120) &= 130 + j585 && | : (-115 + j120) \\
 x &= \frac{130 + j585}{-115 + j120} && (2) \\
 &= \frac{(130 + j585) \cdot (-115 - j120)}{(-115 + j120) \cdot (-115 - j120)} && (2) \\
 &= \frac{-14\,950 - j15\,600 - j67\,275 + 70\,200}{13\,225 + 14\,400} && (2) \\
 &= \frac{55\,250 - j82\,875}{27\,625} && (2) \\
 x &= 2 - j3 && (2)
 \end{aligned}$$