

Musterlösungen Integralrechnung

4. März 2018

Inhaltsverzeichnis

1	INTEGR-01	2
2	INTEGR-02	4
3	INTEGR-03	6
4	INTEGR-04	8
5	INTEGR-05	10
6	INTEGR-06	12
7	INTEGR-07	14
8	INTEGR-08	16
9	INTEGR-09	18
10	INTEGR-10	20
11	INTEGR-11	22
12	INTEGR-12	25
13	INTEGR-13	27
14	INTEGR-14	29
15	INTEGR-15	31
16	INTEGR-16	32

17 INTEGR-17

34

18 INTEGR-18

35

1 INTEGR-01

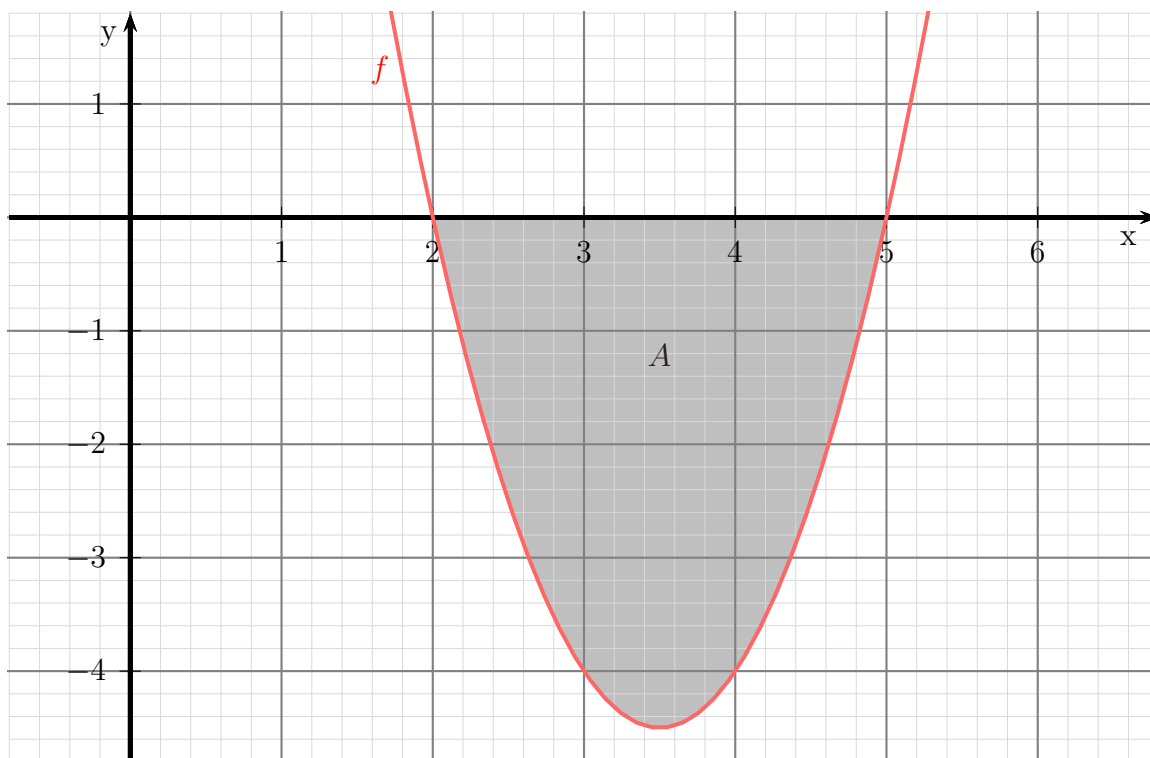
Berechnen Sie die Fläche, die zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse liegt.

$$f(x) = 2x^2 - 14x + 20$$

Fertigen Sie vor Beginn der Rechnung eine Skizze an!

Lösung:

Bevor wir uns näher mit der Lösung beschäftigen, schauen wir uns den Funktionsgraphen einmal genau an. (3)



1. Berechnung der Grenzen: Die gesuchte Fläche liegt unterhalb der x -Achse im Bereich zwischen etwa 2 und 5. Die genauen Grenzen müssen wir natürlich zunächst ausrechnen. Dazu setzen wir den Funktionsterm gleich Null.

$$2x^2 - 14x + 20 = 0 \quad | : 2 \quad (1)$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad (1)$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10}$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \quad (3)$$

2. Berechnung der Fläche: Da die gesuchte Fläche komplett **unterhalb** der x -Achse liegt, wird das Integral in dem Bereich **negativ**. Das kann man ausgleichen, indem man die Fläche als das **negative** Integral ansetzt. Man kann auch um das Integral Betragsstriche setzen. Da die letzte Methode immer dann angewendet werden kann, wenn man nicht so recht weiß, welches Vorzeichen sich ergibt, wähle ich diese Methode.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_2^5 2x^2 - 14x + 20 \, dx \right| \quad | \text{Stammfunktion bilden} \quad (3) \\ &= \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 20x \right]_2^5 \right| \quad | \text{Grenzen einsetzen} \quad (3) \\ &= \left| \left(\frac{2}{3} \cdot 5^3 - 7 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 \right) \right| \quad (3) \\ &= \left| \frac{25}{3} - \frac{52}{3} \right| \\ &= \left| -\frac{27}{3} \right| \\ A &= |-9| \\ A &= 9 \quad (3) \end{aligned}$$

Ergebnis: Die gesuchte Fläche beträgt $A = 9$ Flächeneinheiten

2 INTEGR-02

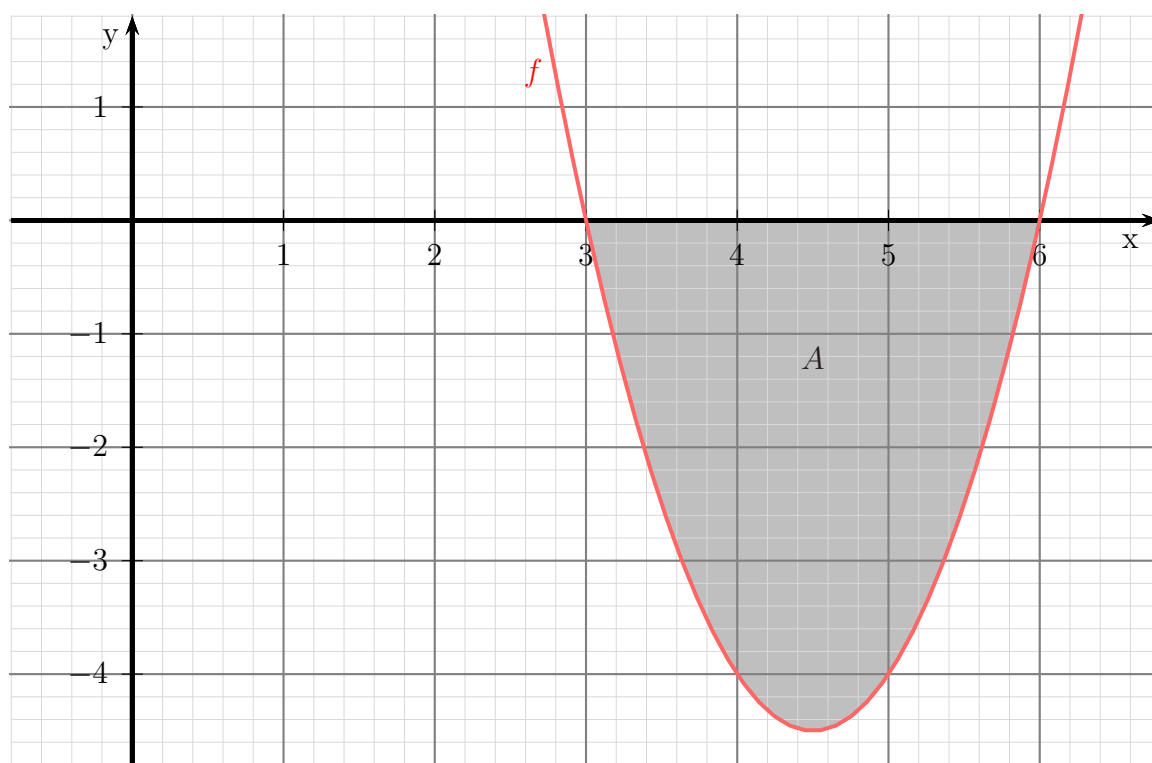
Berechnen Sie die Fläche, die zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse liegt.

$$f(x) = 2x^2 - 18x + 36$$

Fertigen Sie vor Beginn der Rechnung eine Skizze an!

Lösung:

Bevor wir uns näher mit der Lösung beschäftigen, schauen wir uns den Funktionsgraphen einmal genau an.



(3)

1. Berechnung der Grenzen: Die gesuchte Fläche liegt unterhalb der x -Achse im Bereich zwischen etwa 3 und 6. Die genauen Grenzen müssen wir natürlich zunächst ausrechnen. Dazu setzen wir den Funktionsterm gleich Null.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 18x + 36 &= 0 \quad | : 2 & (1) \\
x^2 - 9x + 18 &= 0 & (1) \\
x_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} \\
x_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{72}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_1 = 3 & \quad x_2 = 6 & (3)
\end{aligned}$$

2. Berechnung der Fläche: Da die gesuchte Fläche komplett **unterhalb** der x -Achse liegt, wird das Integral in dem Bereich **negativ**. Das kann man ausgleichen, indem man die Fläche als das **negative** Integral ansetzt. Man kann auch um das Integral Betragsstriche setzen. Da die letzte Methode immer dann angewendet werden kann, wenn man nicht so recht weiß, welches Vorzeichen sich ergibt, wähle ich diese Methode.

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_3^6 2x^2 - 18x + 36 \, dx \right| & | \text{Stammfunktion bilden} & (3) \\
&= \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - 9x^2 + 36x \right]_3^6 \right| & | \text{Grenzen einsetzen} & (3) \\
&= \left| \left(\frac{2}{3} \cdot 6^3 - 9 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 \right) \right| & (3) \\
&= |36 - 45| \\
A &= |-9| \\
A &= 9
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die gesuchte Fläche beträgt $A = 9$ Flächeneinheiten (3)

3 INTEGR-03

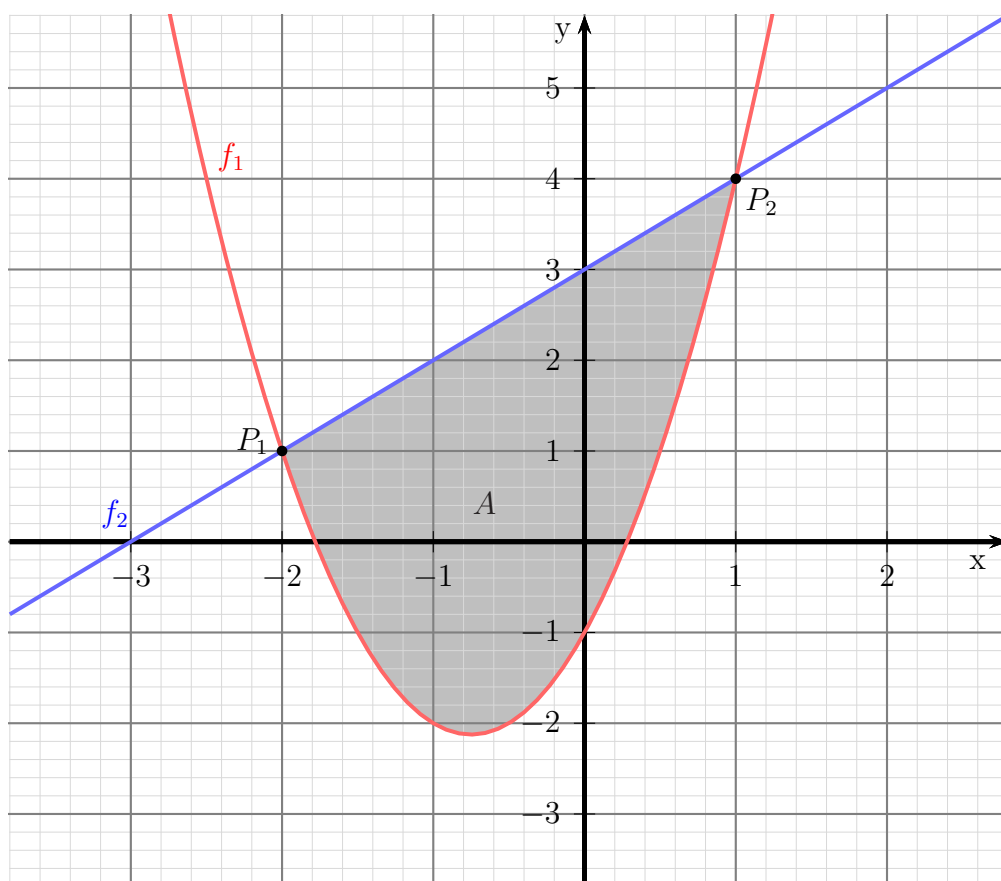
Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x - 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = x + 3$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Lösung:

Am besten sehen wir uns zunächst die Funktionsgraphen an. Sie umschließen die zu berechnende Fläche. Die Fläche wird unten durch $f_1(x)$ und oben durch $f_2(x)$ begrenzt.



1. Schnittpunktbestimmung Um die Schnittpunkte zu bestimmen, die ja die Integrationsgrenzen darstellen, werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$$\begin{array}{rcl}
 f_1(x) & = & f_2(x) \\
 2x^2 + 3x - 1 & = & x + 3 \quad \quad \quad | -x - 3 \\
 2x^2 + 2x - 4 & = & 0 \quad \quad \quad | : 2 \\
 x^2 + x - 2 & = & 0 \\
 x_{1/2} & = & -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\
 x_{1/2} & = & -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
 x_{1/2} & = & -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\
 x_1 = -2 & & x_2 = 1
 \end{array}$$

2. Flächenberechnung Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt. Wir können das bestimmte Integral für die Flächenberechnung ansetzen. Dabei ist zu beachten, dass die **untere** von der **oberen** Funktion subtrahiert wird, also f_1 von f_2 .

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x) \, dx \\
 &= \int_{-2}^1 (x + 3) - (2x^2 + 3x - 1) \, dx \\
 &= \int_{-2}^1 x + 3 - 2x^2 - 3x + 1 \, dx \\
 &= \int_{-2}^1 -2x^2 - 2x + 4 \, dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \right]_{-2}^1 \\
 &= \left(-\frac{2}{3} \cdot 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + 4 \cdot (-2) \right) \\
 &= \frac{7}{3} + \frac{20}{3} \\
 A &= 9 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

4 INTEGR-04

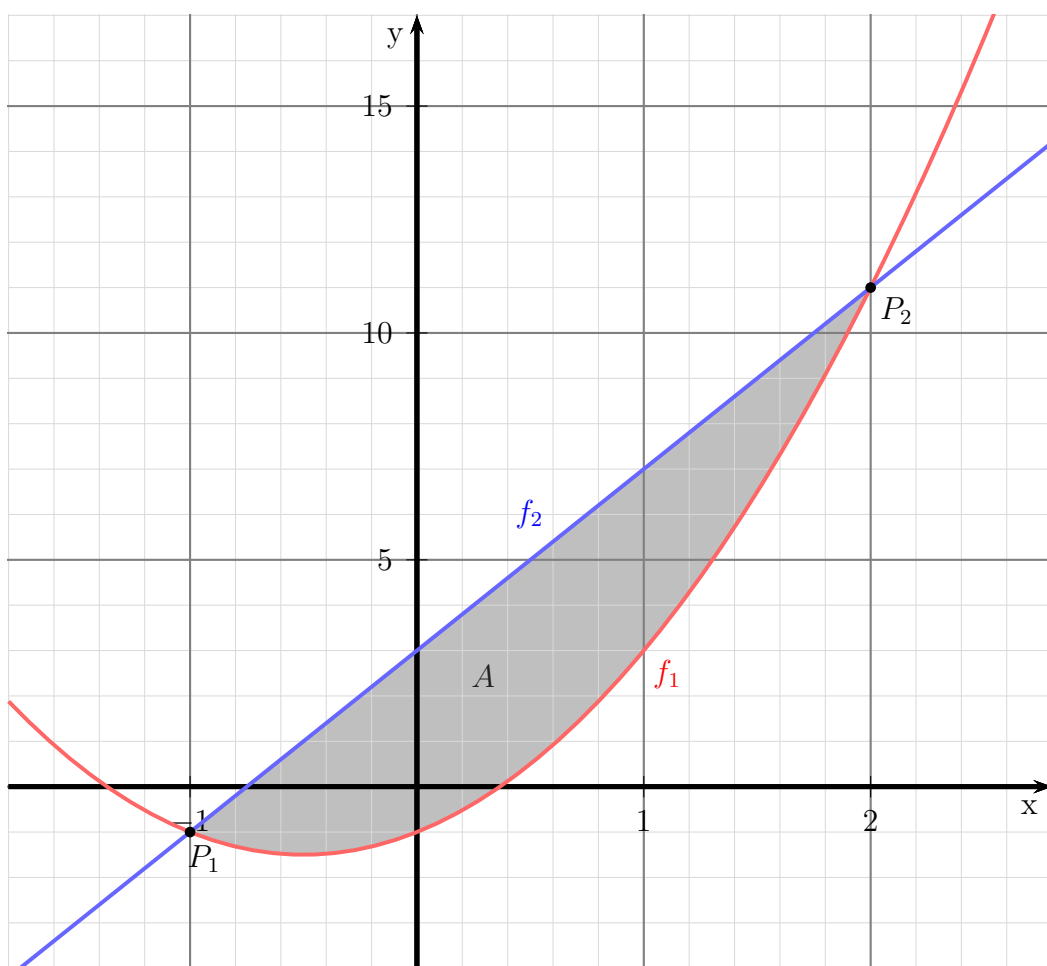
Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 4x + 3$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Lösung:

Am besten sehen wir uns zunächst die Funktionsgraphen an. Sie umschließen die zu berechnende Fläche. Die Fläche wird unten durch $f_1(x)$ und oben durch $f_2(x)$ begrenzt.



(3)

1. Schnittpunktbestimmung Um die Schnittpunkte zu bestimmen, die ja die Integrationsgrenzen darstellen, werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$$2x^2 + 2x - 1 = 4x + 3 \quad | -4x - 3 \quad (1)$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad (1)$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2 \quad (3)$$

2. Flächenberechnung Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt. Wir können das bestimmte Integral für die Flächenberechnung ansetzen. Dabei ist zu beachten, dass die **untere** von der **oberen** Funktion subtrahiert wird, also f_1 von f_2 .

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x) \, dx \quad (2)$$

$$= \int_{-1}^2 (4x + 3) - (2x^2 + 2x - 1) \, dx \quad (2)$$

$$= \int_{-1}^2 4x + 3 - 2x^2 - 2x + 1 \, dx$$

$$= \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 \, dx \quad (2)$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 \quad (2)$$

$$= \left(-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 4 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 4 \cdot (-1) \right) \quad (2)$$

$$= \frac{20}{3} + \frac{7}{3}$$

$$A = 9$$

Ergebnis: Die Fläche beträgt 9 Flächeneinheiten. (2)

5 INTEGR-05

Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) schneidet die y -Achse bei $y_0 = 9$ und hat im Punkt $P(1|12)$ einen Hochpunkt. Wie groß ist die Fläche, die von der Parabel und der x -Achse eingeschlossen wird? Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Lösung:

Bestimmung der Funktionsgleichung: Ich bilde die Funktion und die erste Ableitung in allgemeiner Form:

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c \\f'(x) &= 2ax + b\end{aligned}$$

Damit können die Bedingungen in Gleichungen umgesetzt werden. Drei Gleichungen werden benötigt.

$$\begin{array}{llllll} \text{Schnittp. mit } y\text{-Achse} & \Rightarrow & f(0) & = & 9 & \Rightarrow & (1) \quad 0a + 0b + c & = & 9 & (1) \\ \text{Punkt } P(1|12) & \Rightarrow & f(1) & = & 12 & \Rightarrow & (2) \quad a + b + c & = & 12 & (1) \\ \text{Hochp. bei } x_p = 1 & \Rightarrow & f'(1) & = & 0 & \Rightarrow & (3) \quad 2a + b & = & 0 & (1) \end{array}$$

Aus (1) ergibt sich:

$$c = 9 \quad (1)$$

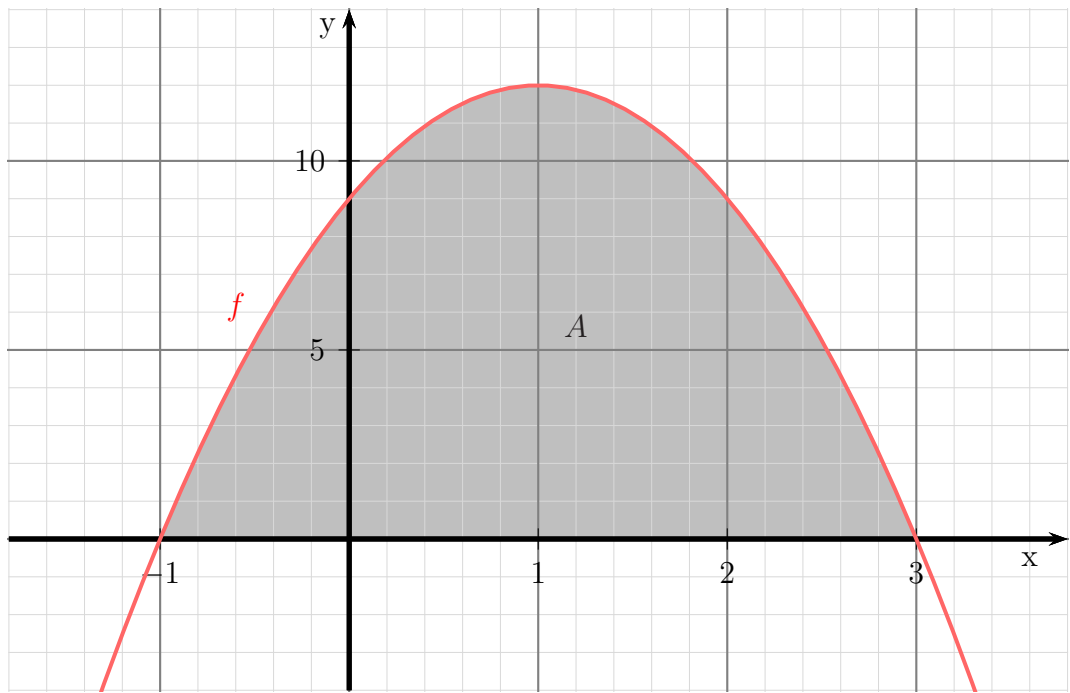
Das setzen wir in die anderen Gleichungen ein:

$$\begin{array}{rcll} (2) & a + b + 9 & = & 12 \quad | \quad -9 \\ (3) & 2a + b & = & 0 \\ \hline (2) & a + b & = & 3 \quad | \quad - \\ (3) & 2a + b & = & 0 \quad | \quad - \\ \hline & a & = & -3 \quad (2) \end{array}$$

Um b zu erhalten, setze ich das Ergebnis in (3) ein.

$$\begin{aligned} 2a + b &= 0 \\ 2 \cdot (-3) + b &= 0 \\ -6 + b &= 0 \quad | \quad +6 \\ b &= 6 \quad (1) \end{aligned}$$

Wir erhalten die Funktionsgleichung $f(x) = -3x^2 + 6x + 9$



(2)

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned}
 f(x_0) &= 0 \\
 -3x_0^2 + 6x_0 + 9 &= 0 \quad | : (-3) \\
 x_0^2 - 2x_0 - 3 &= 0 \\
 x_{01/2} &= 1 \pm \sqrt{1 + 3} \\
 &= 1 \pm 2 \\
 x_{01} &= -1 \quad x_{02} = 3 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Flächenberechnung:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \\
 &= \int_{-1}^3 -3x^2 + 6x + 9 \, dx \quad (2) \\
 &= [-x^3 + 3x^2 + 9x]_{-1}^3 \quad (2) \\
 &= (-3^3 + 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3) - (-(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1)) \quad (2) \\
 &= 27 - (-5) \\
 A &= 32
 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt $A = 32$ Flächeneinheiten (2)

6 INTEGR-06

Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = x^3 - 2x \quad \text{und} \quad f_2(x) = x - 2$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie die Funktionsgraphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Lösung:

Schnittpunktbestimmung:

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ x_S^3 - 2x_S &= x_S - 2 \quad | -x_S + 2 \\ x_S^3 - 3x_S + 2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Wir haben ein Polynom 3. Grades erhalten. Dafür haben wir kein analytisches Lösungsverfahren. Wir können eine Nullstelle durch **planvolles Raten** ermitteln und dann eine Polynomdivision durchführen. Durch Raten erhält man beispielsweise $x_{01} = 1$. (1)

$$\begin{array}{r} (x_S^3 \quad -3x_S \quad +2) : (x_S - 1) = x_S^2 + x_S - 2 \quad (4) \\ -(x_S^3 \quad -x_S^2) \\ \hline \quad x_S^2 \quad -3x_S \quad +2 \\ - \quad (x_S^2 \quad -x_S) \\ \hline \quad \quad -2x_S \quad +2 \\ \quad \quad - \quad (-2x_S \quad +2) \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

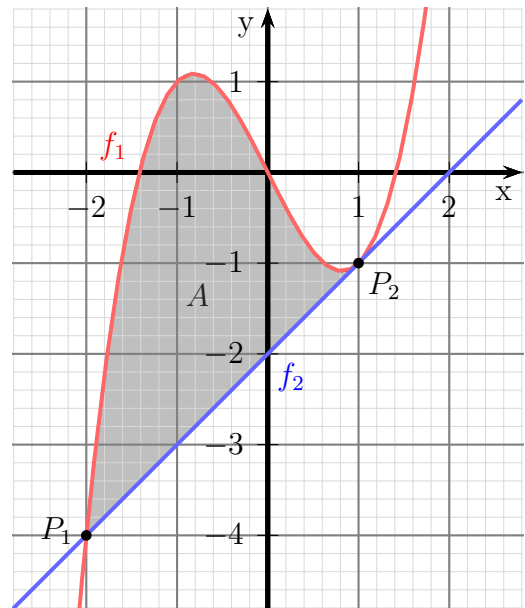
Bestimmung der restlichen Schnittpunkten:

$$\begin{aligned} x_S^2 + x_S - 2 &= 0 \\ x_{S2/S3} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{S2} = 1 \quad x_{S3} &= -2 \end{aligned} \quad (2)$$

x_{S1} ist mit x_{S2} identisch, es gibt also nur zwei Schnittpunkte. Zwischen diesen liegt das gesuchte Flächenstück.

Flächenberechnung: Skizziert man die beiden Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. An den Punkten $P_1(-2|-4)$ und $P_2(1|-2)$ schneiden sich die Kurve und die Gerade. Die gesuchte Fläche ist demnach das Integral in den Grenzen der x -Werte der Schnittpunkte der Differenz der Funktionsgleichungen.

Hierbei muss beachtet werden, dass die **obere** Minus der **unteren** Funktion gerechnet wird. Die Skizze sagt uns, dass f_1 **oben** und f_2 **unten** liegt. Wir können also den Ansatz wie folgt vornehmen:



(3)

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^1 f_1(x) - f_2(x) \, dx \\
 &= \int_{-2}^1 (x^3 - 2x) - (x - 2) \, dx \quad (2) \\
 &= \int_{-2}^1 x^3 - 2x - x + 2 \, dx \\
 &= \int_{-2}^1 x^3 - 3x + 2 \, dx \quad (1) \\
 &= \left[\frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{3}{2} \cdot x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \quad (2) \\
 &= \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \right) \quad (2) \\
 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - (4 - 6 - 4) \\
 &= \frac{3}{4} + 6 \\
 A &= 6,75 \text{ FE} \quad (2)
 \end{aligned}$$

7 INTEGR-07

Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2 + 4x + 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 2x + 5$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie die Funktionsgraphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

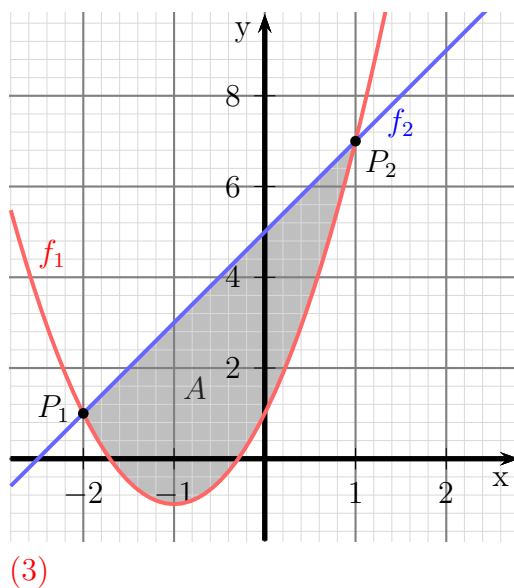
Lösung:

Schnittpunktbestimmung:

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ 2x_S^2 + 4x_S + 1 &= 2x_S + 5 && | -2x_S - 5 \quad (1) \\ 2x_S^2 + 2x_S - 4 &= 0 && | : 2 \\ x_S^2 + x_S - 2 &= 0 && (1) \\ x_{S1/2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{S1} &= -2 && x_{S2} = 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Flächenberechnung: Skizziert man die beiden Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. An den Punkten $P_1(-2|1)$ und $P_2(1|7)$ schneiden sich die Kurve und die Gerade. Die gesuchte Fläche ist demnach das Integral in den Grenzen der x -Werte der Schnittpunkte der Differenz der Funktionsgleichungen.

Hierbei muss beachtet werden, dass die **obere** Minus der **unteren** Funktion gerechnet wird. Die Skizze sagt uns, dass f_2 **oben** und f_1 **unten** liegt. Wir können also den Ansatz wie folgt vornehmen:



$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^1 f_2(x) - f_1(x) \, dx \quad (2) \\
&= \int_{-2}^1 (2x + 5) - (2x^2 + 4x + 1) \, dx \quad (2) \\
&= \int_{-2}^1 2x + 5 - 2x^2 - 4x - 1 \, dx \\
&= \int_{-2}^1 -2x^2 - 2x + 4 \, dx \quad (2) \\
&= \left[-\frac{2}{3} \cdot x^3 - x^2 + 4x \right]_{-2}^1 \quad (2) \\
&= \left(-\frac{2}{3} \cdot 1^3 - 1^2 + 4 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + 4 \cdot (-2) \right) \quad (2) \\
&= \left(-\frac{2}{3} - 1 + 4 \right) - \left(\frac{16}{3} - 4 - 8 \right) \\
&= -\frac{2}{3} + 3 - \frac{16}{3} + 12 \\
&= 15 - \frac{18}{3} \\
A &= 9 \text{ FE} \quad (2)
\end{aligned}$$

8 INTEGR-08

Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 4x + 3$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie die Funktionsgraphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

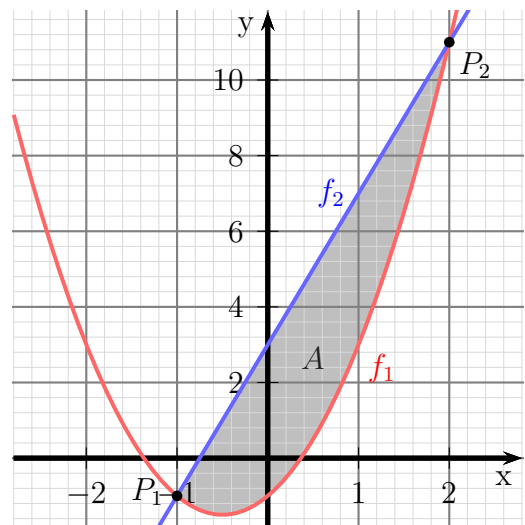
Lösung:

Schnittpunktbestimmung:

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ 2x_S^2 + 2x_S - 1 &= 4x_S + 3 && | -4x_S - 3 \quad (1) \\ 2x_S^2 - 2x_S - 4 &= 0 && | : 2 \\ x_S^2 - x_S - 2 &= 0 && (1) \\ x_{S1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{S1} &= -1 && x_{S2} = 2 \quad (3) \end{aligned}$$

Flächenberechnung: Skizziert man die beiden Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. An den Punkten $P_1(-2|1)$ und $P_2(1|7)$ schneiden sich die Kurve und die Gerade. Die gesuchte Fläche ist demnach das Integral in den Grenzen der x -Werte der Schnittpunkte der Differenz der Funktionsgleichungen.

Hierbei muss beachtet werden, dass die **obere** Minus der **unteren** Funktion gerechnet wird. Die Skizze sagt uns, dass f_2 **oben** und f_1 **unten** liegt. Wir können also den Ansatz wie folgt vornehmen:



(3)

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^2 f_2(x) - f_1(x) \, dx \quad (2) \\
&= \int_{-1}^2 (4x + 3) - (2x^2 + 2x - 1) \, dx \quad (2) \\
&= \int_{-1}^2 4x + 3 - 2x^2 - 2x + 1 \, dx \\
&= \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 \, dx \quad (2) \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 \quad (2) \\
&= \left(-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 4 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 4 \cdot (-1) \right) \quad (2) \\
&= \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8 \right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4 \right) \\
&= \left(\frac{20}{3} \right) - \left(-\frac{7}{3} \right) \\
A &= 9 \text{ FE} \quad (2)
\end{aligned}$$

9 INTEGR-09

Berechnen Sie die Fläche, die von der x -Achse, der y -Achse und dem Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

begrenzt wird! Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

Lösung:

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^3 + 6x_0^2 + 12x_0 + 8 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Zur analytischen Lösung einer Kubischen Gleichung haben wir kein Verfahren zur Verfügung. Durch **planvolles** Raten kann die erste Nullstelle ermittelt werden:

$$x_{01} = -2 \quad (1)$$

Zur Bestimmung der weiteren Nullstellen wird eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{r} (x_0^3 + 6x_0^2 + 12x_0 + 8) : (x_0 + 2) = x_0^2 + 4x_0 + 4 \quad (4) \\ \underline{-(x_0^3 + 2x_0^2)} \\ (4x_0^2 + 12x_0 + 8) \\ \underline{-(4x_0^2 + 8x_0)} \\ 4x_0 + 8 \\ \underline{-(4x_0 + 8)} \\ 0 \end{array}$$

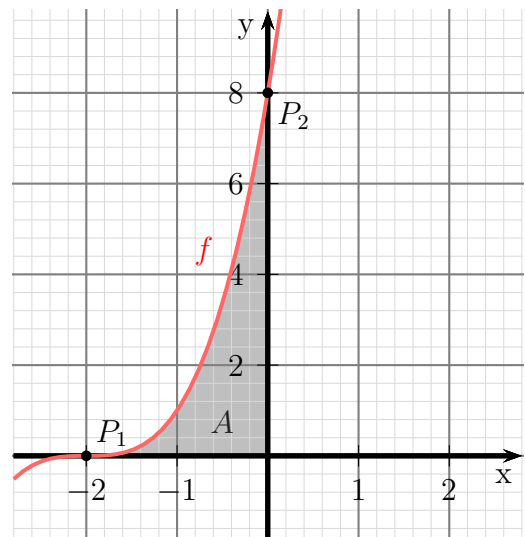
Der Ergebnisterm wird auf weitere Nullstellen untersucht:

$$\begin{aligned} x_0^2 + 4x_0 + 4 &= 0 \\ x_{02/3} &= -2 \pm \sqrt{4 - 4} \\ x_{02} &= -2 \quad (2) \end{aligned}$$

x_{02} ist mit x_{01} identisch, es gibt also nur eine einzige Nullstelle: $x_0 = -2$ (1)

Flächenberechnung: Nebenstehend ist die Skizze des Funktionsgraphen dargestellt. Mit der einzigen Nullstelle bei $x_0 = -2$ ergibt sich die gekennzeichnete gesuchte Fläche. Die Integrationsgrenzen sind dann $x_1 = x_0 = -2$ und $x_2 = 0$.

Mit diesen Werten kann die Fläche als Integral angesetzt werden:



(3)

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \\
 &= \int_{-2}^0 x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \, dx \quad (2) \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x \right]_{-2}^0 \quad (2) \\
 &= (0 + 0 + 0 + 0) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) \right) \quad (2) \\
 &= 0 - (4 - 16 + 24 - 16) \\
 A &= 4 \text{ FE} \quad (2)
 \end{aligned}$$

10 INTEGR-10

Berechnen Sie die Fläche, die von der x -Achse, der y -Achse und dem Graphen der Funktion

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$$

begrenzt wird! Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

Lösung:

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -x_0^3 + 6x_0^2 - 12x_0 + 8 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Zur analytischen Lösung einer Kubischen Gleichung haben wir kein Verfahren zur Verfügung. Durch **planvolles** Raten kann die erste Nullstelle ermittelt werden:

$$x_{01} = 2 \quad (1)$$

Zur Bestimmung der weiteren Nullstellen wird eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{r} (-x_0^3 + 6x_0^2 - 12x_0 + 8) : (x_0 - 2) = -x_0^2 + 4x_0 - 4 \quad (4) \\ \underline{-(-x_0^3 + 2x_0^2)} \\ (4x_0^2 - 12x_0 + 8) \\ \underline{-(4x_0^2 - 8x_0)} \\ -4x_0 + 8 \\ \underline{-(-4x_0 + 8)} \\ 0 \end{array}$$

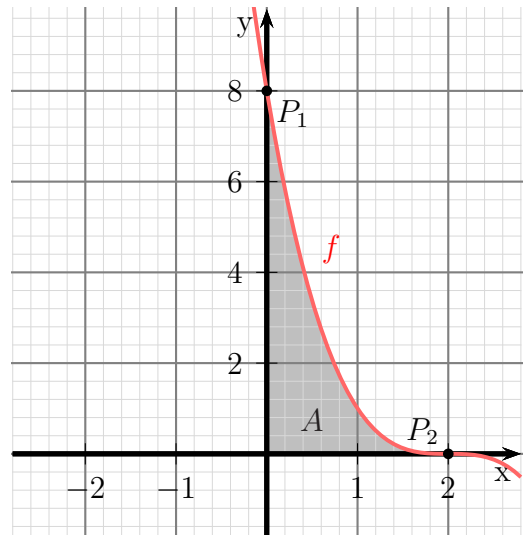
Der Ergebnisterm wird auf weitere Nullstellen untersucht:

$$\begin{aligned} -x_0^2 + 4x_0 - 4 &= 0 \\ x_0^2 - 4x_0 + 4 &= 0 \\ x_{02/3} &= 2 \pm \sqrt{4 - 4} \\ x_{02} &= 2 \quad (2) \end{aligned}$$

x_{02} ist mit x_{01} identisch, es gibt also nur eine einzige Nullstelle: $x_0 = 2$ (1)

Flächenberechnung: Nebenstehend ist die Skizze des Funktionsgraphen dargestellt. Mit der einzigen Nullstelle bei $x_0 = 2$ ergibt sich die gekennzeichnete gesuchte Fläche. Die Integrationsgrenzen sind dann $x_1 = 0$ und $x_2 = x_0 = 2$.

Mit diesen Werten kann die Fläche als Integral angesetzt werden:



(3)

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \\
 &= \int_0^2 -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 \, dx \quad (2) \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 8x \right]_0^2 \quad (2) \\
 &= \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \right) - (0 + 0 + 0 + 0) \quad (2) \\
 &= (-4 + 16 - 24 + 16) - 0 \\
 A &= 4 \text{ FE} \quad (2)
 \end{aligned}$$

11 INTEGR-11

Ein Polynom 3. Grades hat einen Tiefpunkt im Koordinatenursprung und einen Wendepunkt bei $W(1|4)$.

- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$!
- b) Berechnen Sie die Fläche, die zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse liegt!
Skizzieren Sie **vor** Beginn der Flächenberechnung die gesuchte Fläche!

Lösung:

Bestimmung der Funktionsgleichung

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\f''(x) &= 6ax + 2b\end{aligned}$$

Aus dem Tiefpunkt bei $T(0|0)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0 \\f'(0) &= 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse können schon in die Funktion und die Ableitungen eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^3 + bx^2 \\f'(x) &= 3ax^2 + 2bx \\f''(x) &= 6ax + 2b\end{aligned}$$

Aus dem Wendepunkt $W(1|4)$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}f(1) &= 4 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 = 4 \Rightarrow a + b = 4 \\f''(1) &= 0 \Rightarrow 6a \cdot 1 + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0\end{aligned}$$

Zu lösen ist also folgendes Lineargleichungssystem:

$$\begin{array}{lcl} (1) & a & +b = 4 \\ (2) & 6a & +2b = 0 \end{array}$$

Viele Lösungswege sind möglich. Beispielhaft verwende ich das Subtraktionsverfahren:

$$\begin{array}{rcll} (1) & a & +b & = 4 \\ (2) & 6a & +2b & = 0 \quad | : 2 \\ \hline & a & +b & = 4 \quad | - \\ & 3a & +b & = 0 \quad | \\ \hline & 2a & & = -4 \quad | : 2 \\ & a & & = -2 \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (1) eingesetzt, um b zu erhalten.

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 4 \\ -2 + b & = & 4 \quad | + 2 \\ b & = & 6 \end{array}$$

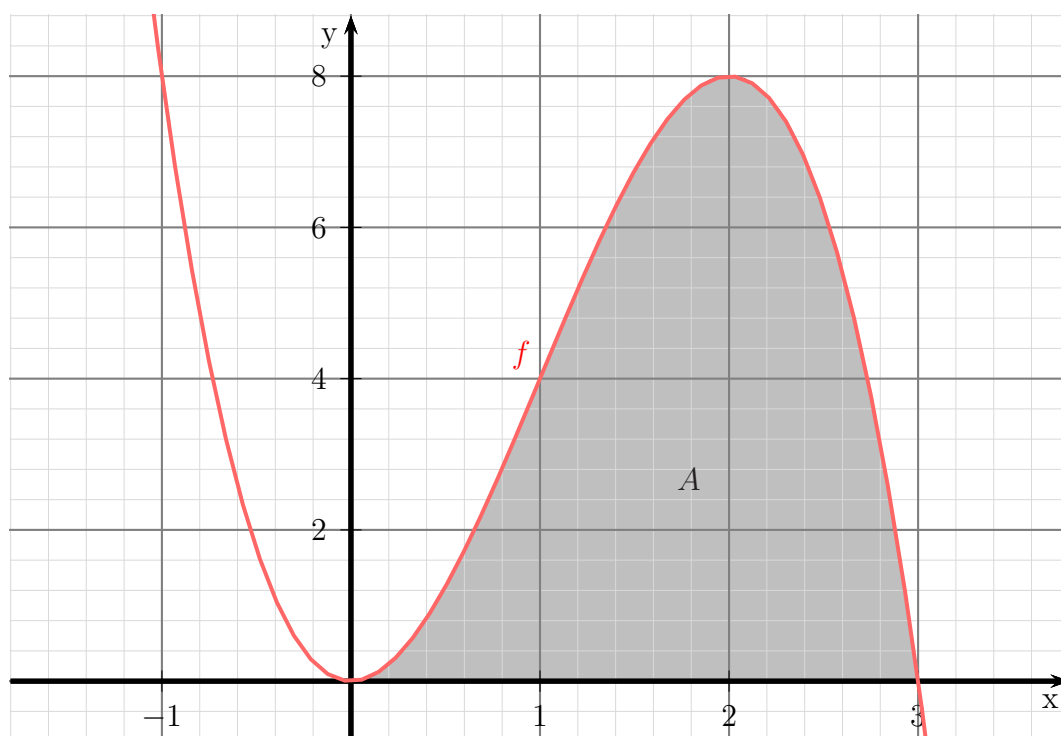
Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -2x^3 + 6x^2$

Bestimmung der Fläche

Um die Fläche zu berechnen, müssen zunächst die Nullstellen der Funktion $f(x)$ bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcl} f(x_0) & = & 0 \\ -2x_0^3 + 6x_0^2 & = & 0 \quad | : (-2) \\ x_0^3 - 3x_0^2 & = & 0 \\ x_0^2 \cdot (x_0 - 3) & = & 0 \\ x_{01} & = & 0 \\ x_{02} - 3 & = & 0 \quad | + 3 \\ x_{02} & = & 3 \end{array}$$

Mit diesen Werten kann nun eine Skizze angefertigt werden:



Die Fläche wird berechnet:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 f(x) \, dx \\ &= \int_0^3 -2x^3 + 6x^2 \, dx \\ &= \left[-0,5x^4 + 2x^3 \right]_0^3 \\ &= (-0,5 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3) - (-0,5 \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^3) \\ &= -40,5 + 54 - 0 \\ &= 13,5 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die gesuchte Fläche beträgt $A = 13,5 \text{ FE}$

12 INTEGR-12

Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = 3x^2 - 5x + 8 \quad \text{und} \quad f_2(x) = x^2 + 5x$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie die Funktionsgraphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

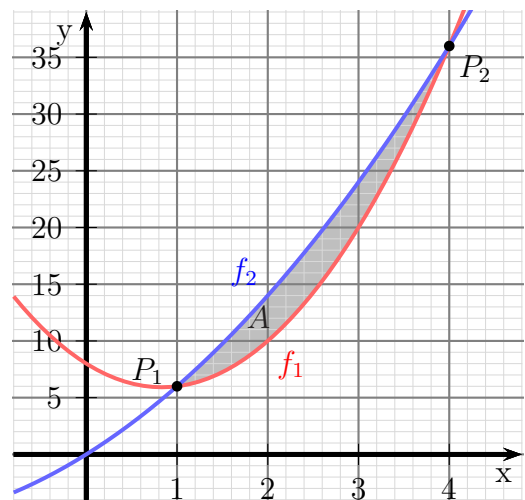
Lösung:

Schnittpunktbestimmung:

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ 3x_S^2 - 5x_S + 8 &= x_S^2 + 5x_S & | -x_S^2 - 5x_S & \quad (1) \\ 2x_S^2 - 10x_S + 8 &= 0 & | : 2 & \\ x_S^2 - 5x_S + 4 &= 0 & (1) & \\ x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{S1} &= 1 & x_{S2} &= 4 & (3) \end{aligned}$$

Flächenberechnung: Skizziert man die beiden Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. An den Punkten $P_1(1|6)$ und $P_2(4|36)$ schneiden sich die Kurve und die Gerade. Die gesuchte Fläche ist demnach das Integral in den Grenzen der x -Werte der Schnittpunkte der Differenz der Funktionsgleichungen.

Hierbei muss beachtet werden, dass die **obere** minus der **unteren** Funktion gerechnet wird. Die Skizze sagt uns, dass f_2 **oben** und f_1 **unten** liegt. Wir können also den Ansatz wie folgt vornehmen:



(3)

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^4 f_2(x) - f_1(x) \, dx \quad (2) \\
&= \int_1^4 (x^2 + 5x) - (3x^2 - 5x + 8) \, dx \quad (2) \\
&= \int_1^4 x^2 + 5x - 3x^2 + 5x - 8 \, dx \\
&= \int_1^4 -2x^2 + 10x - 8 \, dx \quad (2) \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x \right]_1^4 \quad (2) \\
&= \left(-\frac{2}{3} \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 \right) \quad (2) \\
&= \left(-\frac{128}{3} + 80 - 32 \right) - \left(-\frac{2}{3} + 5 - 8 \right) \\
&= \left(\frac{16}{3} \right) - \left(-\frac{11}{3} \right) \\
A &= 9 \text{ FE} \quad (2)
\end{aligned}$$

13 INTEGR-13

Berechnen Sie die Fläche, die von der x -Achse, der y -Achse und dem Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$

begrenzt wird! Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

Lösung:

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^3 - 9x_0^2 + 24x_0 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

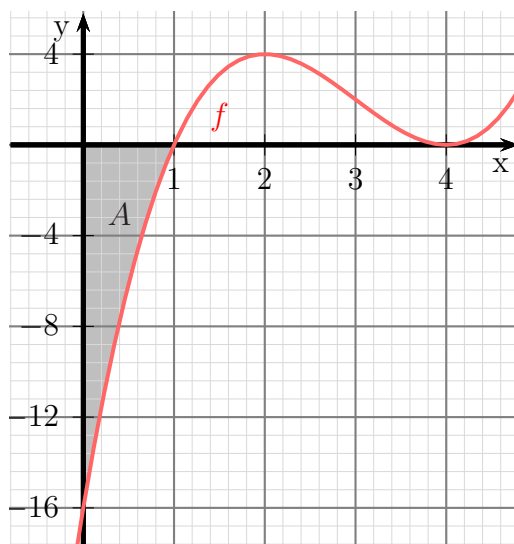
Eine analytische Lösung ist nicht möglich. Durch **planvolles** Raten erhält man eine Nullstelle bei $x_{01} = 1$. Eine **Polynomdivision** durch $(x - x_{01})$ kann durchgeführt werden.

$$\begin{array}{r} (x_0^3 \quad -9x_0^2 \quad +24x_0 \quad -16) : (x_0 - 1) = x_0^2 - 8x_0 + 16 \quad (4) \\ -(x_0^3 \quad -x_0^2) \\ \hline \quad -8x_0^2 \quad +24x_0 \quad -16 \\ - \quad (-8x_0^2 \quad +8x_0) \\ \hline \quad \quad 16x_0 \quad -16 \\ \quad \quad - \quad (16x_0 \quad -16) \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Die Nullstellen des Ergebnisterms können mit der p - q -Formel bestimmt werden.

$$\begin{aligned} x_0^2 - 8x_0 + 16 &= 0 \\ x_{02/03} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \\ x_{02/03} &= 4 \pm 0 \\ x_{02} &= 4 \end{aligned}$$

Flächenberechnung: Skizziert man den Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. An den Stellen $x_{01} = 1$ und $x_{02} = 4$ schneidet bzw. berührt der Funktionsgraph die x -Achse.



Da eine Begrenzungslinie der Fläche die y -Achse sein soll, liegt eine Integrationsgrenze bei $x = 0$. Die andere muss die Nullstelle sein, die **der y -Achse am nächsten** liegt, also $x_{01} = 1$. Die gesuchte Fläche ist demnach das Integral in den Grenzen von 0 bis 1 von der gegebenen Funktion $f(x)$.

Die gesuchte Fläche liegt **unterhalb** der x -Achse. Das bedeutet, dass das zugehörige Integral **negativ** wird. Daher muss beim Ansatz für die Fläche entweder das Integral in Betragsstriche gesetzt werden, oder man setzt ein Minuszeichen vor das Integral, um den Ausgleich zu bewerkstelligen.

(3)

$$\begin{aligned}
 A &= - \int_0^1 x^3 - 9x^2 + 24x - 16 \, dx \\
 &= - \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 - 16x \right]_0^1 \\
 &= - \left[\left(\frac{1^4}{4} - 3 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 \right) - \left(\frac{0^4}{4} - 3 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 \right) \right] \\
 &= -[-6,75 - 0] \\
 A &= 6,75 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

$$A = 6,75 \text{ Flächeneinheiten}$$

14 INTEGR-14

Berechnen Sie die Fläche, die von der x -Achse, der y -Achse und dem Graphen der Funktion

$$f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x - 4$$

begrenzt wird! Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

Lösung:

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -x_0^3 - 6x_0^2 - 9x_0 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Eine analytische Lösung ist nicht möglich. Durch **planvolles** Raten erhält man eine Nullstelle bei $x_{01} = -1$. Eine **Polynomdivision** durch $(x - x_{01})$ kann durchgeführt werden.

$$\begin{array}{r} (-x_0^3 \quad -6x_0^2 \quad -9x_0 \quad -4) : (x_0 + 1) = -x_0^2 - 5x_0 - 4 \quad (4) \\ -(-x_0^3 \quad -x_0^2) \\ \hline \quad -5x_0^2 \quad -9x_0 \quad -4 \\ \quad -(-5x_0^2 \quad -5x_0) \\ \hline \qquad -4x_0 \quad -4 \\ \qquad -(-4x_0 \quad -4) \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

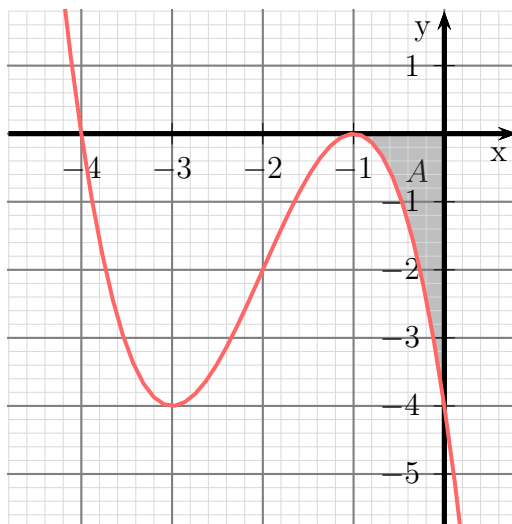
Die Nullstellen des Ergebnisterms können mit der p - q -Formel bestimmt werden.

$$\begin{aligned} -x_0^2 - 5x_0 - 4 &= 0 & | : (-1) \\ x_0^2 + 5x_0 + 4 &= 0 \\ x_{02/03} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ x_{02/03} &= -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{02} &= -4 & x_{03} &= -1 \end{aligned}$$

x_{01} und x_{03} sind identisch, es gibt also nur zwei Nullstellen.

Flächenberechnung: Skizziert man den Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. An den Stellen $x_{01} = -1$ und $x_{02} = -4$ schneidet bzw. berührt der Funktionsgraph die x -Achse.

Da eine Begrenzungslinie der Fläche die y -Achse sein soll, liegt eine Integrationsgrenze bei $x = 0$. Die andere muss die Nullstelle sein, die **der y -Achse am nächsten** liegt, also $x_{01} = -1$. Die gesuchte Fläche ist demnach das Integral in den Grenzen von 0 bis 1 von der gegebenen Funktion $f(x)$.



(3)

Die gesuchte Fläche liegt **unterhalb** der x -Achse. Das bedeutet, dass das zugehörige Integral **negativ** wird. Daher muss beim Ansatz für die Fläche entweder das Integral in Betragsstriche gesetzt werden, oder man setzt ein Minuszeichen vor das Integral, um den Ausgleich zu bewerkstelligen.

$$\begin{aligned}
 A &= - \int_{-1}^0 -x^3 - 6x^2 - 9x - 4 \, dx \\
 &= - \left[-\frac{x^4}{4} - 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 4x \right]_{-1}^0 \\
 &= - \left[\left(-\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^3 - \frac{9}{2} \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 \right) - \left(-\frac{(-1)^4}{4} - 2 \cdot (-1)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \right) \right] \\
 &= -[0 - 1,25] \\
 A &= 1,25 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

$A = 1,25 \text{ Flächeneinheiten}$

15 INTEGR-15

Berechnen Sie die Fläche, die zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse liegt.

$$f(x) = -3x^2 - 3x + 6$$

Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

Lösung:

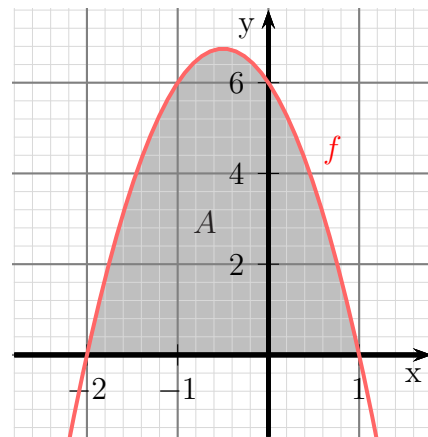
Nullstellenbestimmung:

$$\begin{array}{rcl} -3x_0^2 - 3x_0 + 6 & = & 0 \\ x_0^2 + x_0 - 2 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | : (-3) \quad (1) \\ (1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{01/02} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{01} &= -2 \quad x_{02} = 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Skizziert man den Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. Die gesuchte Fläche liegt **oberhalb** der x -Achse. Das Integral in den Grenzen von -2 bis 1 stellt daher vorzeichenrichtig die gesuchte Fläche dar.

Mit diesen Daten können wir den Ansatz der Fläche als bestimmtes Integral machen.



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 -3x^2 - 3x + 6 \, dx \quad (3) \\ &= \left[-x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^1 \quad (3) \\ &= \left(-1^3 - \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 \right) - \left(-(-2)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) \right) \quad (3) \\ &= 3,5 - (-10) \\ A &= 13,5 \text{ FE} \quad (3) \end{aligned}$$

16 INTEGR-16

Berechnen Sie die Fläche, die zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse liegt.

$$f(x) = -5x^2 + 5x + 10$$

Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

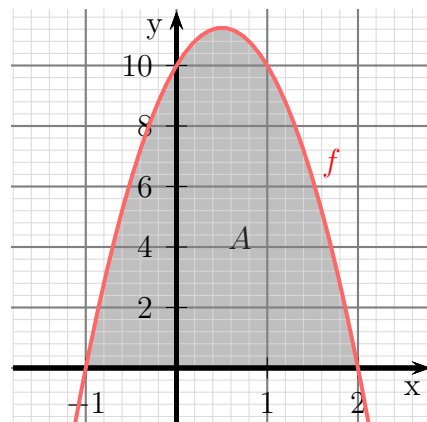
Lösung:

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned} -5x_0^2 + 5x_0 + 10 &= 0 && | : (-5) \quad (1) \\ x_0^2 - x_0 - 2 &= 0 && (1) \\ x_{01/02} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{01} &= -1 && x_{02} = 2 \quad (3) \end{aligned}$$

Skizziert man den Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. Die gesuchte Fläche liegt **oberhalb** der x -Achse. Das Integral in den Grenzen von -1 bis 2 stellt daher vorzeichenrichtig die gesuchte Fläche dar.

Mit diesen Daten können wir den Ansatz der Fläche als bestimmtes Integral machen.



(3)

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^2 -5x^2 + 5x + 10 \, dx \quad (3) \\
&= \left[-\frac{5}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 10x \right]_{-1}^2 \quad (3) \\
&= \left(-\frac{5}{3} \cdot 2^3 + \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{5}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{5}{2} \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) \right) \quad (3) \\
&= \frac{50}{3} - \left(-\frac{35}{6} \right) \\
&= \frac{135}{6} \\
A &= 22,5 \text{ FE} \quad (3)
\end{aligned}$$

17 INTEGR-17

Berechnen Sie die Fläche, die zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse liegt.

$$f(x) = 2x^2 + 10x + 8$$

Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

Lösung:

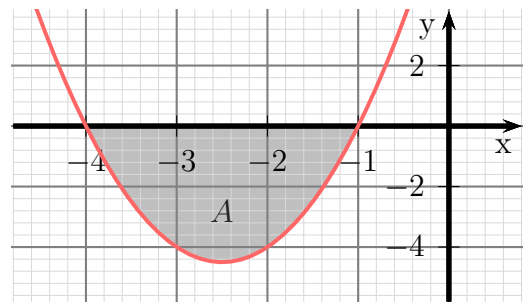
Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned} 2x_0^2 + 10x_0 + 8 &= 0 & | : 2 & \quad (1) \\ x_0^2 + 5x_0 + 4 &= 0 & & \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{01/02} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ &= -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{01} &= -4 & x_{02} &= -1 \quad (3) \end{aligned}$$

Skizziert man den Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. Die gesuchte Fläche liegt **unterhalb** der x -Achse. Das Integral in den Grenzen von -4 bis -1 stellt daher die gesuchte Fläche mit **negativem Vorzeichen** dar.

Mit diesen Daten können wir den Ansatz der Fläche als bestimmtes Integral machen.



(3)

$$\begin{aligned} A &= - \int_{-4}^{-1} 2x^2 + 10x + 8 \, dx & (3) \\ &= - \left[\frac{2}{3} \cdot x^3 + 5x^2 + 8x \right]_{-4}^{-1} & (3) \\ &= - \left(\frac{2}{3} \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) \right) + \left(\frac{2}{3} \cdot (-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 + 8 \cdot (-4) \right) & (3) \\ &= - \left(-\frac{11}{3} \right) + \left(\frac{16}{3} \right) \\ A &= 9 \text{ FE} & (3) \end{aligned}$$

18 INTEGR-18

Berechnen Sie die Fläche, die von der x -Achse, der y -Achse und dem Graphen der Funktion

$$f(x) = 3x^2 + 18x + 24$$

begrenzt wird! Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

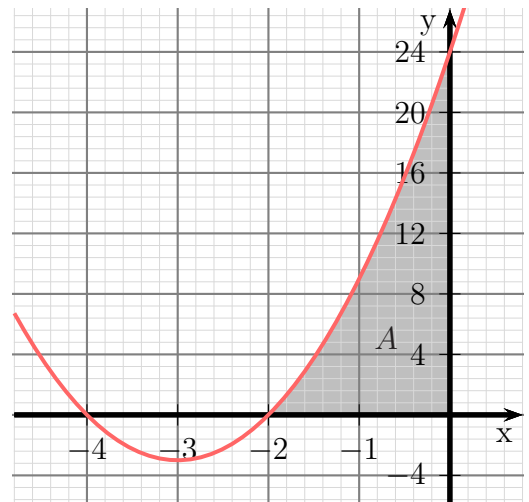
Lösung:

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 & (1) \\ 3x_0^2 + 18x_0 + 24 &= 0 & | : 3 \quad (1) \\ x_0^2 + 6x_0 + 8 &= 0 \\ x_{01/02} &= -3 \pm \sqrt{9 - 8} \\ x_{01/02} &= -3 \pm 1 \\ x_{01} &= -2 & x_{02} = -4 & (3) \end{aligned}$$

Skizziert man den Funktionsgraphen, ergibt sich nebenstehendes Bild. Die gesuchte Fläche liegt **oberhalb** der x -Achse und **rechts** neben dem Funktionsgraphen. Die Nullstelle $x_{01} = -2$ liegt näher an der y -Achse, als die andere Nullstelle. Das Integral in den Grenzen von -2 bis 0 stellt daher die gesuchte Fläche vorzeichenrichtig dar.

Mit diesen Daten können wir den Ansatz der Fläche als bestimmtes Integral machen.



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 3x^2 + 18x + 24 \, dx & (3) \\ &= [x^3 + 9x^2 + 24x]_{-2}^0 & (3) \\ &= (0^3 + 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0) - ((-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2)) & (3) \\ &= 0 - (-20) \\ A &= 20 \text{ FE} & (3) \end{aligned}$$