

Aufgaben zur Flächenberechnung

Inhaltsverzeichnis

0.1	FLAECHEN-01a	2
0.2	FLAECHEN-01b	3
0.3	FLAECHEN-01c	5
0.4	FLAECHEN-01d	6
0.5	FLAECHEN-02a	7
0.6	FLAECHEN-02b	8
0.7	FLAECHEN-02c	9
0.8	FLAECHEN-03a	11
0.9	FLAECHEN-03b	12
0.10	FLAECHEN-03c	14
0.11	FLAECHEN-03d	16
0.12	FLAECHEN-04a	17
0.13	FLAECHEN-04b	20
0.14	FLAECHEN-04c	23
0.15	FLAECHEN-05a	25
0.16	FLAECHEN-05b	27
0.17	FLAECHEN-06	27
0.18	FLAECHEN-07	29
0.19	FLAECHEN-08	31
0.20	FLAECHEN-09	33

0.1 FLAECHE-01a

Die Wände in einem Raum sollen gestrichen werden. Der Raum ist 7,60 Meter lang, 4,20 Meter breit und 2,50 Meter hoch. Im Raum befindet sich eine Tür mit 90 Zentimeter Breite und 2 Meter Höhe sowie zwei Fenster mit jeweils 80 Zentimetern Breite und 1,25 Metern Höhe. Für wieviel Quadratmeter muss Farbe beschafft werden? (20 P.)

Lösung: Zunächst sollten alle Maße im Meter umgerechnet werden.

$$90 \text{ cm} = 0,9 \text{ m} \quad (2)$$

$$80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m} \quad (2)$$

Ich verwende folgende Bezeichnungen für diese Teilflächen:

$$\begin{aligned} \text{lange Wand:} & A_L \\ \text{kurze Wand:} & A_K \\ \text{Tür:} & A_T \\ \text{Fenster:} & A_F \\ \text{Gesamtfläche:} & A_{ges} \end{aligned}$$

$$A_L = l \cdot h = 7,60 \text{ m} \cdot 2,50 \text{ m} = 19 \text{ m}^2 \quad (3)$$

$$A_K = b \cdot h = 4,20 \text{ m} \cdot 2,50 \text{ m} = 10,5 \text{ m}^2 \quad (3)$$

$$A_T = b \cdot h = 0,9 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 1,8 \text{ m}^2 \quad (3)$$

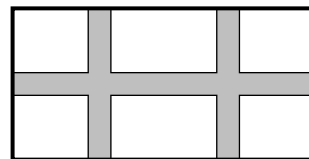
$$A_F = b \cdot h = 0,8 \text{ m} \cdot 1,25 \text{ m} = 1 \text{ m}^2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A_{ges} &= 2 \cdot A_L + 2 \cdot A_K - A_T - 2 \cdot A_F \\ &= 2 \cdot 19 \text{ m}^2 + 2 \cdot 10,5 \text{ m}^2 - 1,8 \text{ m}^2 - 2 \cdot 1 \text{ m}^2 \\ A_{ges} &= 55,2 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Die gesamte Fläche beträgt: $A_{ges} = 55,2 \text{ m}^2$ (4)

0.2 FLAECHEN-01b

In einer rechteckigen Parkanlage mit 120 Meter Länge und 60 Meter Breite soll ein Wegenetz angelegt werden, wie nebenstehend dargestellt. Die Wege sind hier dunkel eingefärbt. Alle Wege haben eine Breite von 1,60 Meter.



Die Wege sollen mit quadratischen Weg-Platten gepflastert werden. Die Platten haben eine Kantenlänge von 20 Zentimetern. Wieviele Platten sind erforderlich? (20 P.)

Lösung: Zunächst wird die Gesamtfläche des Wegenetzes berechnet. Zur Berechnung dieser Fläche sind (mindestens) drei Lösungswege möglich, die hier nacheinander dargestellt werden.

Lösungsvariante 1: Man berechnet jeden Weg als komplettes Rechteck und subtrahiert von der Summe anschließend die doppelt berechneten Quadrate an den Wegkreuzungen.

Die Fläche eines kurzen Weges nenne ich A_1 , die des langen Weges A_2 und die Fläche einer Kreuzung A_3 .

$$A_1 = 60 \text{ m} \cdot 1,60 \text{ m} = 96 \text{ m}^2 \quad (3)$$

$$A_2 = 120 \text{ m} \cdot 1,60 \text{ m} = 192 \text{ m}^2 \quad (3)$$

$$A_3 = 1,6 \text{ m} \cdot 1,60 \text{ m} = 2,56 \text{ m}^2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot A_1 + A_2 - 2 \cdot A_3 \\ &= 2 \cdot 96 \text{ m}^2 + 192 \text{ m}^2 - 2 \cdot 2,56 \text{ m}^2 \\ A &= 378,88 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Lösungsvariante 2: Man berechnet die beiden kurzen Wege voll. Anschließend subtrahiert von der Länge des langen Weges in der Mitte zwei mal eine Wegbreite und berechnet damit einen um die Kreuzungsbereiche verkürzten langen Weg.

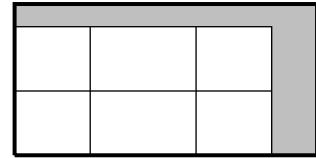
Ich nenne die Fläche eines kurzen Weges A_k und die des verkürzten langen Weges A_l .

$$A_k = 60 \text{ m} \cdot 1,60 \text{ m} = 96 \text{ m}^2 \quad (3)$$

$$A_l = (120 \text{ m} - 2 \cdot 1,60 \text{ m}) \cdot 1,60 \text{ m} = 186,88 \text{ m}^2 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot A_k + A_l \\ &= 2 \cdot 96 \text{ m}^2 + 186,88 \text{ m}^2 \\ A &= 378,88 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Lösungsvariante 3: Man berechnet zunächst die Gesamtfläche A_{ges} der Parkanlage. Dann „schiebt“ man die 6 Rasenflächenstücke zusammen, wie nebenstehend dargestellt, also so weit nach unten und nach links, wie es geht. Die Wege laufen dann oben und rechts am Rand. Das Rechteck der zusammengesetzten Rasenfläche A_R kann so „am Stück“ berechnet werden und muss von der Gesamtfläche A_{ges} subtrahiert werden, um die gesamte Wegefläche A zu erhalten.



$$A_{ges} = a \cdot b = 120 \text{ m} \cdot 60 \text{ m} = 7\,200 \text{ m}^2 \quad (2)$$

Das „zusammengeschobene“ Rasenstück A_R ist um eine Wegesbreite schmaler und um zwei Wegelbreiten kürzer, als die gesamte Parkfläche. Ich bestimme die Breite b und die Länge l dieses Rasenstückes.

$$b = 60 \text{ m} - 1,6 \text{ m} = 58,4 \text{ m} \quad (2)$$

$$l = 120 \text{ m} - 2 \cdot 1,6 \text{ m} = 116,8 \text{ m} \quad (2)$$

Damit kann die Rasenfläche A_R berechnet werden.

$$A_R = l \cdot b = 116,8 \text{ m} \cdot 58,4 \text{ m} = 6\,821,12 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Damit kann die Wegefläche A berechnet werden.

$$A = A_{ges} - A_R = 7\,200 \text{ m}^2 - 6\,821,12 \text{ m}^2 = 378,88 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Restliche Lösung: Aus der Fläche muss nun noch die Zahl der Platten berechnet werden. Dazu gibt es (mindestens) **zwei** Möglichkeiten.

Lösungsvariante 1: Zuerst wird bestimmt, wieviele Platten einen Quadratmeter ergeben. Weil die Kantenlänge genau ein Fünftel eines Meters ist, ergeben 5 Reihen zu je 5 Platten einen Quadratmeter, also $n_1 = 5 \cdot 5 = 25$. (4)

Anschließend wird die Gesamtfläche mit der Zahl der Platten je Quadratmeter multipliziert.

$$n = A \cdot n_1 = 378,88 \text{ m}^2 \cdot 25 = 9\,472 \quad (4)$$

Lösungsvariante 2: Zuerst wird die Fläche einer Platte berechnet.

$$A_P = 0,20 \text{ m} \cdot 0,20 \text{ m} = 0,04 \text{ m}^2 \quad (4)$$

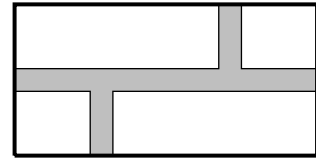
Dann wird die Gesamtfläche durch die Fläche einer einzelnen Platte dividiert.

$$n = \frac{A}{A_P} = \frac{378,88 \text{ m}^2}{0,04 \text{ m}^2} = 9\,472 \quad (4)$$

Ergebnis: Es werden 9 472 Platten benötigt.

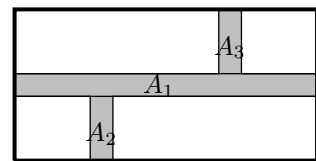
0.3 FLAECHEN-01c

In einer rechteckigen Parkanlage mit 140 Meter Länge und 70 Meter Breite soll ein Wegenetz angelegt werden, wie nebenstehend dargestellt. Die Wege sind hier dunkel eingefärbt. Alle Wege haben eine Breite von 1,80 Meter. Der lange durchgehende Weg verläuft genau in der Mitte des Parks.



Die Wege sollen mit quadratischen Pflastersteinen gepflastert werden. Die Pflastersteine haben eine Kantenlänge von 10 Zentimetern. Wieviele Pflastersteine sind erforderlich? (20 P.)

Lösung: Viele unterschiedliche Zerlegungen der Flächen sind möglich. Nebenstehend wurde das Wegenetz in 3 rechteckige Wege A_1 , A_2 und A_3 zerlegt.



Beginnen wir mit dem langen Weg A_1 .

$$A_1 = 140 \text{ m} \cdot 1,8 \text{ m} = 252 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Die beiden kurzen Wege A_2 und A_3 kann ich zu einer Gesamtfläche A_{23} zusammenfassen. Die Länge dieses zusammengesetzten Weges ist dann um eine Wegesbreite kürzer, als die Breite des Parks.

$$l = 70 \text{ m} - 1,8 \text{ m} = 68,2 \text{ m} \quad (3)$$

Hiermit kann A_{23} berechnet werden.

$$A_{23} = 68,2 \text{ m} \cdot 1,8 \text{ m} = 122,76 \text{ m}^2 \quad (4)$$

Die Gesamtfläche des Wegenetzes kann berechnet werden.

$$A = A_1 + A_{23} = 252 \text{ m}^2 + 122,76 \text{ m}^2 = 374,76 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Die Fläche A_P eines Pflastersteines beträgt

$$A_P = 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} = 0,01 \text{ m}^2 \quad (3)$$

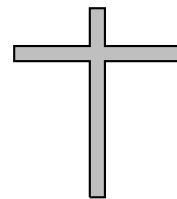
Damit kann die Anzahl P der erforderlichen Pflastersteine berechnet werden.

$$P = \frac{A}{A_P} = \frac{374,76 \text{ m}^2}{0,01 \text{ m}^2} = 37\,476 \quad (4)$$

Ergebnis: Es werden 37 476 Pflastersteine benötigt.

0.4 FLAECHEN-01d

Ein Holzkreuz hat eine Höhe von 2,5 Meter und eine Breite von 2 Meter. Die Balkenbreite beträgt überall 20 Zentimeter.



Auf der Frontfläche des Kreuzes sollen kleine quadratische Fliesen mit den Abmessungen $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ aufgebracht werden. Wieviele von diesen Fliesen werden benötigt? (20 P.)

Lösung: Zur Lösung muss die Frontfläche in einzelne Rechteckflächen zerlegt werden. Hierbei gibt es viele unterschiedliche Varianten. Ich nenne die Frontfläche des waagerechten Balkens A_1 und die des senkrechten Balkens A_2 . Addiert man diese Flächen, dann hat man die Quadratfläche im Kreuzungsbereich doppelt berücksichtigt. Diese Quadratfläche A_3 muss also einmal wieder subtrahiert werden.

Es ist zweckmäßig, sofort alle Längeneinheiten in Zentimeter umzuwandeln.

$$\begin{aligned} 2,5\text{ m} &= 250\text{ cm} & (1) \\ 2\text{ m} &= 200\text{ cm} & (1) \end{aligned}$$

$$\text{Waagerechter Balken: } A_1 = 200\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = 4\,000\text{ cm}^2 \quad (3)$$

$$\text{Senkrechter Balken: } A_2 = 250\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = 5\,000\text{ cm}^2 \quad (3)$$

$$\text{Kreuzungsbereich: } A_3 = 20\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = 400\text{ cm}^2 \quad (3)$$

$$\text{Frontfläche gesamt: } A = A_1 + A_2 - A_3 = 4\,000\text{ cm}^2 + 5\,000\text{ cm}^2 - 400\text{ cm}^2 = 8\,600\text{ cm}^2 \quad (3)$$

Die Fläche A_F einer Fliese wird berechnet.

$$A_F = 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 25\text{ cm}^2 \quad (3)$$

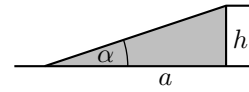
Damit kann die Anzahl N der erforderlichen Fliesen berechnet werden.

$$N = \frac{A}{A_F} = \frac{8\,600\text{ cm}^2}{25\text{ cm}^2} = 344 \quad (3)$$

Ergebnis: Es werden 344 Fliesen benötigt.

0.5 FLAECHEN-02a

An einen 20 Zentimeter hohen Bordstein soll eine Rampe angebaut werden, damit man mit einem Rollstuhl hochfahren kann. Der markierte Steigungswinkel soll $\alpha = 8^\circ$ betragen. Berechnen Sie:



- a) die waagerechte Länge a der Rampe.
- b) die nebenstehend markierte Seitenfläche der Rampe. (20 P.)

Lösung: Die Fläche stellt ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe $h = 20 \text{ cm}$ und der Grundseite a mit unbekannter Länge dar. Bezogen auf den Winkel α ist h die *Gegenkathete* und a die *Ankathete*. Mit der Tangensfunktion kann a berechnet werden.

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{h}{a} & | \cdot a \\ a \cdot \tan \alpha &= \frac{h}{\tan \alpha} & | : \tan \alpha \\ a &= \frac{h}{\tan \alpha} & (6) \\ &= \frac{20 \text{ cm}}{\tan 8^\circ} \\ &= \frac{0,2 \text{ m}}{\tan 8^\circ} \\ a &= 1,423 \text{ m} & (6)\end{aligned}$$

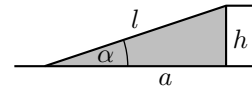
Damit kann die Fläche berechnet werden:

$$\begin{aligned}A &= \frac{a \cdot h}{2} \\ &= \frac{1,42 \text{ m} \cdot 0,2 \text{ m}}{2} \\ A &= 0,2846 \text{ m}^2 & (8)\end{aligned}$$

Die Seitenfläche beträgt: $A = 0,2846 \text{ m}^2$

0.6 FLAECHE-02b

Damit ein Rollstuhl eine Stufe überwinden kann, wird ein stabiles Brett mit einer Länge von $l = 1,5 \text{ m}$ an der Oberkante der Stufe mit der Höhe h eingehängt. Am eingehängten Brett wird ein Steigungswinkel von $\alpha = 10^\circ$ gemessen.



- a) Welche Höhe h hat die Stufe?
- b) In welchem Abstand a von der Stufe liegt das untere Brettende auf dem Boden auf?
- c) Wie groß ist der Flächeninhalt der markierten Dreiecksfläche unter dem Brett? (20 P.)

Lösung Teil a:

$$\begin{aligned}\frac{h}{l} &= \sin \alpha & | \cdot l \\ h &= l \cdot \sin \alpha \\ &= 1,5 \text{ m} \cdot \sin 10^\circ \\ h &\approx 0,260 \text{ m} & (7)\end{aligned}$$

Lösung Teil b:

Variante 1: Lösung mit Winkelfunktion:

$$\begin{aligned}\frac{a}{l} &= \cos \alpha & | \cdot l \\ a &= l \cdot \cos \alpha \\ &= 1,5 \text{ m} \cdot \cos 10^\circ \\ a &\approx 1,477 \text{ m} & (7)\end{aligned}$$

Variante 2: Lösung mit Pythagoras:

$$\begin{aligned}a^2 + h^2 &= l^2 & | - h^2 \\ a^2 &= l^2 - h^2 & | \sqrt{} \\ a &= \sqrt{l^2 - h^2} \\ &= \sqrt{(1,5 \text{ m})^2 - (0,260)^2} \\ a &\approx 1,477 \text{ m} & (7)\end{aligned}$$

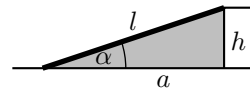
Lösung Teil c:

$$\begin{aligned}A &= \frac{a \cdot h}{2} \\ &= \frac{1,477 \text{ m} \cdot 0,260 \text{ m}}{2} \\ A &\approx 0,192 \text{ m}^2 & (6)\end{aligned}$$

Die Dreiecksfläche beträgt: $A \approx 0,192 \text{ m}^2$

0.7 FLAECHE-02c

Damit ein Rollstuhl eine Stufe mit der Höhe $h = 25 \text{ cm}$ überwinden kann, soll ein stabiles Brett an der Oberkante der Stufe eingehängt werden. Damit die Auffahrt nicht zu steil wird, soll der Steigungswinkel höchstens $\alpha = 11^\circ$ betragen.



- a) Welche Länge l muss das Brett mindestens haben?
b) In welchem Abstand a von der Stufe liegt das untere Brettende auf dem Boden auf?
c) Wie groß ist der Flächeninhalt der markierten Dreiecksfläche unter dem Brett? (20 P.)

Lösung Teil a:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{h}{l} & | \cdot l \\ l \cdot \sin \alpha &= h & | : \sin \alpha \\ l &= \frac{h}{\sin \alpha} \\ &= \frac{25 \text{ cm}}{\sin 11^\circ} \\ l &\approx 131,0 \text{ cm} & (7)\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Länge des Brettes beträgt $l \approx 131,0 \text{ cm}$.

Lösung Teil b: Für die Berechnung gibt es zwei mögliche Lösungswege:

1. Mit einer Winkelfunktion
2. Mit dem Satz des Pythagoras

Variante 1:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{h}{a} & | \cdot a \\ a \cdot \tan \alpha &= h & | : \tan \alpha \\ a &= \frac{h}{\tan \alpha} \\ &= \frac{25 \text{ cm}}{\tan 11^\circ} \\ a &\approx 128,6 \text{ cm} & (7)\end{aligned}$$

Variante 2:

$$\begin{aligned}a^2 + h^2 &= l^2 & | - h^2 \\ a^2 &= l^2 - h^2 & | \sqrt{} \\ a &= \sqrt{l^2 - h^2} \\ &= \sqrt{(131 \text{ cm})^2 - (25 \text{ cm})^2} \\ a &\approx 128,6 \text{ cm} & (7)\end{aligned}$$

Ergebnis: Der Abstand beträgt $a \approx 128,6 \text{ cm}$.

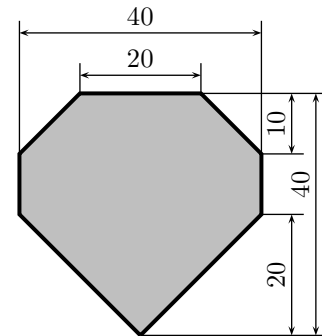
Lösung Teil c:

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{128,6 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm}}{2} = 1\,607,5 \text{ cm}^2$$

Ergebnis: Die Fläche beträgt $A = 1\,607,5 \text{ cm}^2$. (6)

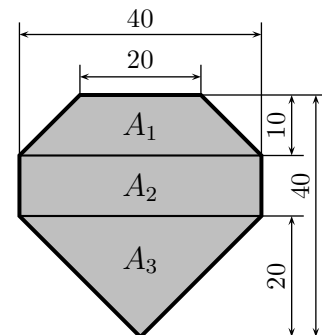
0.8 FLAECHE-03a

Nebstehend ist ein Muster dargestellt, das für eine Dekoration verwendet werden soll. Alle Maße sind in **Millimetern** angegeben. Berechnen Sie die Gesamtfläche des Musters in der Einheit **Quadratzentimeter!** (20 P.)



Lösung: Zunächst wird die Gesamtfläche in drei Teilflächen zerlegt. Für diese werden die Bezeichnungen A_1 für das Trapez, A_2 für das Rechteck und A_3 für das Dreieck vergeben.

Für die Trapezfläche A_1 sind die beiden Grundseiten mit $g_1 = 40 \text{ mm}$ und $g_2 = 20 \text{ mm}$ bekannt, ebenso die Höhe mit $h = 10 \text{ mm}$. Mit diesen Werten kann die Trapezfläche berechnet werden.



$$A_1 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{40 \text{ mm} + 20 \text{ mm}}{2} \cdot 10 \text{ mm} = \frac{4 \text{ cm} + 2 \text{ cm}}{2} \cdot 1 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2 \quad (5)$$

Im Rechteck A_2 ist die Länge mit $a = 40 \text{ mm}$ bekannt, die Breite b muss noch ermittelt werden. Das geschieht mit den drei angegebenen vertikalen Maßen.

$$b = 40 \text{ mm} - 20 \text{ mm} - 10 \text{ mm} = 10 \text{ mm} \quad (2)$$

Damit kann die Rechteckfläche berechnet werden.

$$A_2 = a \cdot b = 40 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 4 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2 \quad (5)$$

Zum Schluss wird noch die Dreieckfläche A_3 bestimmt. Bekannt sind die Grundseite mit $g = 40 \text{ mm}$ und die Höhe mit $h = 20 \text{ mm}$.

$$A_3 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{40 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm}}{2} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}}{2} = 4 \text{ cm}^2 \quad (5)$$

Die Gesamtfläche ist die Summe aller drei Teilflächen.

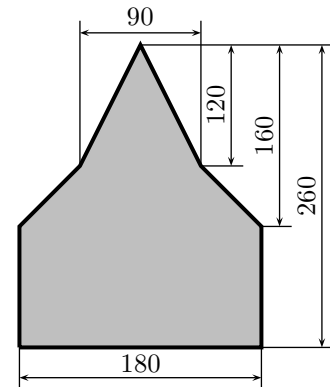
$$A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3 = 3 \text{ cm}^2 + 4 \text{ cm}^2 + 4 \text{ cm}^2 = 11 \text{ cm}^2$$

Die Fläche des Musters beträgt: $A_{ges} = 11 \text{ cm}^2$ (3)

0.9 FLAECHE-03b

Nebstehend ist ein Kirchenfenster dargestellt. Alle Maße sind in Zentimetern angegeben.

Berechnen Sie die Gesamtfläche des Fensters in der Einheit **Quadratmeter!** (20 P.)



Lösung: Zur Lösung wird die Gesamtfläche A sinnvollerweise in drei Teilflächen aufgeteilt, wie nebenstehend dargestellt: ein Rechteck (A_1), ein Trapez (A_2) und ein Dreieck (A_3).

Weiterhin ist es sinnvoll, sofort alle Maße in *Meter* umzurechnen, dann ergibt sich am Schluss die Fläche automatisch in der gewünschten Einheit *Quadratmeter*.

Beginnen wir mit dem Rechteck. Bekannt ist eine Rechteckseite mit $a = 1,8$ m. Die andere Rechteckseite b muss aus dem angegebenen Maßen berechnet werden:

$$b = 2,6 \text{ m} - 1,6 \text{ m} = 1 \text{ m} \quad (3)$$

Damit kann die Rechteckfläche berechnet werden.

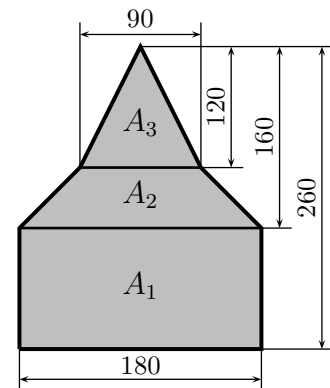
$$A_1 = a \cdot b = 1,8 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 1,8 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Im Trapez A_2 muss zunächst die Höhe h aus den angegebenen Maßen berechnet werden.

$$h = 1,6 \text{ m} - 1,2 \text{ m} = 0,4 \text{ m} \quad (3)$$

Die beiden Grundseiten mit $g_1 = 1,8$ m und $g_2 = 0,9$ m sind bekannt. Damit kann die Trapezfläche A_2 berechnet werden.

$$A_2 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{1,8 \text{ m} + 0,9 \text{ m}}{2} \cdot 0,4 \text{ m} = 0,54 \text{ m}^2 \quad (4)$$



Es folgt die Dreiecksfläche A_3 . Die Grundseite $g = 0,9\text{ m}$ und die Höhe $h = 1,2\text{ m}$ sind angegeben, die Fläche kann berechnet werden.

$$A_3 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{0,9\text{ m} \cdot 1,2\text{ m}}{2} = 0,54\text{ m}^2 \quad (4)$$

Mit diesen drei Flächen kann die Gesamtfläche berechnet werden.

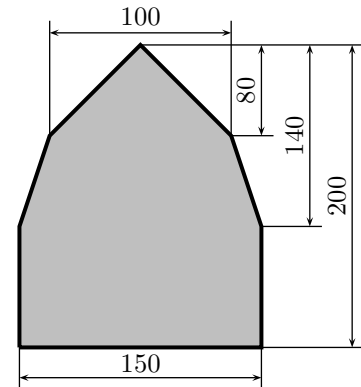
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1,8\text{ m}^2 + 0,54\text{ m}^2 + 0,54\text{ m}^2 = 2,88\text{ m}^2 \quad (3)$$

Die Fläche des Kirchenfensters beträgt: $A = 2,88\text{ m}^2$

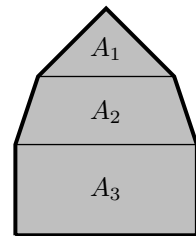
0.10 FLAECHEN-03c

Nebestehend ist ein Kirchenfenster dargestellt. Alle Maße sind in Zentimetern angegeben.

Berechnen Sie die Gesamtfläche des Fensters in der Einheit **Quadratmeter!** (20 P.)



Lösung: Es empfiehlt sich, die Gesamtfläche A in eine Dreiecksfläche A_1 , eine Trapezfläche A_2 und eine Rechteckfläche A_3 zu zerlegen, wie nebenstehend dargestellt. Weiterhin ist es sinnvoll, alle Maße sofort in *Meter* umzurechnen, damit sich am Schluss alle Flächen in der Einheit *Quadratmeter* ergeben.



Dreiecksfläche:

Bekannt sind die Grundseite mit $g = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$ sowie die Höhe mit $h = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$. Damit kann die Dreiecksfläche A_1 berechnet werden.

$$A_1 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{1 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ m}}{2} = 0,4 \text{ m}^2 \quad (4)$$

Trapezfläche:

Die beiden Grundseiten sind angegeben mit $g_1 = 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m}$ und $g_2 = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$. Die Höhe h muss noch aus den angegebenen Maßen errechnet werden:

$$h = 140 \text{ cm} - 80 \text{ cm} = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m} \quad (3)$$

Damit sind alle Maße zur Berechnung der Trapezfläche A_2 bekannt.

$$A_2 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{1,5 \text{ m} + 1 \text{ m}}{2} \cdot 0,6 \text{ m} = 0,75 \text{ m}^2 \quad (4)$$

Rechteckfläche:

Die längere Rechteckseite ist angegeben mit $a = 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m}$. Die kürzere muss noch aus den angegebenen Maßen ausgerechnet werden.

$$b = 200 \text{ cm} - 140 \text{ cm} = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m} \quad (3)$$

Hiermit kann die Rechteckfläche A_3 bestimmt werden.

$$A_3 = a \cdot b = 1,5 \text{ m} \cdot 0,6 \text{ m} = 0,9 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Die Summe der drei Teilflächen A_1 , A_2 und A_3 ergibt die Gesamtfläche A .

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 0,4 \text{ m}^2 + 0,75 \text{ m}^2 + 0,9 \text{ m}^2 = 2,05 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Ergebnis: Das Kirchenfenster hat eine Fläche von $A = 2,05 \text{ m}^2$.

0.11 FLAECHEN-03d

Eine Wand in einer Dachgeschosswohnung soll gestrichen werden. Bekannt sind folgende Maße:

Raumbreite $a = 680$ cm

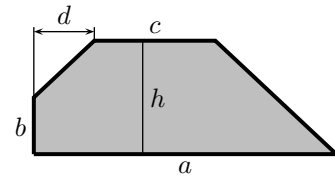
linke Wandhöhe $b = 125$ cm

Deckenbreite $c = 200$ cm

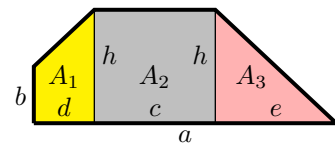
waagrecht gemessene Schrägenbreite $d = 160$ cm

Deckenhöhe $h = 250$ cm

Für wieviel **Quadratmeter** Wandfläche muss Farbe beschafft werden? (20 P.)



Lösung: Zunächst sollte man die Fläche in berechenbare Teilflächen zerlegen. Es empfiehlt sich die Zerlegung in ein Trapez A_1 , ein Rechtecke A_2 und ein Dreieck A_3 wie nebenstehend dargestellt.



Alle Längen sollten zweckmäßigerweise in **Meter** umgewandelt werden, weil das Ergebnis in der Einheit **Quadratmeter** gesucht ist.

$$a = 680 \text{ cm} = 6,8 \text{ m} \quad (1)$$

$$b = 125 \text{ cm} = 1,25 \text{ m} \quad (1)$$

$$c = 200 \text{ cm} = 2 \text{ m} \quad (1)$$

$$d = 160 \text{ cm} = 1,6 \text{ m} \quad (1)$$

$$h = 250 \text{ cm} = 2,5 \text{ m} \quad (1)$$

Das gelb dargestellte Trapez A_1 liegt gewissermaßen „auf der Seite“, die beiden Grundseiten sind h und b , die Höhe ist d .

$$A_1 = \frac{h + b}{2} \cdot d = \frac{2,5 \text{ m} + 1,25 \text{ m}}{2} \cdot 1,6 \text{ m} = 3 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Es folgt die graue Rechteckfläche A_2 mit den Seiten c und h .

$$A_2 = c \cdot h = 2 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} = 5 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Für die rote Dreieckfläche A_3 wird noch die Länge der Seite e benötigt.

$$e = a - d - c = 6,8 \text{ m} - 1,6 \text{ m} - 2 \text{ m} = 3,2 \text{ m} \quad (3)$$

Mit e als Grundseite und h als Höhe kann die Dreieckfläche A_3 berechnet werden.

$$A_3 = \frac{e \cdot h}{2} = \frac{3,2 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m}}{2} = 4 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Die Gesamtfläche A kann berechnet werden.

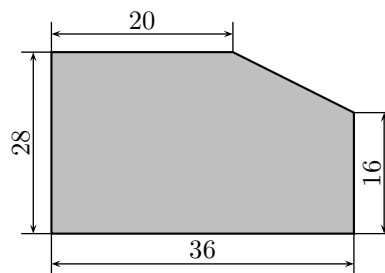
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 3 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 = 12 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Es muss für 12 Quadratmeter Farbe beschafft werden.

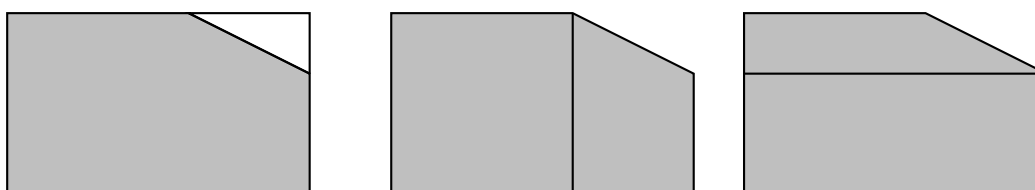
0.12 FLAECHEN-04a

Auf nebenstehend dargestellter Grundstückfläche ist eine Weide für Schafe angelegt. Alle Maße sind in der Einheit *Meter* angegeben.

- a) Berechnen Sie die Gesamtfläche der Weide.
- b) Um die gesamte Weidefläche muss ein Zaun gebaut werden. Berechnen Sie die erforderliche gesamte Zaunlänge. (20 P.)



Lösung Teil a: Es gibt (mindestens) drei Möglichkeiten der Flächenzerlegung.



1. Die Fläche wird zu einem Rechteck ergänzt. Von der Rechteckfläche wird die Dreiecksfläche oben rechts subtrahiert.
2. Die Fläche wird in eine Rechteck (links) und in ein Trapez (rechts) zerlegt. Beide Flächen werden addiert.
3. Die Fläche wird in eine Rechteck (unten) und in ein Trapez (oben) zerlegt. Beide Flächen werden addiert.

Ich möchte alle drei Lösungsmöglichkeiten vorstellen.

1. Rechteck mit Dreieck

Die Rechteckfläche nenne ich A_R und die Dreiecksfläche A_D . Die Rechteckseiten sind bekannt.

$$A_R = a \cdot b = 36 \text{ m} \cdot 28 \text{ m} = 1\,008 \text{ m}^2$$

Das Dreieck ist rechtwinklig. Die Längen der Katheten k_1 und k_2 müssen aus den Angaben berechnet werden.

$$k_1 = 36 \text{ m} - 20 \text{ m} = 16 \text{ m}$$

$$k_2 = 28 \text{ m} - 16 \text{ m} = 12 \text{ m}$$

Damit kann die Dreiecksfläche berechnet werden.

$$A_D = \frac{k_1 \cdot k_2}{2} = \frac{16 \text{ m} \cdot 12 \text{ m}}{2} = 96 \text{ m}^2$$

Die Gesamtfläche A wird bestimmt.

$$A = A_R - A_D = 1\,008\text{ m}^2 - 96\text{ m}^2 = 912\text{ m}^2$$

2. Vertikale Teilung in Rechteck und Trapez

Ich nenne die Rechteckfläche A_R und die Trapezfläche A_T . Die Maße des Rechteckes sind bekannt.

$$A_R = a \cdot b = 20\text{ m} \cdot 28\text{ m} = 560\text{ m}^2$$

Die beiden Grundseiten $g_1 = 28\text{ m}$ und $g_2 = 16\text{ m}$ sind bekannt, die Höhe muss noch aus den angegebenen Maßen bestimmt werden.

$$h = 36\text{ m} - 20\text{ m} = 16\text{ m}$$

Damit kann die Trapezfläche A_T berechnet werden.

$$A_T = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{28\text{ m} + 16\text{ m}}{2} \cdot 16\text{ m} = 352\text{ m}^2$$

Damit kann die Gesamtfläche A berechnet werden.

$$A = A_R + A_T = 560\text{ m}^2 + 352\text{ m}^2 = 912\text{ m}^2$$

3. Horizontale Teilung in Rechteck und Trapez Ich nenne die Rechteckfläche A_R und die Trapezfläche A_T . Die Maße des Rechteckes sind bekannt.

$$A_R = a \cdot b = 36\text{ m} \cdot 16\text{ m} = 576\text{ m}^2$$

Die beiden Grundseiten $g_1 = 36\text{ m}$ und $g_2 = 20\text{ m}$ sind bekannt, die Höhe muss noch aus den angegebenen Maßen bestimmt werden.

$$h = 28\text{ m} - 16\text{ m} = 12\text{ m}$$

Damit kann die Trapezfläche A_T berechnet werden.

$$A_T = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{36\text{ m} + 20\text{ m}}{2} \cdot 12\text{ m} = 336\text{ m}^2$$

Damit kann die Gesamtfläche A berechnet werden.

$$A = A_R + A_T = 576\text{ m}^2 + 336\text{ m}^2 = 912\text{ m}^2$$

Die Fläche der Weide beträgt: $A = 912\text{ m}^2$

Lösung Teil b: Die Zaunlänge besteht aus 5 Teilstücken, von denen 4 bekannt sind. Es fehlt noch die Länge der Schräge oben rechts. Ich nenne diese Länge s . Im Rechtwinkligen Dreieck gemäß Lösung Teil a, 1. Lösungsvariante, ist das die Hypotenuse. Die Längen der Katheten k_1 und k_2 wurden dort bereits bestimmt. Damit kann die Länge der Hypotenuse mit Hilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt werden.

$$\begin{aligned} s^2 &= k_1^2 + k_2^2 && |\sqrt{} \\ s &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ &= \sqrt{(16\text{ m})^2 + (12\text{ m})^2} \\ s &= 20\text{ m} \end{aligned}$$

Hiermit und mit den angegebenen Seitenlängen kann nun die Zaunlänge l berechnet werden.

$$l = 16\text{ m} + 36\text{ m} + 28\text{ m} + 20\text{ m} + 20\text{ m} = 120\text{ m}$$

Die Gesamtlänge des Zaunes beträgt: $l = 120\text{ m}$

0.13 FLAECHEN-04b

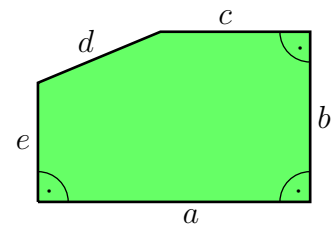
Auf einer Wiese wird ein Gehege zur Haltung von Meerschweinchen angelegt, wie nebenstehend im Grundriss dargestellt. Folgende Maße sind bekannt:

$$a = 8 \text{ m}$$

$$b = 5 \text{ m}$$

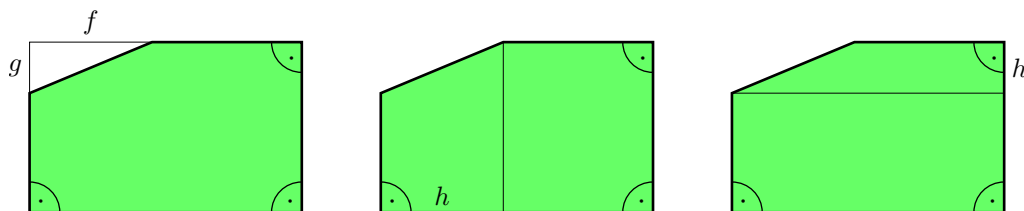
$$c = 4,4 \text{ m}$$

$$e = 3,5 \text{ m}$$



- Wie groß ist die Wiesenfläche, die den Meerschweinchen zur Verfügung steht?
- Wie groß ist die gesamte Zaunlänge für das Gehege?

Lösung Teil a: Es gibt (mindestens) drei Möglichkeiten zur Zerlegung der Fläche.



- Man ergänzt die Fläche zu einem Rechteck, indem oben links ein Dreieck ergänzt wird. Diese Dreiecksfläche muss dann von der Rechteckfläche subtrahiert werden.
- Man teilt die Fläche vertikal in ein Trapez links und ein Rechteck rechts. Diese Flächen werden addiert.
- Man teilt die Fläche horizontal in ein Trapez oben und ein Rechteck unten. Diese Flächen werden addiert.

Lösungsvariante 1: Zunächst werden die Seitenlängen des Dreieckes benötigt.

$$f = a - c = 8 \text{ m} - 4,4 \text{ m} = 3,6 \text{ m} \quad (2)$$

$$g = b - e = 5 \text{ m} - 3,5 \text{ m} = 1,5 \text{ m} \quad (2)$$

Damit kann die Dreiecksfläche A_D berechnet werden.

$$A_D = \frac{f \cdot g}{2} = \frac{3,6 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m}}{2} = 2,7 \text{ m}^2 \quad (4)$$

Die Rechteckfläche A_R wird bestimmt.

$$A_R = a \cdot b = 8 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 40 \text{ m}^2 \quad (4)$$

Jetzt wird die tatsächliche Fläche des Geheges berechnet.

$$A = A_R - A_D = 40 \text{ m}^2 - 2,7 \text{ m}^2 = 37,3 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Lösungsvariante 2: Ich nenne die Trapezfläche A_T und die Rechteckfläche A_R .

Die Höhe h des Trapezes ergibt sich aus a und c .

$$h = a - c = 8 \text{ m} - 4,4 \text{ m} = 3,6 \text{ m} \quad (2)$$

Hiermit kann die Trapezfläche A_T berechnet werden.

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{b + e}{2} \cdot h \\ &= \frac{5 \text{ m} + 3,5 \text{ m}}{2} \cdot 3,6 \text{ m} \\ A_T &= 15,3 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Die Rechteckfläche A_R wird berechnet:

$$\begin{aligned} A_R &= b \cdot c \\ &= 5 \text{ m} \cdot 4,4 \text{ m} \\ A_R &= 22 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gesamtfläche ist die Summe:

$$A = A_T + A_R = 15,3 \text{ m}^2 + 22 \text{ m}^2 = 37,3 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Lösungsvariante 3: Ich nenne die Trapezfläche A_T und die Rechteckfläche A_R .

Die Höhe h des Trapezes ergibt sich aus b und e .

$$h = b - e = 5 \text{ m} - 3,5 \text{ m} = 1,5 \text{ m} \quad (2)$$

Hiermit kann die Trapezfläche A_T berechnet werden.

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{a + c}{2} \cdot h \\ &= \frac{8 \text{ m} + 4,4 \text{ m}}{2} \cdot 1,5 \text{ m} \\ A_T &= 9,3 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Die Rechteckfläche A_R wird berechnet:

$$\begin{aligned} A_R &= a \cdot e \\ &= 8 \text{ m} \cdot 3,5 \text{ m} \\ A_R &= 28 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gesamtfläche ist die Summe:

$$A = A_T + A_R = 9,3 \text{ m}^2 + 28 \text{ m}^2 = 37,3 \text{ m}^2 \quad (3)$$

Die Wiesenfläche beträgt: $A = 37,3 \text{ m}^2$

Lösung Teil b: Für die Berechnung des Umfangs wird noch die Länge d benötigt. Dazu kann das Rechtwinklige Hilfsdreieck aus der ersten Lösungsvariante von Teil a verwendet werden. Hier gilt der Satz des Pythagoras.

$$\begin{aligned}
 d^2 &= f^2 + g^2 && |\sqrt{} \\
 d &= \sqrt{f^2 + g^2} \\
 &= \sqrt{(3,6 \text{ m})^2 + (1,5 \text{ m})^2} \\
 d &= 3,9 \text{ m} && (3)
 \end{aligned}$$

Jetzt kann der Umfang berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 U &= a + b + c + d + e \\
 &= 8 \text{ m} + 5 \text{ m} + 4,4 \text{ m} + 3,9 \text{ m} + 3,5 \text{ m} \\
 U &= 24,8 \text{ m} && (2)
 \end{aligned}$$

Die Zaunlänge beträgt: $U = 24,8 \text{ m}$

0.14 FLAECHEN-04c

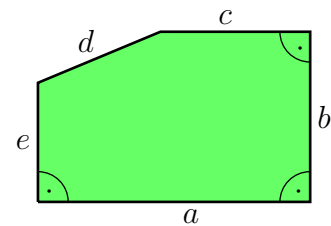
Auf einer Wiese wird ein Gehege zur Haltung von Kaninchen angelegt, wie nebenstehend im Grundriss dargestellt. Folgende Maße sind bekannt:

$$a = 12 \text{ m}$$

$$b = 7 \text{ m}$$

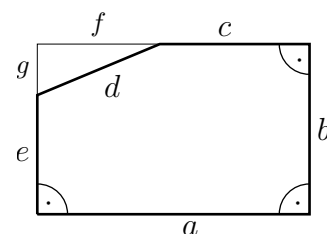
$$c = 6 \text{ m}$$

$$d = 6,5 \text{ m}$$



- a) Wie groß ist die gesamte Zaunlänge für das Gehege?
 b) Wie groß ist die Wiesenfläche, die den Kaninchen zur Verfügung steht?

Lösung Teil a: Zur Berechnung der gesamten Zaunlänge wird noch die Länge der Seite e benötigt. Dazu wird die Planfigur um das Dreieck mit den Seiten d , f und g ergänzt. Da dieses Dreieck rechtwinklig ist, kann mit dem Satz des Pythagoras g und damit auch e berechnet werden.



$$f = a - c = 12 \text{ m} - 6 \text{ m} = 6 \text{ m}$$

Der Satz des Pythagoras kann angewendet werden:

$$\begin{aligned} g^2 + f^2 &= d^2 & | - f^2 \\ g^2 &= d^2 - f^2 & | \sqrt{} \\ g &= \sqrt{d^2 - f^2} \\ &= \sqrt{(6,5 \text{ m})^2 - (6 \text{ m})^2} \\ g &= 2,5 \text{ m} \end{aligned}$$

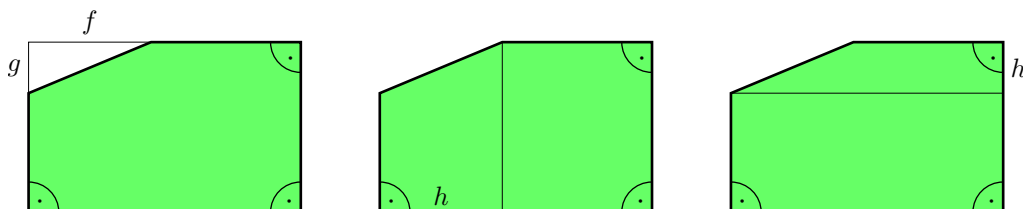
$$e = b - g = 7 \text{ m} - 2,5 \text{ m} = 4,5 \text{ m}$$

Mit diesen Werten kann nun der Umfang berechnet werden.

$$U = a + b + c + d + e = 12 \text{ m} + 7 \text{ m} + 6 \text{ m} + 6,5 \text{ m} + 4,5 \text{ m} = 36 \text{ m}$$

Ergebnis: Die gesamte Zaunlänge beträgt 36 Meter.

Lösung Teil b: Es gibt (mindestens) drei Möglichkeiten zur Zerlegung der Fläche.



1. Man ergänzt die Fläche zu einem Rechteck, indem oben links ein Dreieck ergänzt wird. Diese Dreiecksfläche muss dann von der Rechteckfläche subtrahiert werden.
2. Man teilt die Fläche vertikal in ein Trapez links und ein Rechteck rechts. Diese Flächen werden addiert.
3. Man teilt die Fläche horizontal in ein Trapez oben und ein Rechteck unten. Diese Flächen werden addiert.

Lösungsvariante 1: Aus Teil a sind die Dreieckseiten f und g bekannt. Damit kann die Dreiecksfläche A_D berechnet werden.

$$A_D = \frac{f \cdot g}{2} = \frac{6 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m}}{2} = 7,5 \text{ m}^2$$

Die Fläche A_R des gesamten Rechteckes wird berechnet:

$$A_R = a \cdot b = 12 \text{ m} \cdot 7 \text{ m} = 84 \text{ m}^2$$

Jetzt kann die gesuchte Weidefläche A berechnet werden:

$$A = A_R - A_D = 84 \text{ m}^2 - 7,5 \text{ m}^2 = 76,5 \text{ m}^2$$

Lösungsvariante 2: Beginnen wir mit der rechten Rechteckfläche A_R .

$$A_R = b \cdot c = 7 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 42 \text{ m}^2$$

Es folgt die Fläche des Trapezes A_T links.

$$A_T = \frac{b + e}{2} \cdot f = \frac{7 \text{ m} + 4,5 \text{ m}}{2} \cdot 6 \text{ m} = 34,5 \text{ m}^2$$

Die Summe beider Flächen ist die gesuchte Gesamtfläche.

$$A = A_R + A_T = 42 \text{ m}^2 + 34,5 \text{ m}^2 = 76,5 \text{ m}^2$$

Lösungsvariante 3: Beginnen wir mit der Rechteckfläche A_R unten.

$$A_R = a \cdot e = 12 \text{ m} \cdot 4,5 \text{ m} = 54 \text{ m}^2$$

Es folgt die Trapezfläche A_T , die oberhalb liegt.

$$A_T = \frac{a + c}{2} \cdot g = \frac{12 \text{ m} + 6 \text{ m}}{2} \cdot 2,5 \text{ m} = 22,5 \text{ m}^2$$

Die Summe beider Flächen ist die gesuchte Gesamtfläche A .

$$A = A_R + A_T = 54 \text{ m}^2 + 22,5 \text{ m}^2 = 76,5 \text{ m}^2$$

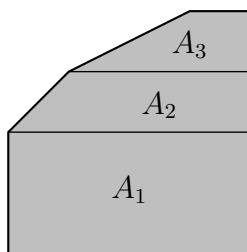
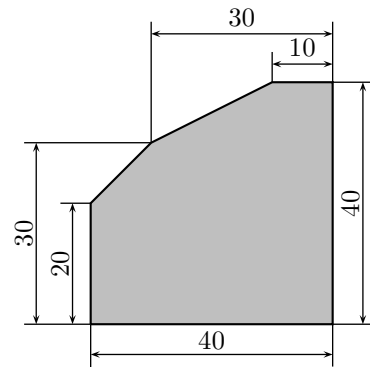
Ergebnis: Die Gesamtfläche der Wiese beträgt $A = 76,5 \text{ m}^2$

0.15 FLAECHEN-05a

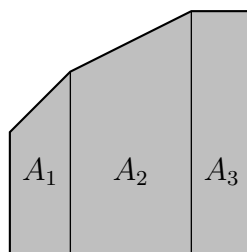
Nebensiehend ist ein Regalbrett für ein Eckregal dargestellt. Die Maße sind in **Zentimeter** angegeben.

Berechnen Sie die Gesamtfläche des Regalbrettes!
(20 P.)

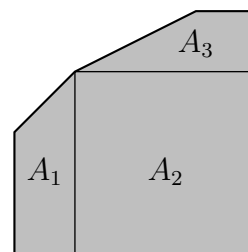
Lösung: Sinnvollerweise teilt man die Gesamtfläche zunächst in mehrere Teilflächen auf. Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten. Drei davon stelle ich hier vor.



Variante 1



Variante 2



Variante 3

In allen Varianten wird die Fläche in ein Rechteck und zwei Trapeze zerlegt. Zusätzlich könnte man auch jedes Trapez noch weiter in ein Rechteck und ein Dreieck zerlegen. Das stelle ich hier aber nicht dar.

Lösungsvariante 1: Beginnen wir mit der Rechteckfläche A_1 .

$$A_1 = a \cdot b = 40 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 800 \text{ cm}^2 \quad (3)$$

Für die Trapezfläche A_2 fehlt noch die Höhe h . Sie kann aus den angegebenen Maßen berechnet werden.

$$h = 30 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \quad (3)$$

$$A_2 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{40 \text{ cm} + 30 \text{ cm}}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 350 \text{ cm}^2 \quad (4)$$

Auch für die Trapezfläche A_3 fehlt noch die Höhe h . Sie kann aus den angegebenen Maßen berechnet werden.

$$h = 40 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \quad (3)$$

$$A_3 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{30 \text{ cm} + 10 \text{ cm}}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2 \quad (4)$$

Die Gesamtfläche A ist die Summe der drei Teilflächen.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 800 \text{ cm}^2 + 350 \text{ cm}^2 + 200 \text{ cm}^2 = 1\,350 \text{ cm}^2 \quad (3)$$

Lösungsvariante 2: Beginnen wir mit der Rechteckfläche A_3 .

$$A_3 = a \cdot b = 40 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2 \quad (3)$$

Für die Trapezfläche A_1 fehlt noch die Höhe h . Sie kann aus den angegebenen Maßen berechnet werden.

$$h = 40 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \quad (3)$$

$$A_1 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{30 \text{ cm} + 20 \text{ cm}}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 250 \text{ m}^2 \quad (4)$$

Auch für die Trapezfläche A_2 fehlt noch die Höhe h . Sie kann aus den angegebenen Maßen berechnet werden.

$$h = 30 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm} \quad (3)$$

$$A_2 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{40 \text{ cm} + 30 \text{ cm}}{2} \cdot 20 \text{ cm} = 700 \text{ m}^2 \quad (4)$$

Die Gesamtfläche A ist die Summe der drei Teilflächen.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 250 \text{ cm}^2 + 700 \text{ cm}^2 + 400 \text{ cm}^2 = 1\,350 \text{ cm}^2 \quad (3)$$

Lösungsvariante 3: Beginnen wir auch hier mit der Rechteckfläche, diesmal A_2 .

$$A_2 = a \cdot b = 30 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} = 900 \text{ cm}^2 \quad (3)$$

Für die Trapezfläche A_1 fehlt noch die Höhe h . Sie kann aus den angegebenen Maßen berechnet werden.

$$h = 40 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \quad (3)$$

$$A_1 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{30 \text{ cm} + 20 \text{ cm}}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 250 \text{ m}^2 \quad (4)$$

Auch für die Trapezfläche A_3 fehlt noch die Höhe h . Sie kann aus den angegebenen Maßen berechnet werden.

$$h = 40 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \quad (3)$$

$$A_3 = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{30 \text{ cm} + 10 \text{ cm}}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2 \quad (4)$$

Die Gesamtfläche A ist die Summe der drei Teilflächen.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 250 \text{ cm}^2 + 900 \text{ cm}^2 + 200 \text{ cm}^2 = 1\,350 \text{ cm}^2 \quad (3)$$

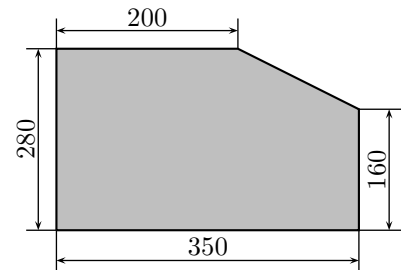
Ergebnis: Die Fläche des Regalbrettes beträgt $1\,350 \text{ cm}^2$.

0.16 FLAECHEN-05b

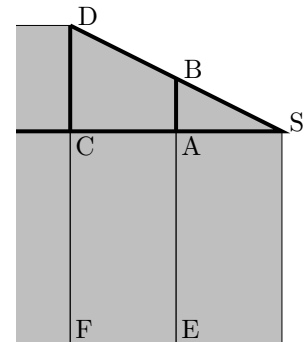
Lösung:

0.17 FLAECHEN-06

Ein Wohnraum im Dachgeschoss ist 4 Meter lang und 3,5 Meter breit. Nebenstehend ist eine Wandfläche dargestellt. Alle Maße sind in Zentimetern angegeben. Berechnen Sie die **Wohnfläche** dieses Raumes. Dabei werden alle Bereiche der Bodenfläche, in denen die Deckenhöhe unter zwei aber mehr als einen Meter beträgt, nur **halb** berechnet. Alle Bereiche unter einem Meter Höhe bleiben unberücksichtigt. (20 P.)



Lösung: Zur Berechnung der Fläche wird die Breite des Bereiches benötigt, in dem die Deckenhöhe unter zwei Meter beträgt. Dazu habe ich die Planfigur der rechten Raumhälfte etwas größer herausgezeichnet und einige Hilfslinien eingetragen. Wichtige Punkte haben einen Namen bekommen.



Die Strecke von D über C nach F stellt die maximale Raumhöhe von 2,8 Meter dar, die Strecke von B über A nach E die Raumhöhe von genau 2 Meter. Damit liegt **rechts** vom Punkt A der Raumbereich, der unter zwei Meter Höhe hat und daher bei der Wohnflächenberechnung nur halb berücksichtigt wird. Das bedeutet, dass die Strecke \overline{SA} berechnet werden muss.

Die fett dargestellten Hilfslinien stellen einen von zwei Parallelen Geraden geschnittenen Zweistrahls dar. Somit können die Strahlensätze angewendet werden. Weil auch Abschnitte auf den Parallelen vorkommen, ist es der **zweite** Strahlensatz.

Zunächst werden einige Streckenlängen berechnet. Die dafür benötigten Daten können aus der bemaßten Darstellung der Wand entnommen werden.

$$\overline{CD} = 2,8 \text{ m} - 1,6 \text{ m} = 1,2 \text{ m} \quad (2)$$

$$\overline{AB} = 2 \text{ m} - 1,6 \text{ m} = 0,4 \text{ m} \quad (2)$$

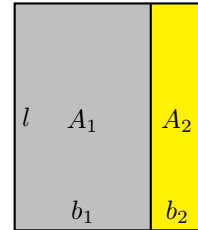
$$\overline{SC} = 3,5 \text{ m} - 2 \text{ m} = 1,5 \text{ m} \quad (2)$$

Damit kann der zweite Strahlensatz angewendet werden. Es hat sich bewährt, mit der gesuchten Größe im Zähler des ersten Bruches zu beginnen.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \\
\frac{\overline{SA}}{1,5 \text{ m}} &= \frac{0,4 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} \quad | \cdot 1,5 \text{ m} \\
\overline{SA} &= \frac{0,4 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} \cdot 1,5 \text{ m} \\
\overline{SA} &= 0,5 \text{ m} \quad (5)
\end{aligned}$$

Nebenstehend habe ich die Grundfläche des Raumes skizziert.

Die linke grau dargestellte Fläche A_1 mit der Breite b_1 hat eine Deckenhöhe über zwei Meter und wird daher voll berechnet. Im Bereich der rechten gelb dargestellten Fläche A_2 ist die Deckenhöhe unter zwei Meter, daher wird diese Fläche bei der Wohnflächenberechnung nur halb berücksichtigt.



Für die Berechnung von A_1 fehlt uns noch die Breite b_1 . Bekannt ist aber die eben berechnete Breite b_2 mit:

$$b_2 = \overline{SA} = 0,5 \text{ m}$$

Damit kann b_1 berechnet werden:

$$b_1 = b_{ges} - b_2 = 3,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 3 \text{ m} \quad (2)$$

Jetzt werden die beiden Teilflächen A_1 und A_2 berechnet.

$$A_1 = l \cdot b_1 = 4 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} = 12 \text{ m}^2 \quad (2)$$

$$A_2 = l \cdot b_2 = 4 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m} = 2 \text{ m}^2 \quad (2)$$

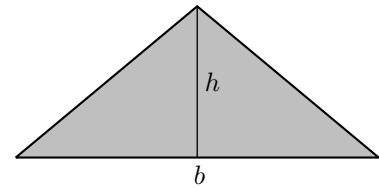
Zum Schluss kann daraus die Wohnfläche berechnet werden:

$$A_{Wohn} = A_1 + 0,5 \cdot A_2 = 12 \text{ m}^2 + 0,5 \cdot 2 \text{ m}^2 = 13 \text{ m}^2$$

Ergebnis: Die Wohnfläche des Raumes beträgt 13 m^2 . (3)

0.18 FLAECHEN-07

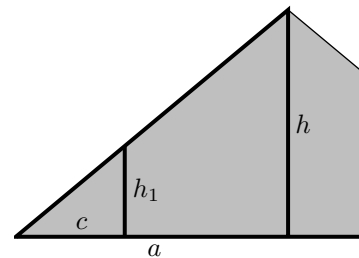
Das Dachgeschoss eines Hauses ist als Wohnraum ausgebaut. Der Raum hat eine Breite von $b = 6,16 \text{ m}$ und eine Länge von $l = 8 \text{ m}$. Die Höhe in der Mitte beträgt $h = 2,80 \text{ m}$. Nebenstehend ist eine Wandfläche dargestellt.



Berechnen Sie die **Wohnfläche** dieses Raumes. Dabei werden alle Bereiche der Bodenfläche, in denen die Deckenhöhe unter zwei aber mehr als einen Meter beträgt, nur **halb** berechnet. Alle Bereiche unter einem Meter Höhe bleiben unberücksichtigt. (20 P.)

Lösung: Zunächst berechne ich den Bereich, in dem die Höhe weniger als 1 Meter beträgt. Wegen der Symmetrie beschränke ich mich bei der Berechnung und der Darstellung auf die linke Hälfte. Die halbe Breite b nenne ich a :

$$a = \frac{1}{2} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 6,16 \text{ m} = 3,08 \text{ m} \quad (2)$$

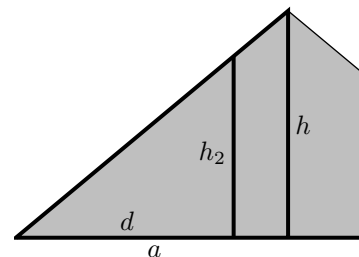


Die Höhe, die genau 1 Meter beträgt, ist als h_1 eingezeichnet. Ihr Abstand vom linken Rand heißt c . Dieser Wert ist gesucht. Der zweite Strahlensatz lässt sich anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} &= \frac{h_1}{h} \\ \frac{c}{3,08 \text{ m}} &= \frac{1 \text{ m}}{2,8 \text{ m}} && | \cdot 3,08 \text{ m} \\ c &= \frac{1 \text{ m}}{2,8 \text{ m}} \cdot 3,08 \text{ m} \\ c &= 1,1 \text{ m} && (4) \end{aligned}$$

Als nächstes habe ich mit h_2 die Höhe eingezeichnet, die genau 2 Meter lang ist. Den Abstand vom linken Raumrand nenne ich d . Dieser Abstand d soll nun berechnet werden.

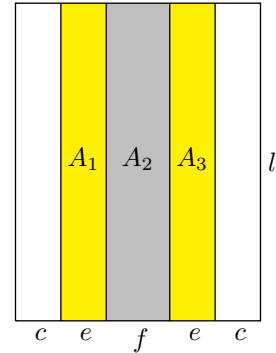
Wie im ersten Teil lässt sich auch hier wieder der zweite Strahlensatz anwenden.



$$\begin{aligned}
\frac{d}{a} &= \frac{h_2}{h} \\
\frac{d}{3,08 \text{ m}} &= \frac{2 \text{ m}}{2,8 \text{ m}} \quad | \cdot 3,08 \text{ m} \\
d &= \frac{2 \text{ m}}{2,8 \text{ m}} \cdot 3,08 \text{ m} \\
d &= 2,2 \text{ m} \quad (4)
\end{aligned}$$

Nebestehend ist die Grundfläche des Raumes dargestellt. Im grauen Bereich ist die Deckenhöhe über 2 Meter, in den gelben zwischen 1 und 2 Meter. In den weißen Bereichen liegt die Höhe unter einem Meter. Die zugehörige Streifenbreite der weißen Randbereiche wurde schon mit $c = 1,1 \text{ m}$ berechnet. Die Streifenbreite e der gelben Flächen A_1 und A_3 mit einer Raumhöhe zwischen einem und zwei Meter kann aus c und d berechnet werden:

$$e = d - c = 2,2 \text{ m} - 1,1 \text{ m} = 1,1 \text{ m} \quad (2)$$



Auch die Breite f der mittleren grau dargestellten Fläche A_2 mit einer Deckenhöhe über zwei Meter kann berechnet werden.

$$f = b - 2d = 6,16 \text{ m} - 2 \cdot 2,2 \text{ m} = 1,76 \text{ m} \quad (2)$$

Mit diesen Daten können die Teilflächen berechnet werden.

$$A_1 = A_3 = l \cdot e = 8 \text{ m} \cdot 1,1 \text{ m} = 8,8 \text{ m}^2 \quad (2)$$

$$A_2 = l \cdot f = 8 \text{ m} \cdot 1,76 \text{ m} = 14,08 \text{ m}^2 \quad (2)$$

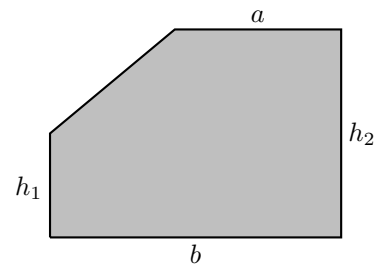
Die Wohnfläche kann berechnet werden:

$$A_{\text{Wohn}} = \frac{1}{2} \cdot A_1 + A_2 + \frac{1}{2} \cdot A_3 = \frac{1}{2} \cdot 8,8 \text{ m}^2 + 14,08 \text{ m}^2 + \frac{1}{2} \cdot 8,8 \text{ m}^2 = 22,88 \text{ m}^2$$

Die Wohnfläche beträgt 22,88 Quadratmeter. (2)

0.19 FLAECHEN-08

Im Dachgeschoss eines Hauses befindet sich ein Wohnraum. Eine Wandseite ist hier nebenstehend dargestellt. Der Raum hat eine Breite von $b = 3,50$ m und eine Länge von $l = 5$ m. Im Raum befindet sich eine Dachschräge, wie nebenstehend dargestellt. Die Deckenhöhe im rechten Bereich beträgt $h_2 = 2,50$ m. Dieser Bereich hat eine Breite von $a = 2$ m. Am linken Rand beträgt die Wandhöhe nur $h_1 = 1,25$ m.



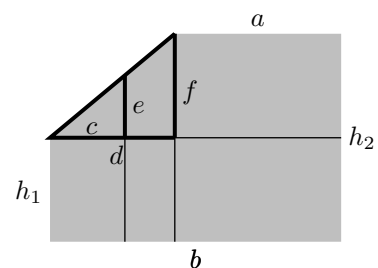
Berechnen Sie die Wohnfläche dieses Raumes! Bei der Wohnflächenberechnung werden alle Bereiche der Bodenfläche unter einer Höhe von zwei Metern nur zur Hälfte berücksichtigt, die Bereiche unter einer Höhe von einem Meter gar nicht. (20 P.)

Lösung: Zunächst muss berechnet werden, in wo die Deckenhöhe genau zwei Meter beträgt. Dazu habe ich in die abgebildete Seitenwand drei Hilfslinien eingezeichnet:

eine waagerechte in der Höhe h_1

eine senkrechte, an der die Deckenhöhe genau zwei Meter beträgt

eine senkrechte an der Stelle, wo die Deckenschräge die maximale Höhe erreicht.



Zusätzlich habe ich in der Planfigur die Linien dicker eingetragen, an denen man den zweiten Strahlensatz anwenden kann. Gekennzeichnet habe ich die beiden Strahlenabschnitte mit c und d , die Abschnitte auf den Parallelen mit e und f .

Wir suchen die Länge der Strecke c , also den waagerechten Abstand der Stelle mit genau zwei Meter Deckenhöhe von der linken Wandseite. Dafür benötigen wir die Längen der Strecken d , e und f .

$$d = b - a = 3,5 \text{ m} - 2 \text{ m} = 1,5 \text{ m} \quad (2)$$

$$e = 2 \text{ m} - h_1 = 2 \text{ m} - 1,25 \text{ m} = 0,75 \text{ m} \quad (2)$$

$$f = h_2 - h_1 = 2,5 \text{ m} - 1,25 \text{ m} = 1,25 \text{ m} \quad (2)$$

Der zweite Strahlensatz kann angewendet werden:

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{e}{f} \\ \frac{c}{1,5 \text{ m}} &= \frac{0,75 \text{ m}}{1,25 \text{ m}} & | \cdot 1,5 \text{ m} & (2) \\ c &= \frac{0,75 \text{ m}}{1,25 \text{ m}} \cdot 1,5 \text{ m} & (2) \\ c &= 0,9 \text{ m} & (2) \end{aligned}$$

Nebenstehend habe ich die Grundfläche des Raumes skizziert. Die Breite b_1 ist identisch mit c . Die Breite b_2 kann berechnet werden:

$$b_2 = b - b_1 = b - c = 3,5 \text{ m} - 0,9 \text{ m} = 2,6 \text{ m} \quad (2)$$

Die Flächen A_1 und A_2 werden berechnet:

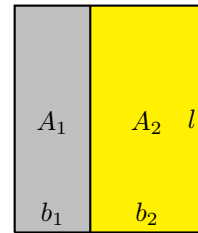
$$A_1 = l \cdot b_1 = 5 \text{ m} \cdot 0,9 \text{ m} = 4,5 \text{ m}^2 \quad (2)$$

$$A_2 = l \cdot b_2 = 5 \text{ m} \cdot 2,6 \text{ m} = 13 \text{ m}^2 \quad (2)$$

Hiermit kann die Wohnfläche berechnet werden.

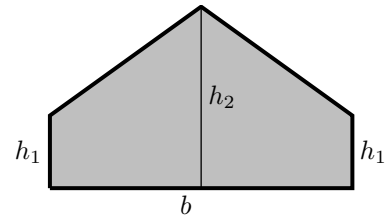
$$A_{\text{Wohn}} = 0,5 \cdot A_1 + A_2 = 0,5 \cdot 4,5 \text{ m}^2 + 13 \text{ m}^2 = 15,25 \text{ m}^2 \quad (2)$$

Die Wohnfläche des Raumes beträgt $15,25 \text{ m}^2$



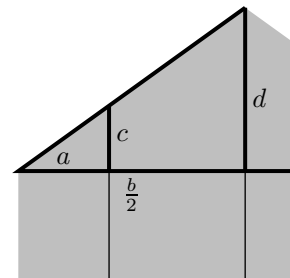
0.20 FLAECHEN-09

Im Dachgeschoss eines Hauses befindet sich ein Wohnraum. Eine Wandseite ist hier nebenstehend dargestellt. Der Raum hat eine Breite von $b = 4,5 \text{ m}$ und eine Länge von $l = 5,5 \text{ m}$. Im symmetrischen Raum befindet sich eine Dachschräge, wie nebenstehend dargestellt. Die Deckenhöhe h_1 an beiden Seiten beträgt $h_1 = 1,20 \text{ m}$. In der Mitte hat der Raum eine Höhe von $h_2 = 3 \text{ m}$.



Berechnen Sie die Wohnfläche dieses Raumes! Bei der Wohnflächenberechnung werden alle Bereiche der Bodenfläche unter einer Höhe von zwei Metern nur zur Hälfte berücksichtigt, die Bereiche unter einer Höhe von einem Meter gar nicht. (20 P.)

Lösung: Zunächst muss ermittelt werden, an welcher Stelle die Deckenhöhe genau 2 Meter beträgt. Wegen der Symmetrie genügt es, sich mit der linken Hälfte zu beschäftigen.



In der nebenstehenden Skizze sind Hilfslinien eingezeichnet. Die Hilfslinie, auf der c liegt, stellt die Stelle dar, an der die Deckenhöhe genau 2 Meter beträgt. Die mit a bezeichnete Strecke muss bestimmt werden. Das geht mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes. Die Strahlen sind die waagerechte Hilfslinie auf der Höhe h_1 sowie die Dachschräge, die Parallelen die beiden mit c und d bezeichneten Hilfslinien. Die Strecken c und d können mit Hilfe der Höhe h_1 berechnet werden.

$$c = 2 \text{ m} - h_1 = 2 \text{ m} - 1,2 \text{ m} = 0,8 \text{ m} \quad (2)$$

$$d = h_2 - h_1 = 3 \text{ m} - 1,2 \text{ m} = 1,8 \text{ m} \quad (2)$$

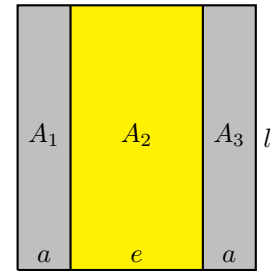
$$\frac{b}{2} = \frac{4,5 \text{ m}}{2} = 2,25 \text{ m} \quad (2)$$

$$\frac{\frac{a}{0,5b}}{\frac{a}{2,25 \text{ m}}} = \frac{\frac{c}{0,8 \text{ m}}}{\frac{d}{1,8 \text{ m}}} \quad | \cdot 2,25 \text{ m} \quad (3)$$

$$a = \frac{0,8 \text{ m}}{1,8 \text{ m}} \cdot 2,25 \text{ m} \quad (2)$$

$$a = 1 \text{ m} \quad (1)$$

In einem Streifen von jeweils $a = 1\text{ m}$ vom linken und rechten Rand wird somit die Grundfläche nur halb zur Wohnfläche gezählt. Diese Bereiche sind die Flächen A_1 und A_3 , die nebenstehend grau dargestellt sind. Die gelb dargestellte Fläche A_2 mit der Breite e in der Mitte wird voll gezählt.



Zunächst muss noch die Breite e berechnet werden.

$$e = b - 2a = 4,5\text{ m} - 2 \cdot 1\text{ m} = 2,5\text{ m} \quad (2)$$

Die Teilflächen A_1 bis A_3 können berechnet werden.

$$A_1 = A_3 = a \cdot l = 1\text{ m} \cdot 5,5\text{ m} = 5,5\text{ m}^2 \quad (2)$$

$$A_2 = e \cdot l = 2,5\text{ m} \cdot 5,5\text{ m} = 13,75\text{ m}^2 \quad (2)$$

Hiermit wird die Wohnfläche A_{Wohn} berechnet.

$$A_{Wohn} = 0,5 \cdot A_1 + A_2 + 0,5 \cdot A_3 = 0,5 \cdot 5,5\text{ m}^2 + 13,75\text{ m}^2 + 0,5 \cdot 5,5\text{ m}^2 = 19,25\text{ m}^2 \quad (2)$$

Die Wohnfläche des Raumes beträgt $19,25\text{ m}^2$.