

Musterlösungen Extremwertaufgaben

19. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1	EXTREM-01	2
2	EXTREM-02	5
3	EXTREM-03	8
4	EXTREM-04	11
5	EXTREM-05	14
6	EXTREM-06	17
7	EXTREM-07	20
8	EXTREM-08	23
9	EXTREM-09	25

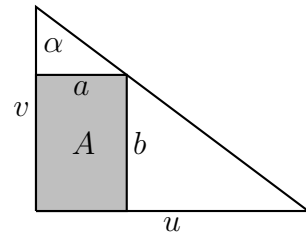
1 EXTREM-01

Ein Grundstück hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $u = 100\text{ m}$ und $v = 80\text{ m}$. Auf dem Grundstück soll ein Haus mit rechteckigem Grundriss gebaut werden.

a) Welche Längen müssen die Seiten a und b haben, damit die bebaute Fläche möglichst groß wird?

b) Wie groß ist damit die Grundfläche A des Hauses?

Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung!



Lösung (25)

Als erstes sucht man zweckmäßigerweise die Hauptbedingung. **Die Hauptbedingung stellt immer die Größe dar, die optimiert werden soll.** Das ist in unserem Fall die Rechteckfläche. Also lautet die Hauptbedingung:

$$\text{Hauptbedingung: } A = a \cdot b \quad (3)$$

Es gibt **zwei** Variablen, also benötigt man noch **eine** Nebenbedingung. Darin müssen natürlich die noch nicht verwendeten Angaben vorkommen, hier also die Längen der Katheten der Dreiecksfläche. Aus dem großen Werkzeugkasten der Mathematik bieten sich mindestens drei Möglichkeiten an:

1. Strahlensätze
2. Ähnliche Dreiecke
3. Winkelfunktionen

Alle führen sinngemäß auf etwa die gleiche Gleichung. Ich verwende als Beispiel die Trigonometrie. Der Winkel gegenüber von u und a sei α . Dann können wir den Tangens des Winkels α über zwei verschiedene Verhältnisse ausdrücken.

$$\tan \alpha = \frac{u}{v} = \frac{a}{v - b}$$

Der rechte Teil dieser Gleichung stellt die Nebenbedingung dar:

$$\text{Nebenbedingung: } \frac{u}{v} = \frac{a}{v - b} \quad (3)$$

Die Nebenbedingung muss nun nach einer beliebigen Variablen umgestellt und in die Hauptbedingung eingesetzt werden. Ich stelle sie nach a um. Wir erhalten dann A als Funktion von b .

Anschließend bilden wir noch die erste und zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}
\frac{u}{v} &= \frac{a}{v-b} \quad | \cdot (v-b) \\
\frac{u \cdot (v-b)}{v} &= a \quad | \text{ in HB einsetzen} \quad (2) \\
A(b) &= \frac{u \cdot (v-b)}{v} \cdot b \quad (2) \\
&= \frac{uvb - ub^2}{v} \\
&= \frac{uvb}{v} - \frac{ub^2}{v} \\
A(b) &= u \cdot b - \frac{u}{v} \cdot b^2 \quad (2) \\
A'(b) &= u - \frac{2u}{v} \cdot b \quad (2) \\
A''(b) &= -\frac{2u}{v} \quad (2)
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null und lösen die Gleichung nach b auf.

$$\begin{aligned}
u - \frac{2u}{v} \cdot b_E &= 0 \quad | + \frac{2u}{v} \cdot b \quad (1) \\
u &= \frac{2u}{v} \cdot b_E \quad | \cdot \frac{v}{2u} \\
\frac{uv}{2u} &= b_E \\
b_E &= \frac{1}{2}v \quad (1)
\end{aligned}$$

Damit haben wir einen **Kandidaten** für ein Maximum erhalten. Nun müssen wir noch prüfen, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt. Das geschieht am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung.

$$A''(b_E) = -\frac{2u}{v} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum} \quad (2)$$

Da u und v beide positiv sind, ist $-\frac{2u}{v}$ negativ, wir haben ein Maximum, wie gewünscht.

Was noch fehlt, ist die Variable a . Wir setzen den gefundenen Wert für b_E in die umgestellte Nebenbedingung ein.

$$a_E = \frac{u \cdot (v - b_E)}{v} = \frac{u \cdot (v - \frac{1}{2}v)}{v} = \frac{u \cdot \frac{1}{2}v}{v} = \frac{u \cdot v}{2v} = \frac{1}{2} \cdot u \quad (2)$$

Als letztes fehlen noch die konkreten Längen in Metern. Die gewinnen wir durch Einsetzen der bekannten Werte von u und v .

$$b_E = \frac{1}{2} \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 80 \text{ m} = 40 \text{ m} \quad (2)$$

$$a_E = \frac{1}{2} \cdot u = \frac{1}{2} \cdot 100 \text{ m} = 50 \text{ m} \quad (2)$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $a_E = 50 \text{ m} \quad b_E = 40 \text{ m}$

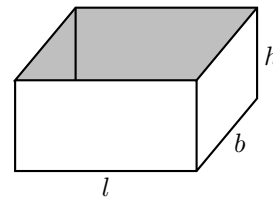
Zum Schluss ist noch die optimierte Fläche A gesucht. Die gewinnen wir durch Einsetzen der gefundenen Werte in die Hauptbedingung.

$$A_{max} = a_E \cdot b_E = 50 \text{ m} \cdot 40 \text{ m} = 2\,000 \text{ m}^2 \quad (2)$$

$$A_{max} = 2\,000 \text{ m}^2$$

2 EXTREM-02

Ein oben offener quaderförmiger Karton mit einer Breite von $b = 40\text{ cm}$ soll ein Fassungsvermögen von 32 Liter¹ haben. Welche Abmessungen (Länge l und Höhe h) müssen gewählt werden, damit der Karton möglichst leicht ist? Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung!



Lösung (25)

Bevor wir in die eigentliche Lösung einsteigen, benennen wir die relevanten Größen mit geeigneten Formelbuchstaben. Die Höhe des Kartons nennen wir h , die Seiten seiner Grundfläche a und b , wobei b für die bekannte Breite von 40 cm stehen soll.

Als nächstes sucht man zweckmäßigerweise die Hauptbedingung. **Die Hauptbedingung stellt immer die Größe dar, die optimiert werden soll.** Die Frage ist hier: „Welche ist das? Wann ist der Karton besonders leicht?“

Ein kurzes Nachdenken sollte eigentlich zu dem Ergebnis führen, dass das einen möglichst geringen Materialverbrauch bedeutet, also wenig Pappe für den Boden und die Seitenteile. Also ist in unserem Fall die Oberfläche des Kartons, also der Boden mit den vier Seitenwänden die zu minimierende Größe. Damit lautet die Hauptbedingung:

$$\text{Hauptbedingung: } A = \overbrace{a \cdot b}^{\text{Boden}} + \overbrace{2 \cdot a \cdot h}^{\text{Seitenwände}} + \overbrace{2 \cdot b \cdot h}^{\text{Front+Rückwand}} \quad (3)$$

Es gibt **zwei** Variablen (nämlich a und h), also benötigt man noch **eine** Nebenbedingung. Darin müssen natürlich die noch nicht verwendeten Angaben vorkommen, hier also die Angabe des Fassungsvermögens. Damit muss die Nebenbedingung ganz klar lauten:

$$\text{Nebenbedingung: } V = a \cdot b \cdot h \quad (3)$$

Die Nebenbedingung muss nun nach einer beliebigen Variablen umgestellt und in die Hauptbedingung eingesetzt werden. Hier ist es völlig gleichgültig, ob man sie nach a oder h umstellt. Beide kommen je zwei mal gleichartig in der Hauptbedingung vor. Willkürlich stelle ich sie nach a um.

$$\begin{aligned} V &= a \cdot b \cdot h \quad | : (b \cdot h) \\ \frac{V}{b \cdot h} &= a \quad (2) \end{aligned}$$

¹1 Liter = 1 Kubikdezimeter

Das Ergebnis setze ich in die Hauptbedingung ein und erhalte A als eine Funktion von h .

Nach dem Zusammenfassen steht h in einem Bruch im Nenner. Damit ich bequemer ableiten kann, wandle ich das in eine Potenz mit negativem Exponenten um. Anschließend bilde ich die erste und zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}
 A(h) &= a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h \\
 &= \frac{V}{b \cdot h} \cdot b + 2 \cdot \frac{V}{b \cdot h} \cdot h + 2 \cdot b \cdot h & (2) \\
 &= \frac{V}{h} + \frac{2V}{b} + 2b \cdot h \\
 A(h) &= V \cdot h^{-1} + \frac{2V}{b} + 2b \cdot h & (2) \\
 A'(h) &= -V \cdot h^{-2} + 2b & (2) \\
 A''(h) &= 2V \cdot h^{-3} & (2)
 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null, um mögliche Kandidaten für Minima zu ermitteln.

$$\begin{aligned}
 A'(h_E) &= 0 \\
 -V \cdot h_E^{-2} + 2b &= 0 & (1) \\
 -\frac{V}{h_E^2} + 2b &= 0 \quad | + \frac{V}{h_E^2} & (1) \\
 2b &= \frac{V}{h_E^2} \quad | \cdot h_E^2 \\
 2b \cdot h_E^2 &= V \quad | : 2b \\
 h_E^2 &= \frac{V}{2b} \quad | \sqrt{} \\
 h_E &= \sqrt{\frac{V}{2b}} & (2) \\
 h_E &= \sqrt{\frac{32 \text{ dm}^3}{2 \cdot 4 \text{ dm}}} \\
 h_E &= 2 \text{ dm} = 20 \text{ cm} & (1)
 \end{aligned}$$

Nun muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Tiefpunkt vorliegt. Dies kann am bequemsten mit der zweiten Ableitung gemacht werden.

$$A''(h_E) = 2V \cdot h_E^{-3} = \frac{2V}{h_E^3} = \frac{2 \cdot 32 \text{ dm}^3}{(2 \text{ dm})^3} = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt} \quad (2)$$

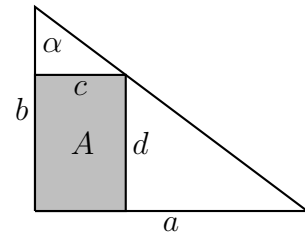
Nachdem jetzt klar ist, dass tatsächlich ein Tiefpunkt vorliegt, müssen nun alle noch fehlende Größen bestimmt werden. Nach der Aufgabenstellung ist das allerdings nur noch das Maß a . Zur Berechnung bietet sich die umgestellte Nebenbedingung an.

$$a_E = \frac{V}{b \cdot h_E} = \frac{32 \text{ dm}^3}{4 \text{ dm} \cdot 2 \text{ dm}} = 4 \text{ dm} = 40 \text{ cm} \quad (2)$$

Zusammengefasst: $a = 40 \text{ cm} \quad h = 20 \text{ cm}$

3 EXTREM-03

Auf dem Grundstück in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b soll ein Haus mit rechteckigen Grundriss mit den Seitenlängen c und d gebaut werden. Die Grundfläche A des Hauses soll möglichst groß werden.



Die Dreieckseiten betragen:

$a = 12$ m und

$b = 8$ m

Wie groß müssen die Abmessungen c und d des Hauses sein?

Wie groß ist damit die Grundfläche A des Hauses?

Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung!

Lösung (25)

Als erstes sucht man zweckmäßigerweise die Hauptbedingung. **Die Hauptbedingung stellt immer die Größe dar, die optimiert werden soll.** Das ist in unserem Fall die Rechteckfläche. Also lautet die Hauptbedingung:

$$\text{Hauptbedingung: } A = c \cdot d \quad (3)$$

Es gibt **zwei** Variablen, also benötigt man noch **eine** Nebenbedingung. Darin müssen natürlich die noch nicht verwendeten Angaben vorkommen, hier also die Längen der Katheten der Dreieckfläche. Aus dem großen Werkzeugkasten der Mathematik bieten sich mindestens drei Möglichkeiten an:

1. Strahlensätze
2. Ähnliche Dreiecke
3. Winkelfunktionen

Alle führen sinngemäß auf etwa die gleiche Gleichung. Ich verwende als Beispiel die Trigonometrie. Der Winkel gegenüber von a und c sei α . Dann können wir den Tangens des Winkels α über zwei verschiedene Verhältnisse ausdrücken.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{c}{b-d}$$

Der rechte Teil dieser Gleichung stellt die Nebenbedingung dar:

$$\text{Nebenbedingung: } \frac{a}{b} = \frac{c}{b-d} \quad (3)$$

Die Nebenbedingung muss nun nach einer beliebigen Variablen umgestellt und in die Hauptbedingung eingesetzt werden. Ich stelle sie nach c um. Wir erhalten dann A als Funktion von d .

Anschließend bilden wir noch die erste und zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{c}{b-d} \quad | \cdot (b-d) \\ \frac{a \cdot (b-d)}{b} &= c \quad | \text{ in HB einsetzen} \quad (2) \\ A(d) &= d \cdot \frac{a \cdot (b-d)}{b} \quad (2) \\ &= \frac{abd - ad^2}{b} \\ &= \frac{abd}{b} - \frac{ad^2}{b} \\ A(d) &= a \cdot d - \frac{a}{b} \cdot d^2 \quad (2) \\ A'(d) &= a - \frac{2a}{b} \cdot d \quad (2) \\ A''(d) &= -\frac{2a}{b} \quad (2)\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null und lösen die Gleichung nach d auf.

$$\begin{aligned}a - \frac{2a}{b} \cdot d_E &= 0 \quad | + \frac{2a}{b} \cdot d_E \quad (1) \\ a &= \frac{2a}{b} \cdot d_E \quad | \cdot \frac{b}{2a} \\ \frac{ab}{2a} &= d_E \\ d_E &= \frac{1}{2}b \quad (1)\end{aligned}$$

Damit haben wir einen **Kandidaten** für ein Maximum erhalten. Nun müssen wir noch prüfen, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt. Das geschieht am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung.

$$A''(d_E) = -\frac{2a}{b} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum} \quad (2)$$

Da a und b beide positiv sind, ist $-\frac{2a}{b}$ negativ, wir haben ein Maximum, wie gewünscht.

Was noch fehlt, ist die Variable c . Wir setzen den gefundenen Wert für d_E in die umgestellte Nebenbedingung ein.

$$c_E = \frac{a \cdot (b - d_E)}{b} = \frac{a \cdot (b - \frac{1}{2}b)}{b} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}b}{b} = \frac{a \cdot b}{2b} = \frac{1}{2} \cdot a \quad (2)$$

Als vorletztes fehlen noch die konkreten Längen in Metern. Die gewinnen wir durch Einsetzen der bekannten Werte von a und b .

$$c_E = \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 12 \text{ m} = 6 \text{ m} \quad (2)$$

$$d_E = \frac{1}{2} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ m} = 4 \text{ m} \quad (2)$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $c_E = 6 \text{ m} \quad d_E = 4 \text{ m}$

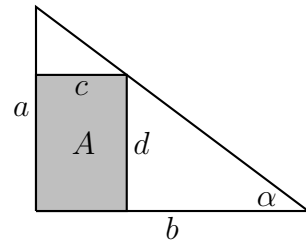
Zum Schluss ist noch die optimierte Fläche A gesucht. Die gewinnen wir durch Einsetzen der gefundenen Werte in die Hauptbedingung.

$$A_{max} = c_E \cdot d_E = 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 24 \text{ m}^2 \quad (2)$$

$$A_{max} = 24 \text{ m}^2$$

4 EXTREM-04

Auf dem Grundstück in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b soll ein Haus mit rechteckigen Grundriss mit den Seitenlängen c und d gebaut werden. Die Grundfläche A des Hauses soll möglichst groß werden.



Die Dreieckseiten betragen:

$a = 16$ m und

$b = 8$ m

Wie groß müssen die Abmessungen c und d des Hauses sein?

Wie groß ist damit die Grundfläche A des Hauses?

Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung!

Lösung (25)

Als erstes sucht man zweckmäßigerweise die Hauptbedingung. **Die Hauptbedingung stellt immer die Größe dar, die optimiert werden soll.** Das ist in unserem Fall die Rechteckfläche. Also lautet die Hauptbedingung:

$$\text{Hauptbedingung: } A = c \cdot d \quad (3)$$

Es gibt **zwei** Variablen, also benötigt man noch **eine** Nebenbedingung. Darin müssen natürlich die noch nicht verwendeten Angaben vorkommen, hier also die Längen der Katheten der Dreieckfläche. Aus dem großen Werkzeugkasten der Mathematik bieten sich mindestens drei Möglichkeiten an:

1. Strahlensätze
2. Ähnliche Dreiecke
3. Winkelfunktionen

Alle führen sinngemäß auf etwa die gleiche Gleichung. Ich verwende als Beispiel die Trigonometrie. Der Winkel gegenüber von a und d sei α . Dann können wir den Tangens des Winkels α über zwei verschiedene Verhältnisse ausdrücken.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{d}{b - c}$$

Der rechte Teil dieser Gleichung stellt die Nebenbedingung dar:

$$\text{Nebenbedingung: } \frac{a}{b} = \frac{d}{b - c} \quad (3)$$

Die Nebenbedingung muss nun nach einer beliebigen Variablen umgestellt und in die Hauptbedingung eingesetzt werden. Ich stelle sie nach d um. Wir erhalten dann A als Funktion von c .

Anschließend bilden wir noch die erste und zweite Ableitung.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{d}{b-c} \quad | \cdot (b-c) \\ \frac{a \cdot (b-c)}{b} &= d \quad | \text{ in HB einsetzen } \quad (2) \\ A(c) &= c \cdot \frac{a \cdot (b-c)}{b} \quad (2) \\ &= \frac{abc - ac^2}{b} \\ &= \frac{abc}{b} - \frac{ac^2}{b} \\ A(c) &= a \cdot c - \frac{a}{b} \cdot c^2 \quad (2) \\ A'(c) &= a - \frac{2a}{b} \cdot c \quad (2) \\ A''(c) &= -\frac{2a}{b} \quad (2)\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die erste Ableitung gleich Null und lösen die Gleichung nach c auf.

$$\begin{aligned}a - \frac{2a}{b} \cdot c_E &= 0 \quad | + \frac{2a}{b} \cdot c_E \quad (1) \\ a &= \frac{2a}{b} \cdot c_E \quad | \cdot \frac{b}{2a} \\ \frac{ab}{2a} &= c_E \\ c_E &= \frac{1}{2}b \quad (1)\end{aligned}$$

Damit haben wir einen **Kandidaten** für ein Maximum erhalten. Nun müssen wir noch prüfen, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt. Das geschieht am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung.

$$A''(c_E) = -\frac{2a}{b} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum} \quad (2)$$

Da a und b beide positiv sind, ist $-\frac{2a}{b}$ negativ, wir haben ein Maximum, wie gewünscht.

Was noch fehlt, ist die Variable d . Wir setzen den gefundenen Wert für c_E in die umgestellte Nebenbedingung ein.

$$d_E = \frac{a \cdot (b - c_E)}{b} = \frac{a \cdot (b - \frac{1}{2}b)}{b} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}b}{b} = \frac{a \cdot b}{2b} = \frac{1}{2} \cdot a \quad (2)$$

Als vorletztes fehlen noch die konkreten Längen in Metern. Die gewinnen wir durch Einsetzen der bekannten Werte von a und b .

$$c_E = \frac{1}{2} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ m} = 4 \text{ m} \quad (1)$$

$$d_E = \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 16 \text{ m} = 8 \text{ m} \quad (1)$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $c_E = 4 \text{ m} \quad d_E = 8 \text{ m}$

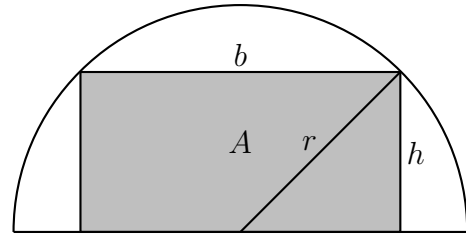
Zum Schluss ist noch die optimierte Fläche A gesucht. Die gewinnen wir durch Einsetzen der gefundenen Werte in die Hauptbedingung.

$$A_{max} = c_E \cdot d_E = 4 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} = 32 \text{ m}^2 \quad (1)$$

$$A_{max} = 32 \text{ m}^2$$

5 EXTREM-05

In einen halbkreisförmigen Wanddurchbruch soll ein rechteckiges Fenster mit möglichst großem Flächeninhalt A eingesetzt werden. Bestimmen Sie die Höhe h und die Breite b des Fensters, wenn der Bogenradius r bekannt ist! Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung!



Lösung

Als erstes sucht man zweckmäßigerweise die Hauptbedingung. **Die Hauptbedingung stellt immer die Größe dar, die optimiert werden soll.** Das ist in unserem Fall die Rechteckfläche. Also lautet die Hauptbedingung:

$$\text{Hauptbedingung: } A = b \cdot h$$

Es gibt **zwei** Variablen, also benötigt man noch **eine** Nebenbedingung. Darin müssen natürlich die noch nicht verwendeten Angaben vorkommen, hier also der Bogenradius. Dazu sehen wir uns das Dreieck auf der rechten Seite an, das links durch den Bogenradius r , rechts durch die Rechteckhöhe h und unten durch die halbe Rechteckbreite $\frac{b}{2}$ begrenzt ist. Da dieses Dreieck rechtwinklig ist, gilt in ihm der Satz des **Pythagoras**. Der liefert uns die Nebenbedingung.

$$\text{Nebenbedingung: } h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2$$

Die Nebenbedingung kann nach b oder nach h umgestellt werden. Welche Variable man auswählt, ist im Prinzip gleichgültig. Ich wähle b , weil dann keine Brüche übrig bleiben.

$$\begin{aligned} h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= r^2 \\ h^2 + \frac{b^2}{4} &= r^2 \quad | \cdot 4 \\ 4h^2 + b^2 &= 4r^2 \quad | - 4h^2 \\ b^2 &= 4r^2 - 4h^2 \quad | \sqrt{} \\ b &= \pm \sqrt{4r^2 - 4h^2} \end{aligned}$$

Da b auf jeden Fall positiv sein muss, kann man die negative Wurzel vernachlässigen. Es bleibt also übrig:

$$b = \sqrt{4r^2 - 4h^2}$$

Das setzen wir nun in die Hauptbedingung ein und erhalten den Flächeninhalt A als Funktion von h . Anschließend bilden wir noch (mit Hilfe der Kettenregel) die Ableitung.

$$\begin{aligned}
 A &= b \cdot h \\
 A(h) &= \sqrt{4r^2 - 4h^2} \cdot h \\
 A(h) &= \sqrt{(4r^2 - 4h^2) \cdot h^2} \\
 A(h) &= \sqrt{4r^2 h^2 - 4h^4} \\
 A(h) &= \left(4r^2 h^2 - 4h^4\right)^{\frac{1}{2}} \\
 A'(h) &= \frac{1}{2} \left(4r^2 h^2 - 4h^4\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (8r^2 h - 16h^3) \\
 A'(h) &= \frac{8r^2 h - 16h^3}{2 \left(4r^2 h^2 - 4h^4\right)^{\frac{1}{2}}} \\
 A'(h) &= \frac{8r^2 h - 16h^3}{2\sqrt{4r^2 h^2 - 4h^4}}
 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Wir setzen also die Ableitung gleich Null und lösen die Gleichung nach h auf.

$$\begin{aligned}
 \frac{8r^2 h - 16h^3}{2\sqrt{4r^2 h^2 - 4h^4}} &= 0 \quad | \cdot 2\sqrt{4r^2 h^2 - 4h^4} \\
 8r^2 h - 16h^3 &= 0 \\
 (8r^2 - 16h^2) \cdot h &= 0
 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Aus dem rechten Faktor ergibt sich:

$$h_1 = 0$$

Aus praktischen Gründen entfällt diese Lösung. Aus dem anderen Faktor ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 8r^2 - 16h^2 &= 0 \quad | + 16h^2 \\
 8r^2 &= 16h^2 \quad | : 16 \\
 h^2 &= \frac{1}{2} r^2 \quad | \sqrt{} \\
 h &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} r} \\
 h &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} r
 \end{aligned}$$

Aus praktischen Gründen entfällt die negative Lösung. Es bleibt also:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}r$$

Als nächstes muss geprüft werden, ob es sich – wie gewünscht – um ein Maximum handelt. Weil die zweite Ableitung etwas mühsam zu bilden ist, wähle ich hierfür das Kriterium mit dem Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung aus. Als Nachbarwerte zu $\frac{1}{\sqrt{2}}r \approx 0,707r$ wähle ich $\frac{1}{2}r = 0,5r$ und $\frac{3}{4}r = 0,75r$ aus.

$$\begin{aligned} A' \left(\frac{1}{2}r \right) &= \frac{8r^2 \cdot \frac{1}{2}r - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}r \right)^3}{2\sqrt{4r^2 \cdot \left(\frac{1}{2}r \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}r \right)^4}} \\ &= \frac{4r^3 - 2r^3}{2\sqrt{r^4 - \frac{1}{4}r^4}} \\ &= \frac{2r^3}{2\sqrt{\frac{3}{4}r^4}} \\ &= \frac{2r}{\sqrt{3}} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A' \left(\frac{3}{4}r \right) &= \frac{8r^2 \cdot \frac{3}{4}r - 16 \cdot \left(\frac{3}{4}r \right)^3}{2\sqrt{4r^2 \cdot \left(\frac{3}{4}r \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{4}r \right)^4}} \\ &= \frac{6r^3 - \frac{27}{4}r^3}{2\sqrt{\frac{9}{4}r^4 - \frac{81}{64}r^4}} \\ &= \frac{-\frac{3}{4}r^3}{2\sqrt{\frac{63}{64}r^4}} \\ &= \frac{-3r}{\sqrt{63}} < 0 \end{aligned}$$

Es findet ein Vorzeichenwechsel von $A'(h)$ von $+$ nach $-$ statt, also liegt ein **Maximum** vor.

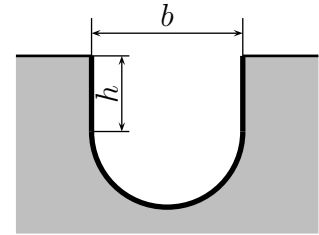
Es fehlt nur noch die Breite b .

$$b = \sqrt{4r^2 - 4h^2} = \sqrt{4r^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}r \right)^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$$

6 EXTREM-06

Ein Kanal soll einen halbkreisförmigen Boden erhalten. Die Kanalwände verlaufen senkrecht.

a) Wie groß müssen Breite b und Höhe h (Höhe der geraden Wände) des Kanals sein, damit bei gegebenem Kanal-Querschnitt A die benetzte Oberfläche der Kanalwandung möglichst klein wird? Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung!



b) Interpretieren Sie das Ergebnis!

Lösung (25)

Optimiert werden soll die *benetzte Fläche*. In der Skizze ist das die Umfangslänge, die ich l nenne. Sie besteht aus den beiden geraden Wänden sowie dem halbkreisförmigen Boden. Sie stellt also die **Hauptbedingung** dar. Die **Nebenbedingung** erhalten wir aus dem gegebenen Querschnitt A mit der Rechteck- und der Halbkreisfläche.

$$\text{Hauptbedingung: } l = 2h + \frac{\pi}{2} \cdot b \quad (3)$$

$$\text{Nebenbedingung: } A = h \cdot b + \frac{\pi}{8} \cdot b^2 \quad (3)$$

Die Nebenbedingung ist einfacher nach h umzustellen, als nach b .

$$\begin{aligned} A &= h \cdot b + \frac{\pi}{8} \cdot b^2 \quad | - \frac{\pi}{8} \cdot b^2 \\ A - \frac{\pi}{8} \cdot b^2 &= h \cdot b \quad | : b \\ \frac{A}{b} - \frac{\pi}{8} \cdot b &= h \quad (2) \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die HB eingesetzt. Wir erhalten l als Funktion von b :

$$\begin{aligned} l(b) &= 2 \cdot \left(\frac{A}{b} - \frac{\pi}{8} \cdot b \right) + \frac{\pi}{2} \cdot b \quad (2) \\ l(b) &= \frac{2A}{b} - \frac{\pi}{4} \cdot b + \frac{\pi}{2} \cdot b \\ l(b) &= \frac{2A}{b} + \frac{\pi}{4} \cdot b \quad (2) \end{aligned}$$

Damit die Ableitung bequemer (ohne Quotientenregel) vorgenommen werden kann, wandle ich den Nenner in eine negative Potenz:

$$\begin{aligned}
 l(b) &= \frac{2A}{b} + \frac{\pi}{4} \cdot b \\
 l(b) &= 2A \cdot b^{-1} + \frac{\pi}{4} \cdot b \\
 l'(b) &= -2A \cdot b^{-2} + \frac{\pi}{4} \\
 l'(b) &= -\frac{2A}{b^2} + \frac{\pi}{4} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Ein Minimum kann nur vorliegen, wenn die erste Ableitung Null wird.

$$\begin{aligned}
 l'(b_E) &= 0 \\
 -\frac{2A}{b_E^2} + \frac{\pi}{4} &= 0 & | + \frac{2A}{b_E^2} \\
 \frac{\pi}{4} &= \frac{2A}{b_E^2} & | \cdot \frac{b_E^2 \cdot 4}{\pi} \\
 b_E^2 &= \frac{8A}{\pi} & | \sqrt{} \\
 b_{E1/2} &= \pm \sqrt{\frac{8A}{\pi}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Da eine negative Länge nicht möglich ist, entfällt die negative Lösung. Es bleibt nur die Lösung: (1)

$$b_E = \sqrt{\frac{8A}{\pi}}$$

Natürlich muss noch geprüft werden, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt. Dies prüfe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}
 l'(b) &= -2A \cdot b^{-2} + \frac{\pi}{4} \\
 l''(b) &= 4A \cdot b^{-3} \\
 l''(b) &= \frac{4A}{b^3} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Da sowohl A als auch b **positiv** sind, ist für $b = b_E$ auch $l''(b_E) > 0$. Das bedeutet, es liegt tatsächlich ein Minimum vor. (1)

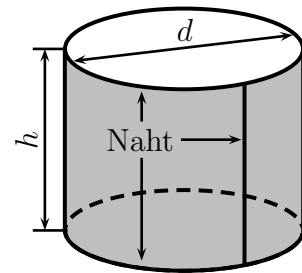
Nun muss noch die Höhe h bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 h_E &= \frac{A}{b_E} - \frac{\pi}{8} \cdot b_E \\
 &= \frac{A}{\sqrt{\frac{8A}{\pi}}} - \frac{\pi}{8} \cdot \sqrt{\frac{8A}{\pi}} \\
 &= \sqrt{\frac{\frac{A^2}{8A}}{\frac{\pi}{\pi}}} - \sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{8^2} \cdot \frac{8A}{\pi}}{\frac{\pi}{\pi}}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi \cdot A^2}{8A}} - \sqrt{\frac{\pi \cdot A}{8}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi \cdot A}{8}} - \sqrt{\frac{\pi \cdot A}{8}} \\
 h_E &= 0 \tag{3}
 \end{aligned}$$

Der Kanal ist also genau dann optimal, wenn er einen **reinen Halbkreis ohne senkrechte Wände** darstellt. (1)

7 EXTREM-07

Es sollen zylindrische Dosen mit Boden und Deckel für ein Volumen von $V = 1$ Liter hergestellt werden. (Siehe nebenstehende Skizze.) Wie groß sind der **Durchmesser d** und die **Höhe h** zu wählen, damit die gesamte Nahtlänge – bestehend aus der Bördelnaht an Deckel und Boden sowie einer Naht an der Dosenseite – möglichst klein wird?



Lösung:

Da die Nahtlänge optimiert werden soll, stellt diese auch die **Hauptbedingung** dar. Sie besteht aus zwei Kreisumfängen und einmal der Höhe.

$$\text{HB: } l = 2 \cdot \underbrace{\pi \cdot d}_{\text{Kreis}} + h$$

Die **Nebenbedingung** wird aus dem bekannten Volumen gewonnen.

$$\text{NB: } V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Es ist einfacher, die NB nach h umzustellen, als nach d . Anderenfalls erhielte man eine Wurzel.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \quad | \cdot \frac{4}{\pi \cdot d^2} \\ \frac{4V}{\pi \cdot d^2} &= h \end{aligned}$$

Dieser Term für h wird in die HB eingesetzt. Anschließend wird die dabei entstandene Funktion noch etwas umgestellt (damit man sie bequemer ableiten kann), dann wird sie abgeleitet und $= 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned}
l &= 2 \cdot \pi \cdot d + h \\
l(d) &= 2 \cdot \pi \cdot d + \frac{4V}{\pi \cdot d^2} \\
l(d) &= 2 \cdot \pi \cdot d + \frac{4V}{\pi} \cdot d^{-2} \\
l'(d) &= 2 \cdot \pi - \frac{8V}{\pi} \cdot d^{-3} \\
l'(d) &= 2 \cdot \pi - \frac{8V}{\pi \cdot d^3} \\
0 &= 2 \cdot \pi - \frac{8V}{\pi \cdot d_E^3} & | \cdot \pi \cdot d_E^3 \\
0 &= 2 \cdot \pi^2 \cdot d_E^3 - 8V & | - 2\pi^2 \cdot d_E^3 \\
-2\pi^2 \cdot d_E^3 &= -8V & | : (-2\pi^2) \\
d_E^3 &= \frac{8V}{2\pi^2} \\
d_E^3 &= \frac{4V}{\pi^2} & | \sqrt[3]{} \\
d_E &= \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi^2}}
\end{aligned}$$

Nun muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt. Dies kann beispielsweise mithilfe der zweiten Ableitung gemacht werden.

$$\begin{aligned}
l'(d) &= 2 \cdot \pi - \frac{8V}{\pi} \cdot d^{-3} \\
l''(d) &= \frac{24V}{\pi} \cdot d^{-4} \\
l''(d) &= \frac{24V}{\pi \cdot d^4}
\end{aligned}$$

Nun kann der gefundene Wert für d_E eingesetzt werden. Das führe ich aber nicht explizit durch. Folgende Überlegungen reichen aus:

Da d_E ein **positiver** Wert ist, ist auch d_E^2 positiv. Auch A und π sind positiv, also auch $l''(d_E) = \frac{24V}{\pi \cdot d_E^4}$. Da $l''(d_E) > 0$ ist, liegt – wie erhofft – bei $d_E = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi^2}}$ ein **Minimum** vor.

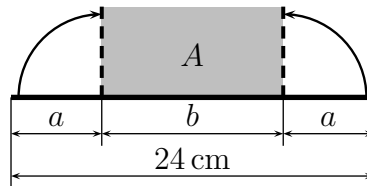
Was noch fehlt, ist die zugehörige Höhe h_E .

$$\begin{aligned}
 h_E &= \frac{4V}{\pi \cdot d_E^2} \\
 &= \frac{4V}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi^2}} \right)^2} \\
 &= \frac{4V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{4V}{\pi^2} \right)^2}} \\
 &= \frac{4V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{16V^2}{\pi^4}}} \\
 &= \frac{4V}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3 \cdot 16V^2}{\pi^4}}} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{\frac{16V^2}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{64V^3}{\pi}}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{16V^2}{64V^3 \cdot \pi}} \\
 h_E &= \sqrt[3]{\frac{16V^2}{4V \cdot \pi}}
 \end{aligned}$$

Zum Schluss kann für das Volumen noch der gegebene Wert von 1 Liter eingesetzt werden. Damit erhält man dann: $d_E \approx 0,74 \text{ dm}$ und $h_E \approx 2,325 \text{ dm}$

8 EXTREM-08

Ein 24 cm breiter Blechstreifen soll an zwei Seiten so hochgebogen werden, dass dabei eine U-förmige Dachrinne entsteht. Die Dachrinne soll dabei eine möglichst große Querschnittfläche A erhalten. Die hochgebogenen Teilstreifen haben die Breite a , der „Boden“ der Dachrinne hat die Breite b . Welche Maße müssen für a und b gewählt werden? Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differenzialrechnung! (25 P.)



Lösung: Beginnen wir mit der **Hauptbedingung**. Die Hauptbedingung stellt immer die Größe dar, die optimiert werden soll. Hier soll der **Querschnitt** maximal werden. Das ist eine Fläche A .

$$\text{HB: } A = a \cdot b \quad (3)$$

In der HB sind insgesamt **zwei** Variablen enthalten (nämlich a und b). Wir benötigen daher **eine** Nebenbedingung.

Bisher noch nicht ausgenutzt haben wir die Angabe zur gesamten Breite des Blechstreifens. Diese Angabe verwende ich für die **Nebenbedingung**.

$$\text{NB: } a + b + a = 24 \text{ cm} \quad (3)$$

Die NB kann bequem nach b umgestellt werden.

$$\begin{aligned} a + b + a &= 24 \text{ cm} & | - 2a \\ b &= 24 \text{ cm} - 2a \end{aligned} \quad (3)$$

Die umgestellte NB wird in die HB eingesetzt. Man erhält A als eine Funktion von a .

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b \\ A(a) &= a \cdot (24 \text{ cm} - 2a) \\ A(a) &= 24 \text{ cm} \cdot a - 2a^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Diese Funktion wird nach a abgeleitet und gleich Null gesetzt. So erhält man Kandidaten für ein Maximum.

$$\begin{aligned} A(a) &= 24 \text{ cm} \cdot a - 2a^2 \\ A'(a) &= 24 \text{ cm} - 4a & (3) \\ 0 &= 24 \text{ cm} - 4a_E & | + 4a_E \\ 4a_E &= 24 \text{ cm} & | : 4 \\ a_E &= 6 \text{ cm} & (3) \end{aligned}$$

Zur Prüfung, ob wirklich ein Maximum vorliegt, bilde ich die zweite Ableitung.

$$\begin{aligned} A'(a) &= 24 \text{ cm} - 4a \\ A''(a) &= -4 \end{aligned} \quad (3)$$

Da die zweite Ableitung stets **negativ** ist, muss der berechnete Wert $a_E = 6 \text{ cm}$ zu einem **Maximum** gehören. (2)

Was noch fehlt, ist die Breite b der Rinne. Mit der umgestellten Nebenbedingung wird dieser Wert am bequemsten berechnet.

$$b_E = 24 \text{ cm} - 2a = 24 \text{ cm} - 2 \cdot 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm} \quad (2)$$

9 EXTREM-09

Eine alte Gebührenordnung für Postpäckchen besagt, dass die Summe aus Länge, Höhe und Breite eines Päckchens maximal 90 Zentimeter betragen darf. Für welche Maße hat das Päckchen das maximale Volumen, wenn die Länge gleich der dreifachen Breite betragen soll?

Lösung: Folgende Formelzeichen werden verwendet:

l für die **L**änge

h für die **H**öhe

b für die **B**reite

V für das Volumen

$$\text{HB :} \quad V = l \cdot h \cdot b$$

$$\text{NB}_1 : \quad l + b + h = 90 \text{ cm}$$

$$\text{NB}_2 : \quad l = 3 \cdot b$$

NB_2 wird in NB_1 eingesetzt, die NB_1 wird nach h umgestellt:

$$\begin{aligned} l + b + h &= 90 \text{ cm} \\ 3b + b + h &= 90 \text{ cm} \\ 4b + h &= 90 \text{ cm} \quad | - 4b \\ h &= 90 \text{ cm} - 4b \end{aligned}$$

NB_2 und die umgestellte NB_1 werden in die HB eingesetzt. Wir erhalten die Volumenfunktion $V(b)$.

$$\begin{aligned} V &= l \cdot h \cdot b \\ V &= 3b \cdot (90 \text{ cm} - 4b) \cdot b \\ V(b) &= 3b^2 \cdot 90 \text{ cm} - 12b^3 \\ V(b) &= b^2 \cdot 270 \text{ cm} - 12b^3 \end{aligned}$$

Um ein Maximum zu finden, wird die Ableitung gebildet und gleich 0 gesetzt.

$$\begin{aligned} V(b) &= b^2 \cdot 270 \text{ cm} - 12b^3 \\ V'(b) &= b \cdot 540 \text{ cm} - 36b^2 \\ V'(b_E) &= 0 \\ b_E \cdot 540 \text{ cm} - 36b_E^2 &= 0 \quad | : (-36) \\ b_E^2 - b_E \cdot 15 \text{ cm} &= 0 \quad | b_E \text{ ausklammern} \\ b_E \cdot (b_E - 15 \text{ cm}) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

$$\begin{aligned} b_{E1} &= 0 \\ b_{E2} - 15 \text{ cm} &= 0 \quad | + 15 \text{ cm} \\ b_{E2} &= 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

Der Wert $b_{E1} = 0$ entfällt aus logischen Gründen. Z.B. mit der zweiten Ableitung kann geprüft werden, ob tatsächlich bei $x_{E2} = 15 \text{ cm}$ ein Maximum vorliegt.