

Musterlösungen der Aufgaben unter DIFFRECH.WT

Inhaltsverzeichnis

0.1	DIFFRECH-01	3
0.2	DIFFRECH-02	5
0.3	DIFFRECH-03	7
0.4	DIFFRECH-04	13
0.5	DIFFRECH-05	19
0.6	DIFFRECH-06	25
0.7	DIFFRECH-07	31
0.8	DIFFRECH-07a	34
0.9	DIFFRECH-08	37
0.10	DIFFRECH-09	38
0.11	DIFFRECH-10	39
0.12	DIFFRECH-11	41
0.13	DIFFRECH-12	43
0.14	DIFFRECH-13	45
0.15	DIFFRECH-14	48
0.16	DIFFRECH-15	50
0.17	DIFFRECH-16	53
0.18	DIFFRECH-17a	56
0.19	DIFFRECH-17b	56
0.20	DIFFRECH-17c	57
0.21	DIFFRECH-17d	57
0.22	DIFFRECH-17e	58
0.23	DIFFRECH-17f	59
0.24	DIFFRECH-18a	60
0.25	DIFFRECH-18b	60
0.26	DIFFRECH-18c	61
0.27	DIFFRECH-18d	61
0.28	DIFFRECH-18e	62
0.29	DIFFRECH-19a	63
0.30	DIFFRECH-19b	63
0.31	DIFFRECH-19c	64
0.32	DIFFRECH-19d	64
0.33	DIFFRECH-20a	65
0.34	DIFFRECH-20b	65
0.35	DIFFRECH-20c	66
0.36	DIFFRECH-20d	66
0.37	DIFFRECH-20e	67
0.38	DIFFRECH-21a	68
0.39	DIFFRECH-21b	69

0.40	DIFFRECH-21c	70
0.41	DIFFRECH-21d	71
0.42	DIFFRECH-21e	73
0.43	DIFFRECH-21f	75
0.44	DIFFRECH-22a	78
0.45	DIFFRECH-22b	80
0.46	DIFFRECH-22c	82
0.47	DIFFRECH-22d	83
0.48	DIFFRECH-23	84
0.49	DIFFRECH-24	87
0.50	DIFFRECH-25a	90
0.51	DIFFRECH-25b	92
0.52	DIFFRECH-26	94
0.53	DIFFRECH-27	95
0.54	DIFFRECH-28	96
0.55	DIFFRECH-29	98
0.56	DIFFRECH-30	101
0.57	DIFFRECH-31	103
0.58	DIFFRECH-32	107
0.59	DIFFRECH-33	110
0.60	DIFFRECH-34	112
0.61	DIFFRECH-35	115
0.62	DIFFRECH-36	116

0.1 DIFFRECH-01

Bestimmen Sie **mit Hilfe des Differenzenquotienten** die Ableitung der nachfolgenden Funktion!

$$f(x) = 2x \cdot (4x - 3) + 5$$

Lösung 1: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = 2x \cdot (4x - 3) + 5 = 8x^2 - 6x + 5 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten gemacht werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(8(x+h)^2 - 6(x+h) + 5) - (8x^2 - 6x + 5)}{h} \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8(x^2 + 2xh + h^2) - 6x - 6h + 5 - 8x^2 + 6x - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8x^2 + 16xh + 8h^2 - 6x - 6h + 5 - 8x^2 + 6x - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16xh + 8h^2 - 6h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (16x + 8h - 6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (16x + 8h - 6) \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 16x + \lim_{h \rightarrow 0} 8h - \lim_{h \rightarrow 0} 6 \\ &= 16x + 0 - 6 \\ f'(x) &= 16x - 6 \quad (5) \end{aligned}$$

Lösung 2: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = 2x \cdot (4x - 3) + 5 = 8x^2 - 6x + 5 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten gemacht werden, zunächst für die Sekantensteigung m_S .

$$\begin{aligned}
m_S &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2) \\
&= \frac{\left(8(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 5\right) - (8x^2 - 6x + 5)}{\Delta x} \quad (5) \\
&= \frac{8(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 6x - 6\Delta x + 5 - 8x^2 + 6x - 5}{\Delta x} \\
&= \frac{8x^2 + 16x\Delta x + 8\Delta x^2 - 6x - 6\Delta x + 5 - 8x^2 + 6x - 5}{\Delta x} \\
&= \frac{16x\Delta x + 8\Delta x^2 - 6\Delta x}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x \cdot (16x + 8\Delta x - 6)}{\Delta x} \\
m_S &= 16x + 8\Delta x - 6 \quad (5)
\end{aligned}$$

Jetzt kommt die Tangentensteigung als Grenzwertübergang mit $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
m_T &= 16x + 0 - 6 \\
f'(x) &= 16x - 6 \quad (5)
\end{aligned}$$

0.2 DIFFRECH-02

Berechnen Sie **mit Hilfe des Differenzenquotienten** die Ableitung der nachfolgenden Funktion!

$$f(x) = 4x \cdot (2x - 5) - 3$$

Lösung 1: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = 4x \cdot (2x - 5) - 3 = 8x^2 - 20x - 3 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten gemacht werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(8(x+h)^2 - 20(x+h) - 3\right) - (8x^2 - 20x - 3)}{h} \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8(x^2 + 2xh + h^2) - 20x - 20h - 3 - 8x^2 + 20x + 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8x^2 + 16xh + 8h^2 - 20x - 20h - 3 - 8x^2 + 20x + 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16xh + 8h^2 - 20h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (16x + 8h - 20)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (16x + 8h - 20) \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 16x + \lim_{h \rightarrow 0} 8h - \lim_{h \rightarrow 0} 20 \\ &= 16x + 0 - 20 \\ f'(x) &= 16x - 20 \quad (5) \end{aligned}$$

Lösung 2: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = 4x \cdot (2x - 5) - 3 = 8x^2 - 20x - 3 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten für die Sekantensteigung gemacht werden.

$$\begin{aligned}
m_S &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} & (2) \\
&= \frac{\left(8(x + \Delta x)^2 - 20(x + \Delta x) - 3\right) - (8x^2 - 20x - 3)}{h} & (5) \\
&= \frac{8(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 20x - 20\Delta x - 3 - 8x^2 + 20x + 3}{\Delta x} \\
&= \frac{8x^2 + 16x\Delta x + 8\Delta x^2 - 20x - 20\Delta x - 3 - 8x^2 + 20x + 3}{\Delta x} \\
&= \frac{16x\Delta x + 8\Delta x^2 - 20\Delta x}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x \cdot (16x + 8\Delta x - 20)}{\Delta x} \\
m_S &= 16x + 8\Delta x - 20 & (5)
\end{aligned}$$

Der Grenzwertübergang zur Tangentensteigung mit $\Delta x \rightarrow 0$ wird gemacht:

$$\begin{aligned}
m_T &= 16x + 8 \cdot 0 - 20 \\
f'(x) &= 16x - 20 & (5)
\end{aligned}$$

0.3 DIFFRECH-03

Geben Sie die erste und zweite Ableitung der Funktionen an!

a)

$$f(x) = 3x^5 + 2x^3 - e^x + 3e^2$$

b)

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

c)

$$f(x) = (2x - 4)^5$$

d)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 2}$$

e)

$$f(x) = 3x \cdot e^{2x}$$

f)

$$f(x) = e^x \cdot \sin 2x$$

g)

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

Lösung:

a) Lösung mit Summenregel, Potenzfunktion, e -Funktion.

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^5 + 2x^3 - e^x + 3e^2 \\f'(x) &= 15x^4 + 6x^2 - e^x \\f''(x) &= 60x^3 + 12x - e^x\end{aligned}$$

b) Zur Lösung formt man den Bruch in der Funktion zweckmäßigerweise in die Potenzschreibweise um.

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1}$$

Jetzt kann die Funktion mit Summenregel und der Potenzfunktion als Grundfunktion abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - x^{-1} \\f'(x) &= 2x + x^{-2} = 2x + \frac{1}{x^2} \quad (5) \\f''(x) &= 2 - 2x^{-3} = 2 - \frac{2}{x^3} \quad (5)\end{aligned}$$

c) Die Ableitung erfolgt zweckmäßigerweise mit der Kettenregel.

$$f(x) = (2x - 4)^5$$

Wir bilden innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 4 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = g^5 &\Rightarrow f'(g) = 5g^4\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich die 1. Ableitung:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 5g^4 \cdot 2 = 10(2x - 4)^4 \quad (5)$$

Die zweite Ableitung wird wieder mit der Kettenregel bestimmt. Die innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen werden aufgestellt:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 4 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = 10g^4 &\Rightarrow f'(g) = 40g^3\end{aligned}$$

Damit kann die 2. Ableitung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}f''(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\&= 40g^3 \cdot 2 \\&= 40 \cdot (2x - 4)^3 \cdot 2 \\f''(x) &= 80 \cdot (2x - 4)^3 \quad (5)\end{aligned}$$

d) Es handelt sich um einen Bruch; daher muss die Quotientenregel verwendet werden.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 2}$$

Ich schreibe zunächst Zähler- und Nennerfunktion auf sowie deren Ableitungen.

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - x - 4 &\Rightarrow u'(x) &= 2x - 1 \\ v(x) &= x - 2 &\Rightarrow v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse setzen wir ein und bestimmen $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x - 1) \cdot (x - 2) - (x^2 - x - 4) \cdot 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 + x + 4}{(x - 2)^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 4x + 6}{(x - 2)^2} \quad (5) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung schreibe ich wieder die Zähler- und Nennerfunktion sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - 4x + 6 &\Rightarrow u'(x) &= 2x - 4 \\ v(x) &= (x - 2)^2 &\Rightarrow v'(x) &= \dots \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $v'(x)$ wird die Kettenregel benötigt. Die zugehörige Rechnung führe ich in einer weiteren Nebenrechnung durch.

$$\begin{aligned} g(x) &= x - 2 &\Rightarrow g'(x) &= 1 \\ v(g) &= g^2 &\Rightarrow v'(g) &= 2g \end{aligned}$$

Damit bestimme ich mit der Kettenregel $v'(x)$.

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot 1 = 2 \cdot (x - 2)$$

Jetzt kann die Quotientenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
 &= \frac{(2x-4) \cdot (x-2)^2 - (x^2-4x+6) \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4} \\
 &= \frac{(x-2) \cdot \left((2x-4) \cdot (x-2) - (x^2-4x+6) \cdot 2 \right)}{(x-2)^4} \\
 &= \frac{(2x-4) \cdot (x-2) - (x^2-4x+6) \cdot 2}{(x-2)^3} \\
 &= \frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x-12}{(x-2)^3} \\
 f''(x) &= -\frac{4}{(x-2)^3} \quad (5)
 \end{aligned}$$

e) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = 3x \cdot e^{2x}$$

Ich schreibe die Faktoren sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned}
 u(x) = 3x &\Rightarrow u'(x) = 3 \\
 v(x) = e^{2x} &\Rightarrow v'(x) = \dots
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $v'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{aligned}
 g(x) = 2x &\Rightarrow g'(x) = 2 \\
 v(g) = e^g &\Rightarrow v'(g) = e^g
 \end{aligned}$$

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(x) = e^g \cdot 2 = 2e^{2x}$$

Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
 &= 3 \cdot e^{2x} + 3x \cdot 2e^{2x} \\
 f'(x) &= (3 + 6x) \cdot e^{2x} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Die 2. Ableitung wird ebenfalls mit der Produktregel bestimmt. Die Ableitung $v'(x)$ können wir aus der vorangegangenen Rechnung übernehmen.

$$\begin{aligned}
 u(x) = 3 + 6x &\Rightarrow u'(x) = 6 \\
 v(x) = e^{2x} &\Rightarrow v'(x) = 2e^{2x}
 \end{aligned}$$

Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
 &= 6 \cdot e^{2x} + (3 + 6x) \cdot 2e^{2x} \\
 &= 6 \cdot e^{2x} + (6 + 12x) \cdot e^{2x} \\
 f''(x) &= (12 + 12x) \cdot e^{2x} \quad (5)
 \end{aligned}$$

f) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = e^x \cdot \sin 2x$$

$$\begin{aligned} u(x) = e^x &\Rightarrow u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin 2x &\Rightarrow v'(x) = \dots \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $v'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{aligned} g(x) = 2x &\Rightarrow g'(x) = 2 \\ v(g) = \sin g &\Rightarrow v'(g) = \cos g \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $v'(x)$:

$$v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) = 2 \cdot \cos g = 2 \cos 2x$$

Nun kann die Ableitung $f'(x)$ mit der Produktregel berechnet werden.

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = e^x \cdot \sin 2x + e^x \cdot 2 \cos 2x = e^x \cdot (\sin 2x + 2 \cos 2x) \quad (5)$$

Auch die zweite Ableitung wird mit der Produktregel bestimmt. Vorweg möchte ich die Ableitungen der Teilfunktionen in der Klammer $h(x) = \sin 2x$ und $i(x) = 2 \cos 2x$ mit der Kettenregel bestimmen. Dabei ist aus der Bestimmung der ersten Ableitung bereits bekannt:

$$h(x) = \sin 2x \Rightarrow h'(x) = 2 \cos 2x$$

Leiten wir entsprechend auch $i(x)$ ab:

$$i(x) = 2 \cos 2x$$

$$\begin{aligned} g(x) = 2x &\Rightarrow g'(x) = 2 \\ i(g) = 2 \cos g &\Rightarrow i'(g) = -2 \sin g \end{aligned}$$

$$i'(x) = g'(x) \cdot i'(g) = 2 \cdot (-2 \sin g) = -4 \sin 2x$$

Jetzt können wir $f'(x)$ mit der Produktregel ableiten.

$$f'(x) = e^x \cdot (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

$$\begin{aligned} u(x) = e^x &\Rightarrow u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin 2x + 2 \cos 2x &\Rightarrow v'(x) = 2 \cos 2x - 4 \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= e^x \cdot (\sin 2x + 2 \cos 2x) + e^x \cdot (2 \cos 2x - 4 \sin 2x) \\ f''(x) &= e^x \cdot (4 \cos 2x - 3 \sin 2x) \quad (5) \end{aligned}$$

g) Hier muss die Kettenregel gleich doppelt angewendet werden.

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

Die Funktion lässt sich schreiben als Funktion von einer Funktion von einer Funktion, also $f(x) = f(g(h(x)))$ mit $h(x) = 3x$, $g(h) = \sin h$ und $f(g) = e^g$.

Vorweg bestimme ich die Ableitung der inneren Funktion $g(h(x)) = \sin 3x$ mit Hilfe der Kettenregel.

$$g(x) = \sin 3x$$

$$h(x) = 3x \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 3$$

$$g(h) = \sin h \quad \Rightarrow \quad g'(h) = \cos h$$

$$g'(x) = h'(x) \cdot g'(h) = 3 \cdot \cos h = 3 \cos 3x$$

Jetzt wenden wir die Kettenregel auf $f(x)$ an.

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

$$g(x) = \sin 3x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 3 \cos 3x$$

$$f(g) = e^g \quad \Rightarrow \quad f'(g) = e^g$$

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$$

$$= e^g \cdot 3 \cos 3x$$

$$f'(x) = e^{\sin 3x} \cdot 3 \cos 3x \quad (5)$$

Für die zweite Ableitung muss nun die Produktregel angewendet werden, denn die Funktion stellt ein Produkt dar. Ich bestimme vorweg die Ableitung des zweiten Faktors $v(x) = 3 \cos 3x$ mit der Kettenregel.

$$v(x) = 3 \cos 3x$$

$$g(x) = 3x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 3$$

$$v(g) = 3 \cos g \quad \Rightarrow \quad v'(g) = -3 \sin g$$

$$v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) = 3 \cdot (-3 \sin g) = -9 \sin 3x$$

Jetzt kann $f''(x)$ mit der Produktregel bestimmt werden.

$$u(x) = e^{\sin 3x} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = e^{\sin 3x} \cdot 3 \cos 3x$$

$$v(x) = 3 \cos 3x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = -9 \sin 3x$$

$$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= e^{\sin 3x} \cdot 3 \cos 3x \cdot 3 \cos 3x + e^{\sin 3x} \cdot (-9 \sin 3x)$$

$$f''(x) = e^{\sin 3x} \cdot (9 \cos^2 3x - 9 \sin 3x) \quad (5)$$

0.4 DIFFRECH-04

Geben Sie die erste und zweite Ableitung der Funktionen an!

a)

$$f(x) = 2x^5 - 5x^3 + e^x + 3e^2$$

b)

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

c)

$$f(x) = (2x - 3)^5$$

d)

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{x - 4}$$

e)

$$f(x) = 2x \cdot e^{3x}$$

f)

$$f(x) = e^x \cdot \cos 3x$$

g)

$$f(x) = e^{\cos 4x}$$

Lösung:

a) Lösung mit Summenregel, Potenzfunktion, e -Funktion.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^5 - 5x^3 + e^x + 3e^2 \\f'(x) &= 10x^4 - 15x^2 + e^x \quad (5) \\f''(x) &= 40x^3 - 30x + e^x \quad (5)\end{aligned}$$

b) Zur Lösung formt man den Bruch in der Funktion zweckmäßigerweise in die Potenzschreibweise um.

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = 3x^2 + x^{-1}$$

Jetzt kann die Funktion mit Summenregel und der Potenzfunktion als Grundfunktion abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2 + x^{-1} \\f'(x) &= 6x - x^{-2} = 6x - \frac{1}{x^2} \quad (5) \\f''(x) &= 6 + 2x^{-3} = 6 + \frac{2}{x^3} \quad (5)\end{aligned}$$

c) Die Ableitung erfolgt zweckmäßigerweise mit der Kettenregel.

$$f(x) = (2x - 3)^5$$

Wir bilden innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 3 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = g^5 &\Rightarrow f'(g) = 5g^4\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich die 1. Ableitung:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 5g^4 \cdot 2 = 10(2x - 3)^4 \quad (5)$$

Die zweite Ableitung wird wieder mit der Kettenregel bestimmt. Die innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen werden aufgestellt:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 3 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = 10g^4 &\Rightarrow f'(g) = 40g^3\end{aligned}$$

Damit kann die 2. Ableitung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}f''(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\&= 40g^3 \cdot 2 \\&= 40 \cdot (2x - 3)^3 \cdot 2 \\f''(x) &= 80 \cdot (2x - 3)^3 \quad (5)\end{aligned}$$

d) Es handelt sich um einen Bruch; daher muss die Quotientenregel verwendet werden.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{x - 4}$$

Ich schreibe zunächst Zähler- und Nennerfunktion auf sowie deren Ableitungen.

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 + x - 4 &\Rightarrow u'(x) &= 2x + 1 \\ v(x) &= x - 4 &\Rightarrow v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse setzen wir ein und bestimmen $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x + 1) \cdot (x - 4) - (x^2 + x - 4) \cdot 1}{(x - 4)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8x + x - 4 - x^2 - x + 4}{(x - 4)^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 8x}{(x - 4)^2} \quad (5) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung schreibe ich wieder die Zähler- und Nennerfunktion sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - 8x &\Rightarrow u'(x) &= 2x - 8 \\ v(x) &= (x - 4)^2 &\Rightarrow v'(x) &= \dots \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $v'(x)$ wird die Kettenregel benötigt. Die zugehörige Rechnung führe ich in einer weiteren Nebenrechnung durch.

$$\begin{aligned} g(x) &= x - 4 &\Rightarrow g'(x) &= 1 \\ v(g) &= g^2 &\Rightarrow v'(g) &= 2g \end{aligned}$$

Damit bestimme ich mit der Kettenregel $v'(x)$.

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot 1 = 2 \cdot (x - 4)$$

Jetzt kann die Quotientenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
 &= \frac{(2x-8) \cdot (x-4)^2 - (x^2-8x) \cdot 2 \cdot (x-4)}{(x-4)^4} \\
 &= \frac{(x-4) \cdot \left((2x-8) \cdot (x-4) - (x^2-8x) \cdot 2 \right)}{(x-4)^4} \\
 &= \frac{(2x-8) \cdot (x-4) - (x^2-8x) \cdot 2}{(x-4)^3} \\
 &= \frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x}{(x-4)^3} \\
 f''(x) &= \frac{32}{(x-4)^3} \quad (5)
 \end{aligned}$$

e) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = 2x \cdot e^{3x}$$

Ich schreibe die Faktoren sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned}
 u(x) = 2x &\Rightarrow u'(x) = 2 \\
 v(x) = e^{3x} &\Rightarrow v'(x) = \dots
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $v'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{aligned}
 g(x) = 3x &\Rightarrow g'(x) = 3 \\
 v(g) = e^g &\Rightarrow v'(g) = e^g
 \end{aligned}$$

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(x) = e^g \cdot 3 = 3e^{3x}$$

Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
 &= 2 \cdot e^{3x} + 2x \cdot 3e^{3x} \\
 f'(x) &= (2 + 6x) \cdot e^{3x} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Die 2. Ableitung wird ebenfalls mit der Produktregel bestimmt. Die Ableitung $v'(x)$ können wir aus der vorangegangenen Rechnung übernehmen.

$$\begin{aligned}
 u(x) = 2 + 6x &\Rightarrow u'(x) = 6 \\
 v(x) = e^{3x} &\Rightarrow v'(x) = 3e^{3x}
 \end{aligned}$$

Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
 &= 6 \cdot e^{3x} + (2 + 6x) \cdot 3e^{3x} \\
 &= 6 \cdot e^{3x} + (6 + 18x) \cdot e^{3x} \\
 f''(x) &= (12 + 18x) \cdot e^{3x} \quad (5)
 \end{aligned}$$

f) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = e^x \cdot \cos 3x$$

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x &\Rightarrow u'(x) &= e^x \\ v(x) &= \cos 3x &\Rightarrow v'(x) &= \dots \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $v'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x &\Rightarrow g'(x) &= 3 \\ v(g) &= \cos g &\Rightarrow v'(g) &= -\sin g \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $v'(x)$:

$$v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) = 3 \cdot (-\sin g) = -3 \sin 3x$$

Nun kann die Ableitung $f'(x)$ mit der Produktregel berechnet werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= e^x \cdot \cos 3x + e^x \cdot (-3 \sin 3x) \\ f'(x) &= e^x \cdot (\cos 3x - 3 \sin 3x) \quad (5) \end{aligned}$$

Auch die zweite Ableitung wird mit der Produktregel bestimmt. Vorweg möchte ich die Ableitungen der Teilfunktionen in der Klammer $h(x) = \cos 3x$ und $i(x) = 3 \sin 3x$ mit der Kettenregel bestimmen. Dabei ist aus der Bestimmung der ersten Ableitung bereits bekannt:

$$h(x) = \cos 3x \quad \Rightarrow \quad h'(x) = -3 \sin 3x$$

Leiten wir entsprechend auch $i(x)$ ab:

$$i(x) = 3 \sin 3x$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x &\Rightarrow g'(x) &= 3 \\ i(g) &= 3 \sin g &\Rightarrow i'(g) &= 3 \cos g \end{aligned}$$

$$i'(x) = g'(x) \cdot i'(g) = 3 \cdot 3 \cos g = 9 \cos 3x$$

Jetzt können wir $f'(x)$ mit der Produktregel ableiten.

$$f'(x) = e^x \cdot (\cos 3x - 3 \sin 3x)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x &\Rightarrow u'(x) &= e^x \\ v(x) &= \cos 3x - 3 \sin 3x &\Rightarrow v'(x) &= -3 \sin 3x - 9 \cos 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= e^x \cdot (\cos 3x - 3 \sin 3x) + e^x \cdot (-3 \sin 3x - 9 \cos 3x) \\ f''(x) &= e^x \cdot (-6 \sin 3x - 6 \cos 3x) \quad (5) \end{aligned}$$

g) Hier muss die Kettenregel gleich doppelt angewendet werden.

$$f(x) = e^{\cos 4x}$$

Die Funktion lässt sich schreiben als Funktion von einer Funktion von einer Funktion, also $f(x) = f(g(h(x)))$ mit $h(x) = 4x$, $g(h) = \cos h$ und $f(g) = e^g$.

Vorweg bestimme ich die Ableitung der inneren Funktion $g(h(x)) = \cos 4x$ mit Hilfe der Kettenregel.

$$g(x) = \cos 4x$$

$$h(x) = 4x \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 4$$

$$g(h) = \cos h \quad \Rightarrow \quad g'(h) = -\sin h$$

$$g'(x) = h'(x) \cdot g'(h) = 4 \cdot (-\sin h) = -4 \sin 4x$$

Jetzt wenden wir die Kettenregel auf $f(x)$ an.

$$f(x) = e^{\cos 4x}$$

$$g(x) = \cos 4x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -4 \sin 4x$$

$$f(g) = e^g \quad \Rightarrow \quad f'(g) = e^g$$

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$$

$$= e^g \cdot (-4 \sin 4x)$$

$$f'(x) = e^{\cos 4x} \cdot (-4 \sin 4x) \quad (5)$$

Für die zweite Ableitung muss nun die Produktregel angewendet werden, denn die Funktion stellt ein Produkt dar. Ich bestimme vorweg die Ableitung des zweiten Faktors $v(x) = -4 \sin 4x$ mit der Kettenregel.

$$v(x) = -4 \sin 4x$$

$$g(x) = 4x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 4$$

$$v(g) = -4 \sin g \quad \Rightarrow \quad v'(g) = -4 \cos g$$

$$v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) = 4 \cdot (-4 \cos g) = -16 \cos 4x$$

Jetzt kann $f''(x)$ mit der Produktregel bestimmt werden.

$$u(x) = e^{\cos 4x} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = e^{\cos 4x} \cdot (-4 \sin 4x)$$

$$v(x) = -4 \sin 4x \quad \Rightarrow \quad v'(x) = -16 \cos 4x$$

$$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= e^{\cos 4x} \cdot (-4 \sin 4x) \cdot (-4 \sin 4x) + e^{\cos 4x} \cdot (-16 \cos 4x)$$

$$f''(x) = e^{\cos 4x} \cdot (16 \sin^2 4x - 16 \cos 4x) \quad (5)$$

0.5 DIFFRECH-05

Geben Sie die erste und zweite Ableitung der Funktionen an!

a)

$$f(x) = 2x^7 - 5x^3 - \pi^2 + 2e^x + 3e^3$$

b)

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x}$$

c)

$$f(x) = (2x - 4)^6$$

d)

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6}$$

e)

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

f)

$$f(x) = e^x \cdot \cos 3x$$

Lösung:

a) Lösung mit Summenregel, Potenzfunktion, e -Funktion.

Hinweis: π und e sind **Konstanten**, also auch π^2 und e^3 . Beim Differenzieren fallen diese weg.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^7 - 5x^3 - \pi^2 + 2e^x + 3e^3 \\f'(x) &= 14x^6 - 15x^2 + 2e^x \quad (5) \\f''(x) &= 84x^5 - 30x + 2e^x \quad (5)\end{aligned}$$

b) Zur Lösung formt man den Bruch in der Funktion zweckmäßigerweise in die Potenzschreibweise um.

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x} = 2x^2 - x^{-1}$$

Jetzt kann die Funktion mit Summenregel und der Potenzfunktion als Grundfunktion abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 - x^{-1} \\f'(x) &= 4x + x^{-2} = 4x + \frac{1}{x^2} \quad (5) \\f''(x) &= 4 - 2x^{-3} = 4 - \frac{2}{x^3} \quad (5)\end{aligned}$$

c) Die Ableitung erfolgt zweckmäßigerweise mit der Kettenregel.

$$f(x) = (2x - 4)^6$$

Wir bilden innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 4 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = g^6 &\Rightarrow f'(g) = 6g^5\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich die 1. Ableitung:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 6g^5 \cdot 2 = 12(2x - 4)^5 \quad (5)$$

Die zweite Ableitung wird wieder mit der Kettenregel bestimmt. Die innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen werden aufgestellt:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 4 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = 12g^5 &\Rightarrow f'(g) = 60g^4\end{aligned}$$

Damit kann die 2. Ableitung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}f''(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\&= 60g^4 \cdot 2 \\&= 60 \cdot (2x - 4)^4 \cdot 2 \\f''(x) &= 120 \cdot (2x - 4)^4 \quad (5)\end{aligned}$$

d) Es handelt sich um einen Bruch; daher muss die Quotientenregel verwendet werden.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6}$$

Ich schreibe zunächst Zähler- und Nennerfunktion auf sowie deren Ableitungen.

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - 5x + 6 &\Rightarrow & u'(x) = 2x - 5 \\ v(x) &= 2x - 6 &\Rightarrow & v'(x) = 2 \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse setzen wir ein und bestimmen $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x - 5) \cdot (2x - 6) - (x^2 - 5x + 6) \cdot 2}{(2x - 6)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 12x - 10x + 30 - 2x^2 + 10x - 12}{(2x - 6)^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^2 - 12x + 18}{(2x - 6)^2} \quad (5) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung schreibe ich wieder die Zähler- und Nennerfunktion sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x^2 - 12x + 18 &\Rightarrow & u'(x) = 4x - 12 \\ v(x) &= (2x - 6)^2 &\Rightarrow & v'(x) = \dots \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $v'(x)$ wird die Kettenregel benötigt. Die zugehörige Rechnung führe ich in einer weiteren Nebenrechnung durch.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x - 6 &\Rightarrow & g'(x) = 2 \\ v(g) &= g^2 &\Rightarrow & v'(g) = 2g \end{aligned}$$

Damit bestimme ich mit der Kettenregel $v'(x)$.

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot 2 = 4 \cdot (2x - 6)$$

Jetzt kann die Quotientenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
 &= \frac{(4x - 12) \cdot (2x - 6)^2 - (2x^2 - 12x + 18) \cdot 4 \cdot (2x - 6)}{(2x - 6)^4} \\
 &= \frac{(2x - 6) \cdot \left((4x - 12) \cdot (2x - 6) - (2x^2 - 12x + 18) \cdot 4 \right)}{(2x - 6)^4} \\
 &= \frac{(4x - 12) \cdot (2x - 6) - (2x^2 - 12x + 18) \cdot 4}{(2x - 6)^3} \\
 &= \frac{8x^2 - 24x - 24x + 72 - 8x^2 + 48x - 72}{(2x - 6)^3} \\
 f''(x) &= \frac{0}{(2x - 6)^3} = 0 \quad (5)
 \end{aligned}$$

e) Hier muss die Kettenregel gleich doppelt angewendet werden.

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

Die Funktion lässt sich schreiben als Funktion von einer Funktion von einer Funktion, also $f(x) = f(g(h(x)))$ mit $h(x) = 3x$, $g(h) = \sin h$ und $f(g) = e^g$.

Vorweg bestimme ich die Ableitung der inneren Funktion $g(h(x)) = \sin 3x$ mit Hilfe der Kettenregel.

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \sin 3x \\
 h(x) = 3x &\Rightarrow h'(x) = 3 \\
 g(h) = \sin h &\Rightarrow g'(h) = \cos h \\
 g'(x) &= h'(x) \cdot g'(h) = 3 \cdot \cos h = 3 \cos 3x
 \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir die Kettenregel auf $f(x)$ an.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{\sin 3x} \\
 g(x) = \sin 3x &\Rightarrow g'(x) = 3 \cos 3x \\
 f(g) = e^g &\Rightarrow f'(g) = e^g \\
 f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\
 &= e^g \cdot 3 \cos 3x \\
 f'(x) &= e^{\sin 3x} \cdot 3 \cos 3x \quad (5)
 \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung muss nun die Produktregel angewendet werden, denn die Funktion stellt ein Produkt dar. Ich bestimme vorweg die Ableitung des zweiten Faktors $v(x) = 3 \cos 3x$ mit der Kettenregel.

$$v(x) = 3 \cos 3x$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= 3x &\Rightarrow g'(x) &= 3 \\
v(g) &= 3 \cos g &\Rightarrow v'(g) &= -3 \sin g \\
v'(x) &= g'(x) \cdot v'(g) = 3 \cdot (-3 \sin g) = -9 \sin 3x
\end{aligned}$$

Jetzt kann $f''(x)$ mit der Produktregel bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{\sin 3x} &\Rightarrow u'(x) &= e^{\sin 3x} \cdot 3 \cos 3x \\
v(x) &= 3 \cos 3x &\Rightarrow v'(x) &= -9 \sin 3x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= e^{\sin 3x} \cdot (3 \cos 3x) \cdot 3 \cos 3x + e^{\sin 3x} \cdot (-9 \sin 3x) \\
f''(x) &= e^{\sin 3x} \cdot (9 \cos^2 3x - 9 \sin 3x) \quad (5)
\end{aligned}$$

f) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = e^x \cdot \cos 3x$$

Ich schreibe die Faktoren sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^x &\Rightarrow u'(x) &= e^x \\
v(x) &= \cos 3x &\Rightarrow v'(x) &= \dots
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $v'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{aligned}
g(x) &= 3x &\Rightarrow g'(x) &= 3 \\
v(g) &= \cos g &\Rightarrow v'(g) &= -\sin g \\
v'(x) &= v'(g) \cdot g'(x) = -\sin g \cdot 3 = -3 \sin 3x
\end{aligned}$$

Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= e^x \cdot \cos 3x + e^x \cdot (-3 \sin 3x) \\
f'(x) &= e^x \cdot (\cos 3x - 3 \sin 3x) \quad (5)
\end{aligned}$$

Die 2. Ableitung wird ebenfalls mit der Produktregel bestimmt.

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^x &\Rightarrow u'(x) &= e^x \\
v(x) &= \cos 3x - 3 \sin 3x &\Rightarrow v'(x) &= \dots
\end{aligned}$$

Die Funktion $v(x)$ besteht aus zwei Summanden, deren Ableitung jeweils mit der Kettenregel bestimmt wird. Dabei wurde die Ableitung des ersten Summanden $\cos 3x$ im vorangehenden Abschnitt bereits als $v'(x) = -3 \sin 3x$ bestimmt. Bleibt noch der Summand $3 \sin 3x$.

$$h(x) = 3 \sin 3x$$

$$\begin{aligned}
g(x) = 3x &\Rightarrow g'(x) = 3 \\
h(g) = 3 \sin g &\Rightarrow h'(g) = 3 \cos g \\
h'(x) = g'(x) \cdot h'(g) &= 3 \cdot 3 \cos g = 9 \cos 3x
\end{aligned}$$

Mit diesen Werten können wir die Ableitung $v'(x)$ bestimmen.

$$\begin{aligned}
v(x) &= \cos 3x - 3 \sin 3x \\
v'(x) &= -3 \sin 3x - 9 \cos 3x
\end{aligned}$$

Damit können wir die Produktregel nun endlich anwenden.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= e^x \cdot (\cos 3x - 3 \sin 3x) + e^x \cdot (-3 \sin 3x - 9 \cos 3x) \\
&= e^x \cdot (\cos 3x - 3 \sin 3x - 3 \sin 3x - 9 \cos 3x) \\
f''(x) &= e^x \cdot (-6 \sin 3x - 8 \cos 3x) \quad (5)
\end{aligned}$$

0.6 DIFFRECH-06

Geben Sie die erste und zweite Ableitung der Funktionen an!

a)

$$f(x) = 2x^7 - 4x^2 + \pi^3 + 3e^x + 2e^2$$

b)

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

c)

$$f(x) = (2x - 4)^7$$

d)

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 4}$$

e)

$$f(x) = e^{\cos 3x}$$

f)

$$f(x) = e^x \cdot \sin 3x$$

Lösung:

a) Lösung mit Summenregel, Potenzfunktion, e -Funktion.

Hinweis: π und e sind **Konstanten**, also auch π^3 und e^2 . Beim Differenzieren fallen diese weg.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^7 - 4x^2 + \pi^3 + 3e^x + 2e^2 \\f'(x) &= 14x^6 - 8x + 3e^x \quad (5) \\f''(x) &= 84x^5 - 8 + 3e^x \quad (5)\end{aligned}$$

b) Zur Lösung formt man den Bruch in der Funktion zweckmäßigerweise in die Potenzschreibweise um.

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = 3x^2 + x^{-1}$$

Jetzt kann die Funktion mit Summenregel und der Potenzfunktion als Grundfunktion abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2 + x^{-1} \\f'(x) &= 6x - x^{-2} = 6x - \frac{1}{x^2} \quad (5) \\f''(x) &= 6 + 2x^{-3} = 6 + \frac{2}{x^3} \quad (5)\end{aligned}$$

c) Die Ableitung erfolgt zweckmäßigerweise mit der Kettenregel.

$$f(x) = (2x - 4)^7$$

Wir bilden innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 4 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = g^7 &\Rightarrow f'(g) = 7g^6\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich die 1. Ableitung:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 7g^6 \cdot 2 = 14(2x - 4)^6 \quad (5)$$

Die zweite Ableitung wird wieder mit der Kettenregel bestimmt. Die innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen werden aufgestellt:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 4 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = 14g^6 &\Rightarrow f'(g) = 84g^5\end{aligned}$$

Damit kann die 2. Ableitung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}f''(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\&= 84g^5 \cdot 2 \\&= 84 \cdot (2x - 4)^5 \cdot 2 \\f''(x) &= 168 \cdot (2x - 4)^5 \quad (5)\end{aligned}$$

d) Es handelt sich um einen Bruch; daher muss die Quotientenregel verwendet werden.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 4}$$

Ich schreibe zunächst Zähler- und Nennerfunktion auf sowie deren Ableitungen.

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - 5x + 6 &\Rightarrow & u'(x) = 2x - 5 \\ v(x) &= 2x - 4 &\Rightarrow & v'(x) = 2 \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse setzen wir ein und bestimmen $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x - 5) \cdot (2x - 4) - (x^2 - 5x + 6) \cdot 2}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 10x + 20 - 2x^2 + 10x - 12}{(2x - 4)^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^2 - 8x + 8}{(2x - 4)^2} \quad (5) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung schreibe ich wieder die Zähler- und Nennerfunktion sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x^2 - 8x + 8 &\Rightarrow & u'(x) = 4x - 8 \\ v(x) &= (2x - 4)^2 &\Rightarrow & v'(x) = \dots \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $v'(x)$ wird die Kettenregel benötigt. Die zugehörige Rechnung führe ich in einer weiteren Nebenrechnung durch.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x - 4 &\Rightarrow & g'(x) = 2 \\ v(g) &= g^2 &\Rightarrow & v'(g) = 2g \end{aligned}$$

Damit bestimme ich mit der Kettenregel $v'(x)$.

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot 2 = 4 \cdot (2x - 4)$$

Jetzt kann die Quotientenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
 &= \frac{(4x-8) \cdot (2x-4)^2 - (2x^2-8x+8) \cdot 4 \cdot (2x-4)}{(2x-4)^4} \\
 &= \frac{(2x-4) \cdot \left((4x-8) \cdot (2x-4) - (2x^2-8x+8) \cdot 4 \right)}{(2x-4)^4} \\
 &= \frac{(4x-8) \cdot (2x-4) - (2x^2-8x+8) \cdot 4}{(2x-4)^3} \\
 &= \frac{8x^2-16x+32-8x^2+32x-32}{(2x-4)^3} \\
 f''(x) &= \frac{0}{(2x-4)^3} = 0 \quad (5)
 \end{aligned}$$

e) Hier muss die Kettenregel gleich doppelt angewendet werden.

$$f(x) = e^{\cos 3x}$$

Die Funktion lässt sich schreiben als Funktion von einer Funktion von einer Funktion, also $f(x) = f(g(h(x)))$ mit $h(x) = 3x$, $g(h) = \cos h$ und $f(g) = e^g$.

Vorweg bestimme ich die Ableitung der inneren Funktion $g(h(x)) = \cos 3x$ mit Hilfe der Kettenregel.

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \cos 3x \\
 h(x) = 3x &\Rightarrow h'(x) = 3 \\
 g(h) = \cos h &\Rightarrow g'(h) = -\sin h \\
 g'(x) &= h'(x) \cdot g'(h) = 3 \cdot (-\sin h) = -3 \sin 3x
 \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir die Kettenregel auf $f(x)$ an.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{\cos 3x} \\
 g(x) = \cos 3x &\Rightarrow g'(x) = -3 \sin 3x \\
 f(g) = e^g &\Rightarrow f'(g) = e^g \\
 f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\
 &= e^g \cdot (-3 \sin 3x) \\
 f'(x) &= e^{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x) \quad (5)
 \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung muss nun die Produktregel angewendet werden, denn die Funktion stellt ein Produkt dar. Ich bestimme vorweg die Ableitung des zweiten Faktors $v(x) = -3 \sin 3x$ mit der Kettenregel.

$$v(x) = -3 \sin 3x$$

$$\begin{aligned}
g(x) = 3x &\Rightarrow g'(x) = 3 \\
v(g) = -3 \sin g &\Rightarrow v'(g) = -3 \cos g \\
v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) &= 3 \cdot (-3 \cos g) = -9 \cos 3x
\end{aligned}$$

Jetzt kann $f''(x)$ mit der Produktregel bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
u(x) = e^{\cos 3x} &\Rightarrow u'(x) = e^{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x) \\
v(x) = -3 \sin 3x &\Rightarrow v'(x) = -9 \cos 3x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= e^{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x) \cdot (-3 \sin 3x) + e^{\cos 3x} \cdot (-9 \cos 3x) \\
f''(x) &= e^{\cos 3x} \cdot (9 \sin^2 3x - 9 \cos 3x) \quad (5)
\end{aligned}$$

f) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = e^x \cdot \sin 3x$$

Ich schreibe die Faktoren sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned}
u(x) = e^x &\Rightarrow u'(x) = e^x \\
v(x) = \sin 3x &\Rightarrow v'(x) = \dots
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $v'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{aligned}
g(x) = 3x &\Rightarrow g'(x) = 3 \\
v(g) = \sin g &\Rightarrow v'(g) = \cos g
\end{aligned}$$

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(x) = (\cos g) \cdot 3 = 3 \cos 3x$$

Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\
&= e^x \cdot \sin 3x + e^x \cdot 3 \cos 3x \\
f'(x) &= e^x \cdot (\sin 3x + 3 \cos 3x) \quad (5)
\end{aligned}$$

Die 2. Ableitung wird ebenfalls mit der Produktregel bestimmt.

$$\begin{aligned}
u(x) = e^x &\Rightarrow u'(x) = e^x \\
v(x) = \sin 3x + 3 \cos 3x &\Rightarrow v'(x) = \dots
\end{aligned}$$

Die Funktion $v(x)$ besteht aus zwei Summanden, deren Ableitung jeweils mit der Kettenregel bestimmt wird. Dabei wurde die Ableitung des ersten Summanden $\sin 3x$ im vorangehenden Abschnitt bereits als $v'(x) = 3 \cos 3x$ bestimmt. Bleibt noch der Summand $3 \cos 3x$.

$$h(x) = 3 \cos 3x$$

$$\begin{aligned} g(x) = 3x &\Rightarrow g'(x) = 3 \\ h(g) = 3 \cos g &\Rightarrow h'(g) = -3 \sin g \end{aligned}$$

$$h'(x) = g'(x) \cdot h'(g) = 3 \cdot (-3 \sin g) = -9 \sin 3x$$

Mit diesen Werten können wir die Ableitung $v'(x)$ bestimmen.

$$\begin{aligned} v(x) &= \sin 3x + 3 \cos 3x \\ v'(x) &= 3 \cos 3x - 9 \sin 3x \end{aligned}$$

Damit können wir die Produktregel nun endlich anwenden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= e^x \cdot (\sin 3x + 3 \cos 3x) + e^x \cdot (3 \cos 3x - 9 \sin 3x) \\ &= e^x \cdot (\sin 3x + 3 \cos 3x + 3 \cos 3x - 9 \sin 3x) \\ f''(x) &= e^x \cdot (6 \cos 3x - 8 \sin 3x) \quad (5) \end{aligned}$$

0.7 DIFFRECH-07

Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte der nachfolgenden Funktion!

$$f(x) = -2x^3 + 18x^2 - 48x + 38$$

Lösung: Notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrempunkten ist das Nullwerden der ersten Ableitung der Funktion. Vorsorglich werden zunächst die ersten beiden Ableitungen gebildet.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 + 18x^2 - 48x + 38 \\ f'(x) &= -6x^2 + 36x - 48 \\ f''(x) &= -12x + 36 \end{aligned}$$

Mit der **ersten Ableitung** werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ -6x_E^2 + 36x_E - 48 &= 0 & | : (-6) \\ x_E^2 - 6x_E + 8 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\ x_{E1/2} &= 3 \pm 1 \\ x_{E1} = 2 & \quad x_{E2} = 4 \end{aligned}$$

Zur Prüfung, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt, kommen zwei Verfahren in Betracht:

1. Prüfung mit zweiter Ableitung
2. Vorzeichenwechselkriterium der ersten Ableitung

Prüfungsvariante 1: Mit Hilfe der **zweiten Ableitung** wird nun geprüft, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 2$:

$$f''(x_{E1}) = f''(2) = -12 \cdot 2 + 36 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 2$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 2$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(2) = -2 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 38 = -2$$

Ergebnis: Tiefpunkt $T(2 | -2)$

Untersuchung für $x_{E2} = 4$:

$$f''(x_{E1}) = f''(4) = -12 \cdot 4 + 36 = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = 4$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 4$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(4) = -2 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 38 = 6$$

Ergebnis: **Hochpunkt $H(4|6)$**

Prüfungsvariante 2: Es wird mit dem Vorzeichenwechselkriterium der ersten Ableitung geprüft.

Untersuchung für $x_{E1} = 2$:

$$f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 - 48 = -18 < 0$$

$$f'(3) = -6 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 48 = 6 > 0$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E1} = 2$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 2$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(2) = -2 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 38 = -2$$

Ergebnis: **Tiefpunkt $T(2|-2)$**

Untersuchung für $x_{E2} = 4$:

$$f'(3) = -6 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 48 = 6 > 0$$

$$f'(5) = -6 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 - 48 = -18 < 0$$

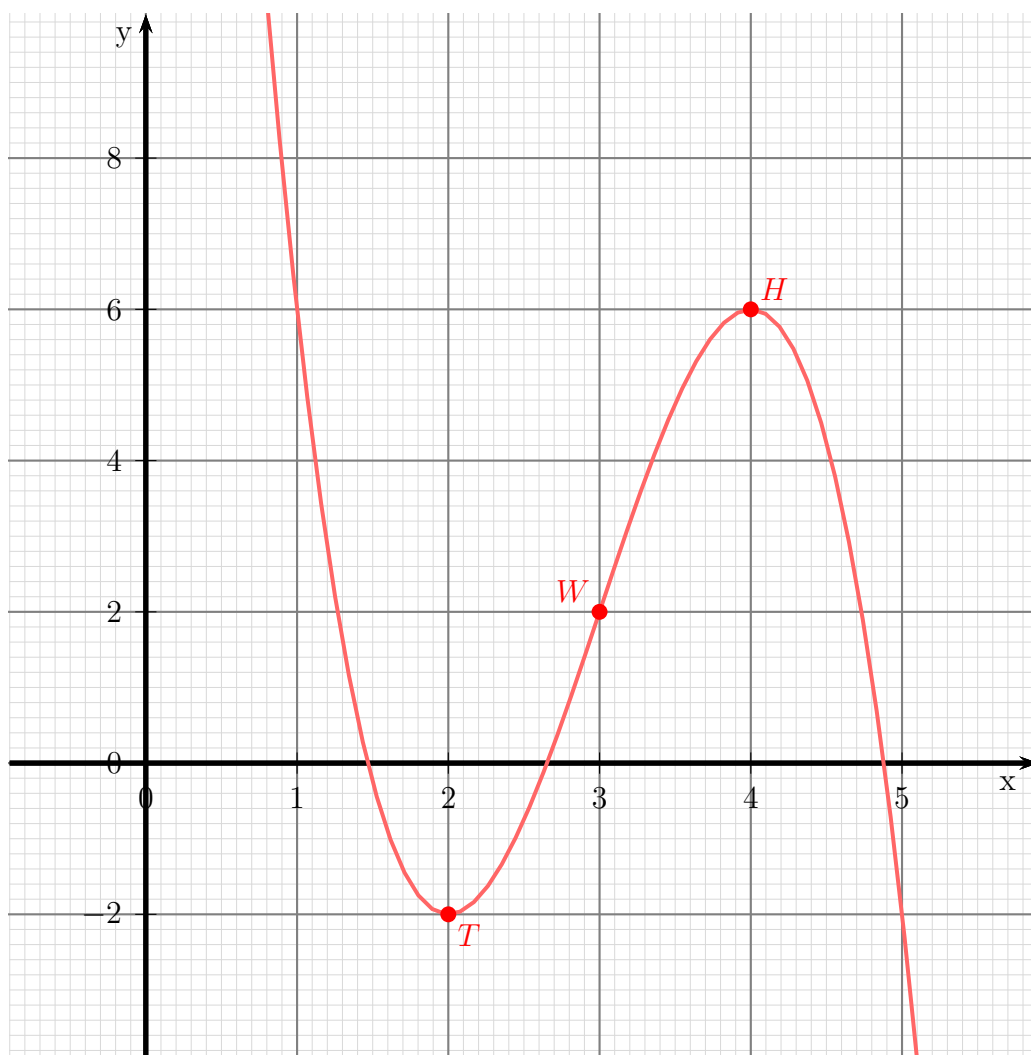
Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ \Rightarrow Hochpunkt bei $x_{E2} = 4$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 4$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(4) = -2 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 38 = 6$$

Ergebnis: **Hochpunkt $H(4|6)$**

Anmerkung: Nachfolgend ist der Funktionsgraph dargestellt. Dieser gehört nicht zur Aufgabenstellung, er soll die Aufgabe nur veranschaulichen.



0.8 DIFFRECH-07a

Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte der nachfolgenden Funktion!

$$f(x) = -2x^3 + 18x^2 - 48x + 38$$

Lösung: Hoch- und Tiefpunkte:

Notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrempunkten ist das Nullwerden der ersten Ableitung der Funktion. Vorsorglich werden zunächst alle eventuell nötigen Ableitungen gebildet.

$$\begin{aligned}f(x) &= -2x^3 + 18x^2 - 48x + 38 \\f'(x) &= -6x^2 + 36x - 48 \\f''(x) &= -12x + 36 \\f'''(x) &= -12\end{aligned}$$

Mit der **ersten Ableitung** werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned}f'(x_E) &= 0 \\-6x_E^2 + 36x_E - 48 &= 0 & | : (-6) \\x_E^2 - 6x_E + 8 &= 0 \\x_{E1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\x_{E1/2} &= 3 \pm 1 \\x_{E1} = 2 & \quad x_{E2} = 4\end{aligned}$$

Zur Prüfung, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt, kommen zwei Verfahren in Betracht:

1. Prüfung mit zweiter Ableitung
2. Vorzeichenwechselkriterium der ersten Ableitung

Prüfungsvariante 1: Mit Hilfe der **zweiten Ableitung** wird nun geprüft, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 2$:

$$f''(x_{E1}) = f''(2) = -12 \cdot 2 + 36 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 2$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 2$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(2) = -2 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 38 = -2$$

Ergebnis: Tiefpunkt $T(2 | -2)$

Untersuchung für $x_{E2} = 4$:

$$f''(x_{E1}) = f''(4) = -12 \cdot 4 + 36 = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = 4$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 4$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(4) = -2 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 38 = 6$$

Ergebnis: Hochpunkt $H(4|6)$

Prüfungsvariante 2: Es wird mit dem Vorzeichenwechselkriterium der ersten Ableitung geprüft.

Untersuchung für $x_{E1} = 2$:

$$\begin{aligned} f'(1) &= -6 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 - 48 = -18 < 0 \\ f'(3) &= -6 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 48 = 6 > 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E1} = 2$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 2$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(2) = -2 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 38 = -2$$

Ergebnis: Tiefpunkt $T(2|-2)$

Untersuchung für $x_{E2} = 4$:

$$\begin{aligned} f'(3) &= -6 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 48 = 6 > 0 \\ f'(5) &= -6 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 - 48 = -18 < 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ \Rightarrow Hochpunkt bei $x_{E2} = 4$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 4$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(4) = -2 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 38 = 6$$

Ergebnis: Hochpunkt $H(4|6)$

Untersuchung auf Wendepunkte:

$$\begin{array}{rcl} f''(x_W) & = & 0 \\ -12x_W + 36 & = & 0 \quad | -36 \\ -12x_W & = & -36 \quad | : (-12) \\ x_W & = & 3 \end{array}$$

Zur Prüfung, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, kann die dritte Ableitung verwendet werden.

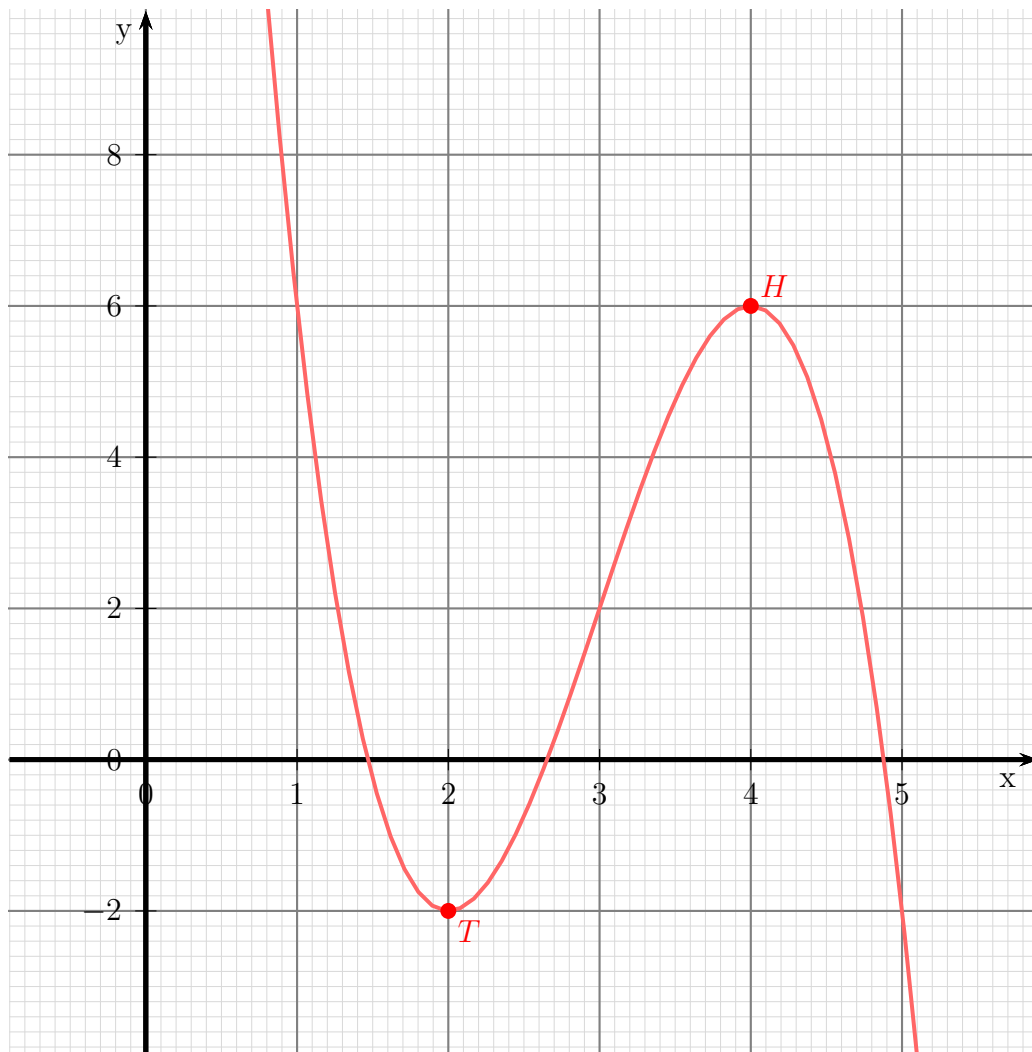
$$f'''(3) = -12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_W = 3$$

Den zugehörigen Funktionswert y_W liefert die Originalfunktion $f(x_W)$.

$$y_W = f(x_W) = -2x_W^3 + 18x_W^2 - 48x_W + 38 = -2 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 - 48 \cdot 3 + 38 = 2$$

Ergebnis: $W(3|2)$

Anmerkung: Nachfolgend ist der Funktionsgraph dargestellt. Dieser gehört nicht zur Aufgabenstellung, er soll die Aufgabe nur veranschaulichen.



0.9 DIFFRECH-08

Bestimmen Sie **mit Hilfe des Differenzenquotienten** die Ableitung der nachfolgenden Funktion!

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left((x+h)^3 - 3(x+h)^2 - 2(x+h) + 2 \right) - (x^3 - 3x^2 - 2x + 2)}{h} \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - 3(x+h)^2 - 2(x+h) + 2 - x^3 + 3x^2 + 2x - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3x^2 - 6xh - 3h^2 - 2x - 2h - x^3 + 3x^2 + 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6xh - 3h^2 - 2h}{h} \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (3x^2 + 3xh + h^2 - 6x - 3h - 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 6x - 3h - 2) \quad (4) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + \lim_{h \rightarrow 0} 3xh + \lim_{h \rightarrow 0} h^2 - \lim_{h \rightarrow 0} 6x - \lim_{h \rightarrow 0} 3h - \lim_{h \rightarrow 0} 2 \\ &= 3x^2 + 0 + 0 - 6x - 0 - 2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x - 2 \quad (4) \end{aligned}$$

0.10 DIFFRECH-09

Berechnen Sie **mit Hilfe des Differenzenquotienten** die Ableitung der nachfolgenden Funktion!

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left((x+h)^3 - 2(x+h)^2 - 4(x+h) + 3 \right) - (x^3 - 2x^2 - 4x + 3)}{h} \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - 2(x+h)^2 - 4(x+h) + 3 - x^3 + 2x^2 + 4x - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2x^2 - 4xh - 2h^2 - 4x - 4h - x^3 + 2x^2 + 4x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4xh - 2h^2 - 4h}{h} \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (3x^2 + 3xh + h^2 - 4x - 2h - 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 4x - 2h - 4) \quad (4) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + \lim_{h \rightarrow 0} 3xh + \lim_{h \rightarrow 0} h^2 - \lim_{h \rightarrow 0} 4x - \lim_{h \rightarrow 0} 2h - \lim_{h \rightarrow 0} 4 \\ &= 3x^2 + 0 + 0 - 4x - 0 - 4 \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x - 4 \quad (4) \end{aligned}$$

0.11 DIFFRECH-10

Berechnen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte der nachfolgenden Funktion! (20 P.)

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$$

Lösung: Notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrempunkten ist das Nullwerden der ersten Ableitung der Funktion. Je nach Lösungsvariante werden eine oder zwei Ableitungen benötigt. Die erste Ableitung wird gebildet.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x^2 + 24x - 18 \\ f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \quad (3) \end{aligned}$$

Mit der **ersten Ableitung** werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ 3x_E^2 - 18x_E + 24 &= 0 \quad | :3 \\ x_E^2 - 6x_E + 8 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 3 \pm \sqrt{9 - 8} \\ &= 3 \pm 1 \\ x_{E1} &= 4 \quad x_{E2} = 2 \quad (5) \end{aligned}$$

Lösungsvariante 1 (Prüfung mit Vorzeichenwechselkriterium):

Untersuchung für $x_{E1} = 4$:

$$\begin{aligned} f'(3) &= 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3 < 0 \\ f'(5) &= 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 24 = 9 > 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E1} = 4$ (4)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 4$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 18 = -2$$

Ergebnis: Tiefpunkt $T(4 | -2)$ (2)

Untersuchung für $x_{E2} = 2$:

$$\begin{aligned} f'(1) &= 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 24 = 9 > 0 \\ f'(3) &= 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3 < 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ \Rightarrow Hochpunkt bei $x_{E2} = 2$ (4)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 2$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 18 = 2$$

Ergebnis: **Hochpunkt $H(2|2)$** (2)

Lösungsvariante 2 (Prüfung mit zweiter Ableitung):

$$f''(x) = 6x - 18 \quad (2)$$

Mit Hilfe der **zweiten Ableitung** kann geprüft werden, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 4$:

$$f''(x_{E1}) = f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 4 \quad (3)$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 4$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 18 = -2$$

Ergebnis: **Tiefpunkt $T(4|-2)$** (2)

Untersuchung für $x_{E2} = 2$:

$$f''(x_{E2}) = f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = 2 \quad (3)$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 2$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E2}) = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 18 = 2$$

Ergebnis: **Hochpunkt $H(2|2)$** (2)

0.12 DIFFRECH-11

Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte der nachfolgenden Funktion!

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 48$$

Lösungsvariante 1: Notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrempunkten ist das Nullwerden der ersten Ableitung der Funktion. Vorsorglich werden zunächst die ersten beiden Ableitungen gebildet.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 12x^2 + 45x - 48 \\f'(x) &= 3x^2 - 24x + 45 \quad (3) \\f''(x) &= 6x - 24 \quad (3)\end{aligned}$$

Mit der **ersten Ableitung** werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned}f'(x_E) &= 0 \\3x_E^2 - 24x_E + 45 &= 0 \quad | : 3 \\x_E^2 - 8x_E + 15 &= 0 \\x_{E1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 15} \\&= 4 \pm 1 \\x_{E1} = 5 \quad x_{E2} = 3 \quad (4)\end{aligned}$$

Mit Hilfe der **zweiten Ableitung** kann nun geprüft werden, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 5$:

$$f''(x_{E1}) = f''(5) = 6 \cdot 5 - 24 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 5 \quad (3)$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 5$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 45 \cdot 5 - 48 = 2$$

Ergebnis: Tiefpunkt $T(5|2)$ (2)

Untersuchung für $x_{E2} = 3$:

$$f''(x_{E2}) = f''(3) = 6 \cdot 3 - 24 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = 3 \quad (3)$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 3$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 - 48 = 6$$

Ergebnis: Hochpunkt $H(3|6)$ (2)

Lösungsvariante 2: Notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrempunkten ist das Nullwerden der ersten Ableitung der Funktion. Daher wird zunächst die erste Ableitung gebildet.

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 12x^2 + 45x - 48 \\f'(x) &= 3x^2 - 24x + 45 \quad (3)\end{aligned}$$

Mit der ersten Ableitung werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned}f'(x_E) &= 0 \\3x_E^2 - 24x_E + 45 &= 0 \quad | :3 \\x_E^2 - 8x_E + 15 &= 0 \\x_{E1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 15} \\&= 4 \pm 1 \\x_{E1} = 5 \quad x_{E2} = 3 \quad (5)\end{aligned}$$

Nun muss für jeden der beiden berechneten Kandidaten geprüft werden, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 5$:

$$\begin{aligned}f'(4) &= 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 45 = -3 < 0 \\f'(6) &= 3 \cdot 6^2 - 24 \cdot 6 + 45 = 9 > 0\end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E1} = 5$ (4)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 5$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 45 \cdot 5 - 48 = 2$$

Ergebnis: **Tiefpunkt $T(5|2)$** (2)

Untersuchung für $x_{E2} = 3$:

$$\begin{aligned}f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 45 = 9 > 0 \\f'(4) &= 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 45 = -3 < 0\end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ \Rightarrow Hochpunkt bei $x_{E2} = 2$ (4)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 3$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 - 48 = 6$$

Ergebnis: **Hochpunkt $H(3|6)$** (2)

0.13 DIFFRECH-12

Berechnen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte der nachfolgenden Funktion! (20 P.)

$$f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x - 1$$

Lösung 1: Notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrempunkten ist das Nullwerden der ersten Ableitung der Funktion. Vorsorglich werden zunächst die ersten beiden Ableitungen gebildet.

$$\begin{aligned}f(x) &= -x^3 - 6x^2 - 9x - 1 \\f'(x) &= -3x^2 - 12x - 9 \quad (3) \\f''(x) &= -6x - 12 \quad (3)\end{aligned}$$

Mit der **ersten Ableitung** werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned}f'(x_E) &= 0 \\-3x_E^2 - 12x_E - 9 &= 0 \quad | : (-3) \\x_E^2 + 4x_E + 3 &= 0 \\x_{E1/2} &= -2 \pm \sqrt{4 - 3} \\&= -2 \pm 1 \\x_{E1} &= -1 \quad x_{E2} = -3 \quad (4)\end{aligned}$$

Mit Hilfe der **zweiten Ableitung** kann nun geprüft werden, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = -1$:

$$f''(x_{E1}) = f''(-1) = -6 \cdot (-1) - 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_{E1} = -1 \quad (3)$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = -1$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(-1) = -(-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 1 = 3$$

Ergebnis: Hochpunkt $H(-1|3)$ (2)

Untersuchung für $x_{E2} = -3$:

$$f''(x_{E2}) = f''(-3) = -6 \cdot (-3) - 12 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E2} = -3 \quad (3)$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = -3$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(-3) = -(-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 1 = -1$$

Ergebnis: Tiefpunkt $T(-3|-1)$ (2)

Lösung 2: Notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrempunkten ist das Nullwerden der ersten Ableitung der Funktion. Daher wird zunächst die erste Ableitung gebildet.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 - 6x^2 - 9x - 1 \\ f'(x) &= -3x^2 - 12x - 9 \quad (3) \end{aligned}$$

Mit der ersten Ableitung werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ -3x_E^2 - 12x_E - 9 &= 0 \quad | : (-3) \\ x_E^2 + 4x_E + 3 &= 0 \\ x_{E1/2} &= -2 \pm \sqrt{4 - 3} \\ &= -2 \pm 1 \\ x_{E1} &= -1 \quad x_{E2} = -3 \quad (5) \end{aligned}$$

Nun muss für jeden der beiden berechneten Kandidaten geprüft werden, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = -1$:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= -3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 9 = 3 > 0 \\ f'(0) &= -3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 - 9 = -9 < 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $- \Rightarrow$ Hochpunkt bei $x_{E1} = -1$ (4)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = -1$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(-1) = -(-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 1 = 3$$

Ergebnis: Hochpunkt $H(-1|3)$ (2)

Untersuchung für $x_{E2} = -3$:

$$\begin{aligned} f'(-4) &= -3 \cdot (-4)^2 - 12 \cdot (-4) - 9 = -9 < 0 \\ f'(-2) &= -3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 9 = 3 > 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E2} = -3$ (4)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = -3$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(-3) = -(-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 1 = -1$$

Ergebnis: Tiefpunkt $T(-3|-1)$ (2)

0.14 DIFFRECH-13

Gegeben ist die nachfolgende Funktion $f(x)$.

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$$

Untersuchen Sie die Funktion auf:

1. Extrempunkte
2. Wendepunkte

und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung:

Extrempunkte:

Für den weiteren Fortgang werden die ersten drei Ableitungen benötigt.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 36x \\f''(x) &= 12x^2 - 48x + 36 \\f'''(x) &= 24x - 48\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extrema ist Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned}f'(x_E) &= 0 \\4x_E^3 - 24x_E^2 + 36x_E &= 0 \\x_E \cdot (4x_E^2 - 24x_E + 36) &= 0 \\x_{E1} &= 0 \\4x_E^2 - 24x_E + 36 &= 0 \\x_E^2 - 6x_E + 9 &= 0 \\x_{E2/3} &= 3 \pm \sqrt{9 - 9} \\x_{E2} &= 3\end{aligned}$$

Was ist bei $x_{E1} = 0$?

$$f''(0) = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 0$$

$$y_T = f(x_T) = 0$$

Tiefpunkt: $T(0|0)$

Was ist bei $x_{E2} = 3$?

$$f''(3) = 108 - 144 + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Aussage möglich!}$$

Diese Methode führt zu keiner Aussage, wir müssen also die andere verwenden.

$$\begin{aligned} f'(2) &= 32 - 96 + 72 = 8 > 0 \\ f'(4) &= 256 - 384 + 144 = 16 > 0 \end{aligned}$$

Es findet **kein** Vorzeichenwechsel statt, daher handelt es sich um einen **Sattelpunkt**.

$$y_s = f(x_s) = 81 - 216 + 162 = 27$$

Sattelpunkt: $S(3|27)$

Wendepunkte:

Notwendige Bedingung für Wendepunkte ist Nullwerden der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \\ 12x_W^2 - 48x_W + 36 &= 0 \quad | : 12 \\ x_W^2 - 4x_W + 3 &= 0 \\ x_{W1/2} &= 2 \pm \sqrt{4 - 3} \\ x_{W1/2} &= 2 \pm 1 \\ x_{W1} &= 1 \quad x_{W2} = 3 \end{aligned}$$

Was ist bei $x_{W1} = 1$?

$$f'''(1) = 24 \cdot 1 - 48 = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 1$$

$$y_{W1} = f(x_{W1}) = 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 18 \cdot 1^2 = 1 - 8 + 18 = 11$$

1. Wendepunkt: $W_1(1|11)$

Was ist bei $x_{W2} = 3$?

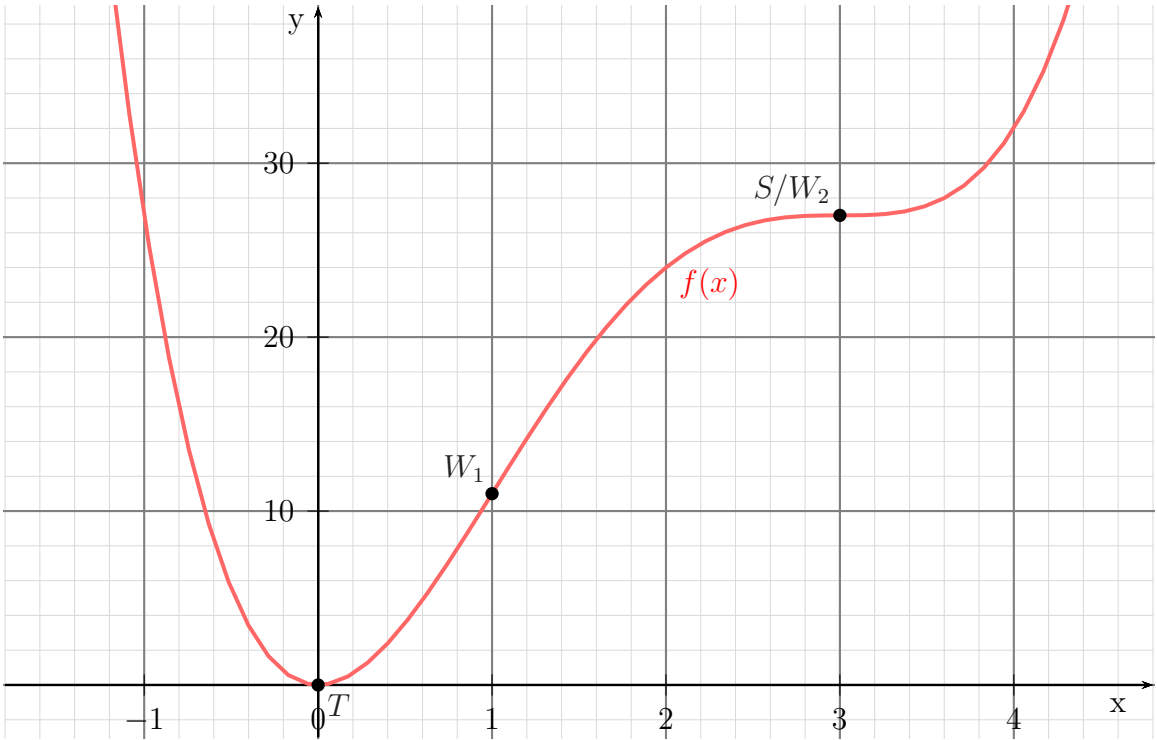
$$f'''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = 3$$

$$y_{W2} = f(x_{W2}) = 3^4 - 8 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 = 81 - 216 + 162 = 27$$

Dieser Wendepunkt ist identisch mit dem bereits bestimmten Sattelpunkt!

2. Wendepunkt: $W_2(3|27)$

Skizze:



0.15 DIFFRECH-14

Berechnen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte der nachfolgenden Funktion! (20 P.)

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 2$$

Lösung 1:

Notwendige Bedingung für Extremstellen ist das Null-Werden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 9x^2 - 15x + 2 \\ f'(x) &= -3x^2 + 18x - 15 \quad (3) \\ f''(x) &= -6x + 18 \quad (3) \end{aligned}$$

Mit der **ersten Ableitung** werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ -3x^2 + 18x - 15 &= 0 & | : (-3) \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\ x_{E1/2} &= 3 \pm 2 \\ x_{E1} &= 1 & x_{E2} = 5 \quad (4) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der **zweiten Ableitung** kann nun geprüft werden, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 1$:

$$f''(x_{E1}) = f''(1) = -6 \cdot 1 + 18 = 12 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 1 \quad (3)$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 1$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(1) = -1^3 + 9 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + 2 = -5$$

Ergebnis: Tiefpunkt $T(1|-5)$ (2)

Untersuchung für $x_{E2} = 5$:

$$f''(x_{E2}) = f''(5) = -6 \cdot 5 + 18 = -12 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = 5 \quad (3)$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 5$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(5) = -5^3 + 9 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 2 = 27$$

Ergebnis: Hochpunkt $T(5|27)$ (2)

Lösung 2:

Notwendige Bedingung für Extremstellen ist das Null-Werden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned}f(x) &= -x^3 + 9x^2 - 15x + 2 \\f'(x) &= -3x^2 + 18x - 15 \quad (3)\end{aligned}$$

Mit der ersten Ableitung werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned}f'(x_E) &= 0 \\-3x^2 + 18x - 15 &= 0 & | : (-3) \\x^2 - 6x + 5 &= 0 \\x_{E1/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\x_{E1/2} &= 3 \pm 2 \\x_{E1} &= 1 & x_{E2} = 5 \quad (5)\end{aligned}$$

Nun muss für jeden der beiden berechneten Kandidaten geprüft werden, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 1$:

$$\begin{aligned}f'(0) &= -3 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 15 = -15 < 0 \\f'(2) &= -3 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 - 15 = 9 > 0\end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E1} = 1$ (4)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 1$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(1) = -1^3 + 9 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + 2 = -5$$

Ergebnis: **Tiefpunkt $T(1|-5)$** (2)

Untersuchung für $x_{E2} = 5$:

$$\begin{aligned}f'(4) &= -3 \cdot 4^2 + 18 \cdot 4 - 15 = 9 > 0 \\f'(6) &= -3 \cdot 6^2 + 18 \cdot 6 - 15 = -15 < 0\end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ \Rightarrow Hochpunkt bei $x_{E2} = 5$ (4)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 5$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(5) = -5^3 + 9 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 2 = 27$$

Ergebnis: **Hochpunkt $H(5|27)$** (2)

0.16 DIFFRECH-15

Geben Sie die erste Ableitung der Funktionen an!

a)

$$f(x) = 2x^6 - 3x^2 + 2e^x - 3e^2 + 4x$$

b)

$$f(x) = \frac{2}{x} - 3x^2$$

c)

$$f(x) = (2x^2 - 7)^7$$

d)

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 5}{x^2 + 1}$$

e)

$$f(x) = e^{\cos x} \cdot \sin x$$

Lösung:

a) Lösung mit Summenregel, Potenzfunktion, e -Funktion.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^6 - 3x^2 + 2e^x - 3e^2 + 4x \\f'(x) &= 12x^5 - 6x + 2e^x + 4\end{aligned}$$

b) Zur Lösung formt man den Bruch in der Funktion zweckmäßigerweise in die Potenzschreibweise um.

$$f(x) = \frac{2}{x} - 3x^2 = 2x^{-1} - 3x^2$$

Jetzt kann die Funktion mit Summenregel und der Potenzfunktion als Grundfunktion abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^{-1} - 3x^2 \\f'(x) &= -2x^{-2} - 6x = -\frac{2}{x^2} - 6x \quad (5)\end{aligned}$$

c) Die Ableitung erfolgt zweckmäßigerweise mit der Kettenregel.

$$f(x) = (2x^2 - 7)^7$$

Wir bilden innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen:

$$\begin{aligned}g(x) &= 2x^2 - 7 \Rightarrow g'(x) = 4x \\f(g) &= g^7 \Rightarrow f'(g) = 7g^6\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich die 1. Ableitung:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 7g^6 \cdot 4x = 28x \cdot (2x^2 - 7)^6 \quad (5)$$

d) Es handelt sich um einen Bruch; daher muss die Quotientenregel verwendet werden.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 5}{x^2 + 1}$$

Ich schreibe zunächst Zähler- und Nennerfunktion auf sowie deren Ableitungen.

$$\begin{aligned}u(x) &= 2x^2 - 5x - 5 \Rightarrow u'(x) = 4x - 5 \\v(x) &= x^2 + 1 \Rightarrow v'(x) = 2x\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse setzen wir ein und bestimmen $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(4x - 5) \cdot (x^2 + 1) - (2x^2 - 5x - 5) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 4x - 5x^2 - 5 - 4x^3 + 10x^2 + 10x}{(x^2 + 1)^2} \\ f'(x) &= \frac{5x^2 + 14x - 5}{(x^2 + 1)^2} \quad (5) \end{aligned}$$

e) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = e^{\cos x} \cdot \sin x$$

Ich schreibe die Faktoren sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned} u(x) = e^{\cos x} &\Rightarrow u'(x) = \dots \\ v(x) = \sin x &\Rightarrow v'(x) = \cos x \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $u'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{aligned} g(x) = \cos x &\Rightarrow g'(x) = -\sin x \\ u(g) = e^g &\Rightarrow u'(g) = e^g \end{aligned}$$

$$u'(x) = u'(g) \cdot g'(x) = e^g \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \cdot \sin x$$

Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= -e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \sin x + e^{\cos x} \cdot \cos x \\ f'(x) &= e^{\cos x} \cdot (-\sin^2 x + \cos x) \quad (5) \end{aligned}$$

0.17 DIFFRECH-16

Geben Sie die erste Ableitung der Funktionen an!

a)

$$f(x) = 2x^5 - 6x^2 - 3e^x + 4e^2 - 3x$$

b)

$$f(x) = 5x^2 - \frac{3}{x}$$

c)

$$f(x) = (3x^2 - 2)^6$$

d)

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2}$$

e)

$$f(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

Lösung:

a) Lösung mit Summenregel, Potenzfunktion, e -Funktion.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^5 - 6x^2 - 3e^x + 4e^2 - 3x \\f'(x) &= 10x^4 - 12x - 3e^x - 3\end{aligned}$$

b) Zur Lösung formt man den Bruch in der Funktion zweckmäßigerweise in die Potenzschreibweise um.

$$f(x) = 5x^2 - \frac{3}{x} = 5x^2 - 3x^{-1}$$

Jetzt kann die Funktion mit Summenregel und der Potenzfunktion als Grundfunktion abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 - 3x^{-1} \\f'(x) &= 10x + 3x^{-2} = 10x + \frac{3}{x^2} \quad (5)\end{aligned}$$

c) Die Ableitung erfolgt zweckmäßigerweise mit der Kettenregel.

$$f(x) = (3x^2 - 2)^6$$

Wir bilden innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen:

$$\begin{aligned}g(x) &= 3x^2 - 2 \Rightarrow g'(x) = 6x \\f(g) &= g^6 \Rightarrow f'(g) = 6g^5\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich die 1. Ableitung:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 6g^5 \cdot 6x = 36x \cdot (3x^2 - 2)^6 \quad (5)$$

d) Es handelt sich um einen Bruch; daher muss die Quotientenregel verwendet werden.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2}$$

Ich schreibe zunächst Zähler- und Nennerfunktion auf sowie deren Ableitungen.

$$\begin{aligned}u(x) &= 2x^2 - 3x + 4 \Rightarrow u'(x) = 4x - 3 \\v(x) &= x^2 - 2 \Rightarrow v'(x) = 2x\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse setzen wir ein und bestimmen $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(4x - 3) \cdot (x^2 - 2) - (2x^2 - 3x + 4) \cdot 2x}{(x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{4x^3 - 8x - 3x^2 + 6 - 4x^3 + 6x^2 - 8x}{(x^2 - 2)^2} \\ f'(x) &= \frac{3x^2 - 16x + 6}{(x^2 - 2)^2} \quad (5) \end{aligned}$$

e) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

Ich schreibe die Faktoren sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned} u(x) = e^{\sin x} &\Rightarrow u'(x) = \dots \\ v(x) = \cos x &\Rightarrow v'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $u'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{aligned} g(x) = \sin x &\Rightarrow g'(x) = \cos x \\ u(g) = e^g &\Rightarrow u'(g) = e^g \end{aligned}$$

$$u'(x) = u'(g) \cdot g'(x) = e^g \cdot \cos x = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

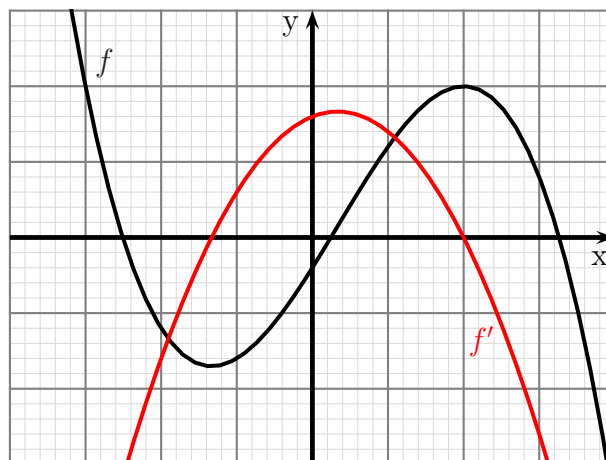
Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x) \\ f'(x) &= e^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x) \quad (5) \end{aligned}$$

0.18 DIFFRECH-17a

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

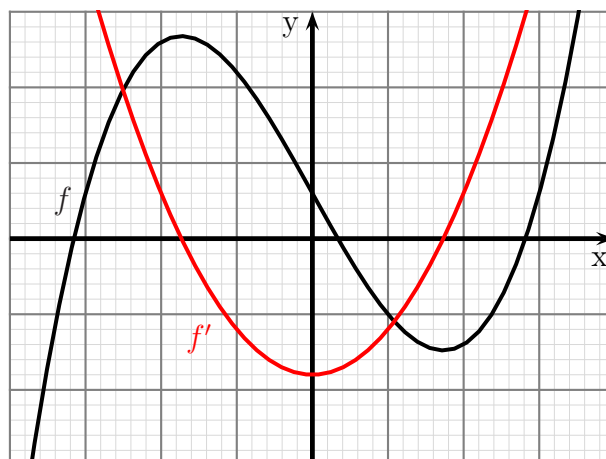
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.19 DIFFRECH-17b

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

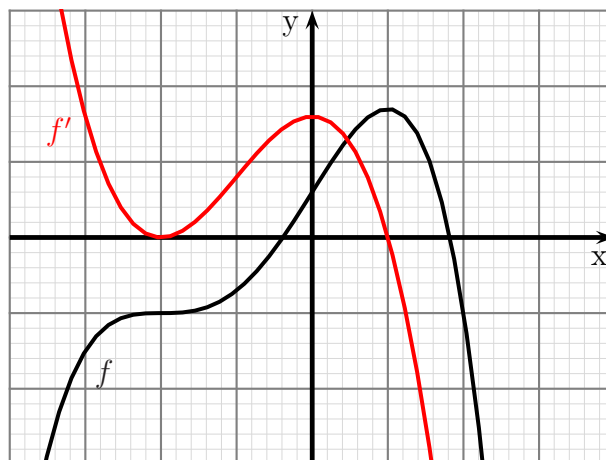
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.20 DIFFRECH-17c

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

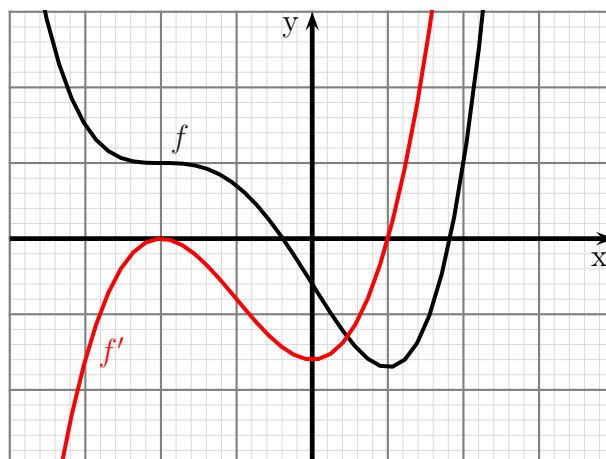
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.21 DIFFRECH-17d

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

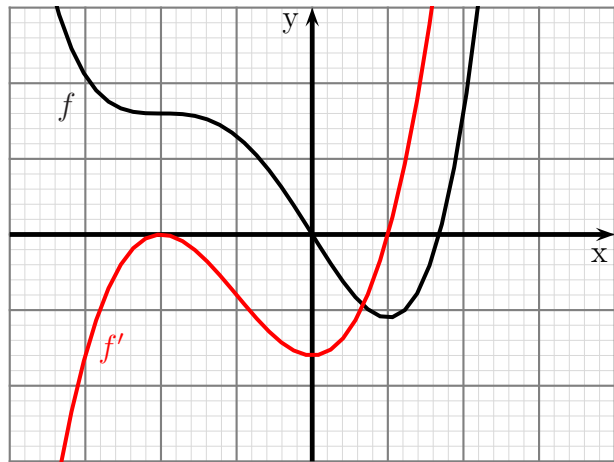
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.22 DIFFRECH-17e

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

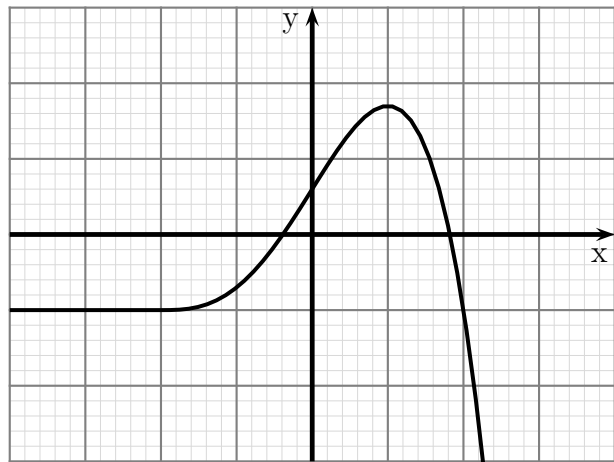
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.23 DIFFRECH-17f

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

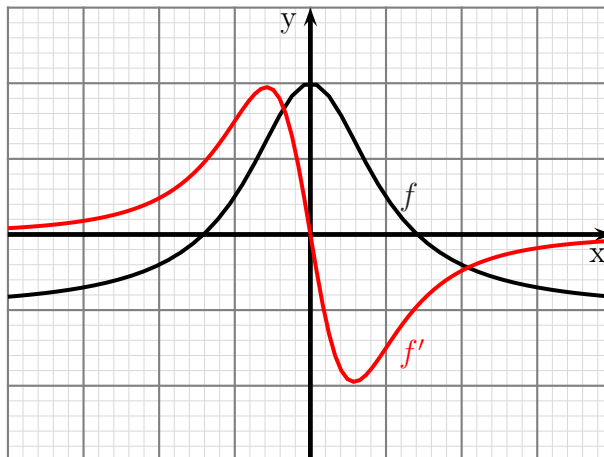
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.24 DIFFRECH-18a

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

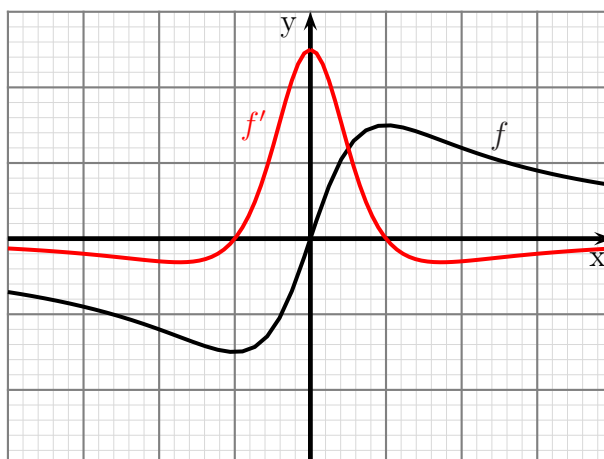
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.25 DIFFRECH-18b

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

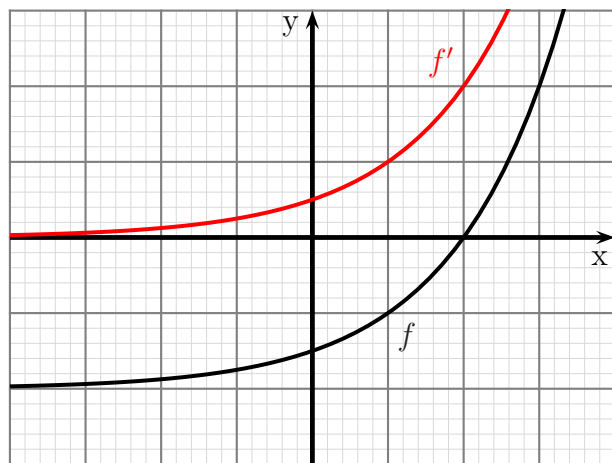
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.26 DIFFRECH-18c

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

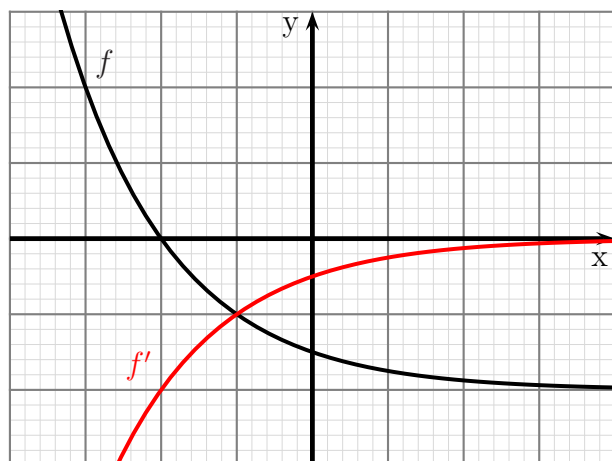
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.27 DIFFRECH-18d

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

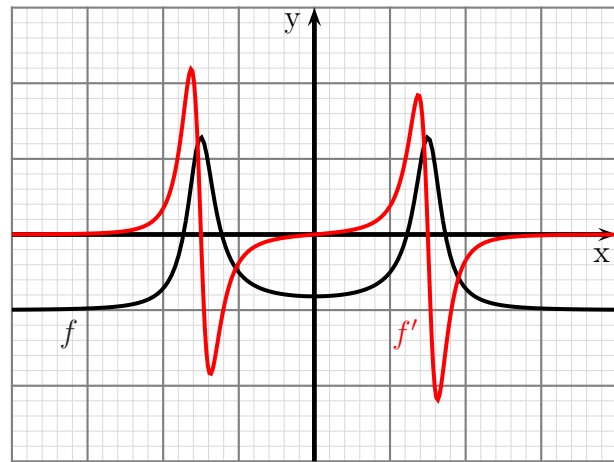
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.28 DIFFRECH-18e

Nebstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

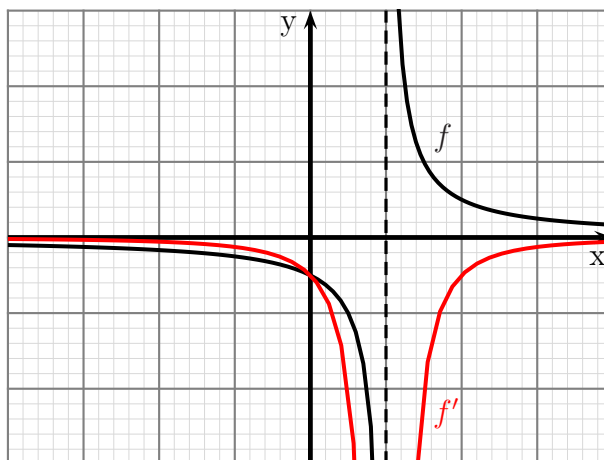
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.29 DIFFRECH-19a

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

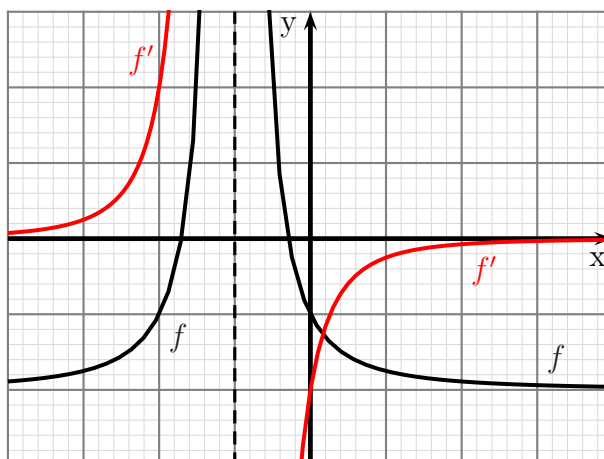
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.30 DIFFRECH-19b

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

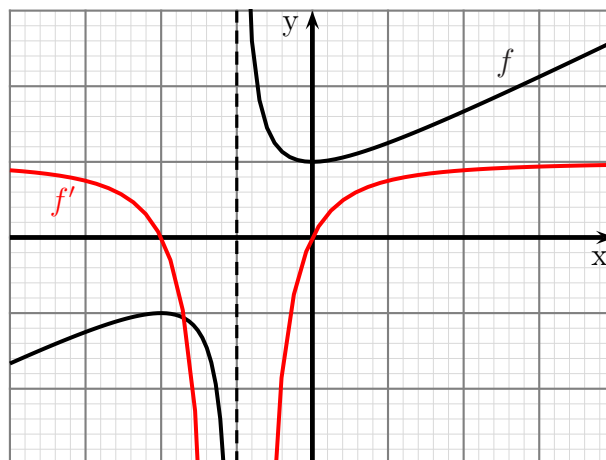
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.31 DIFFRECH-19c

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

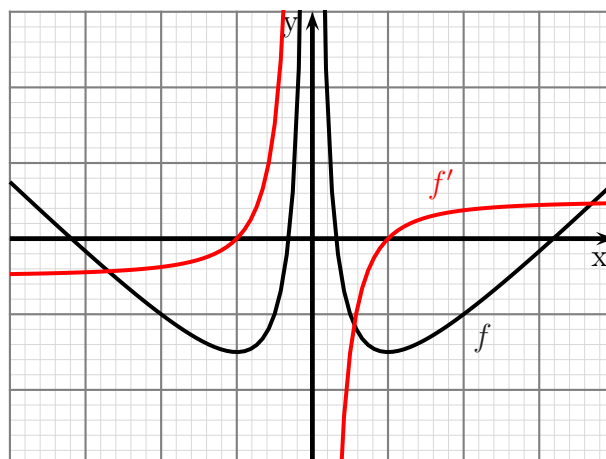
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.32 DIFFRECH-19d

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

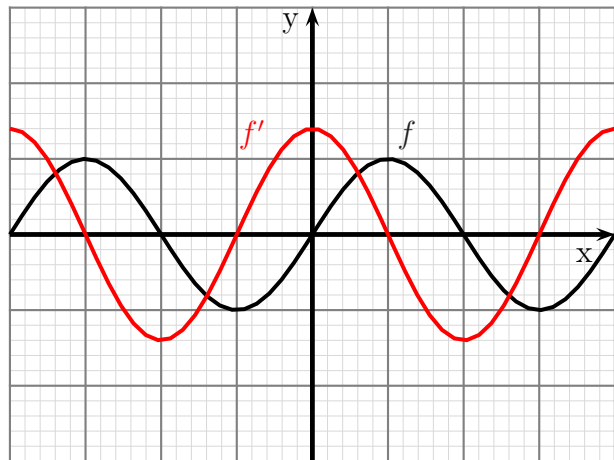
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.33 DIFFRECH-20a

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

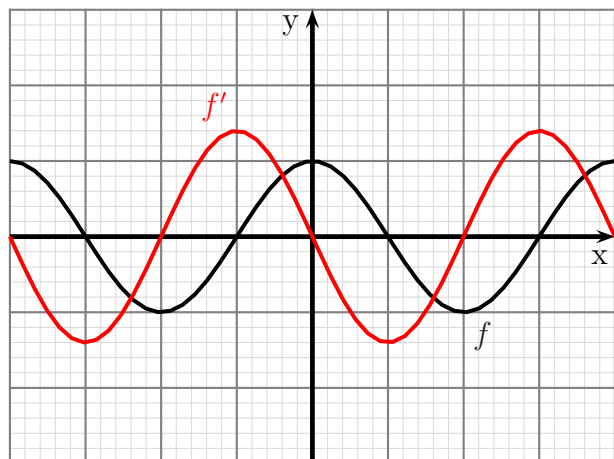
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.34 DIFFRECH-20b

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

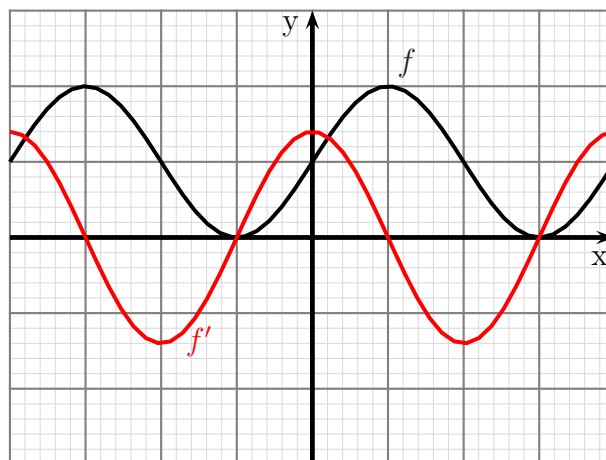
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.35 DIFFRECH-20c

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

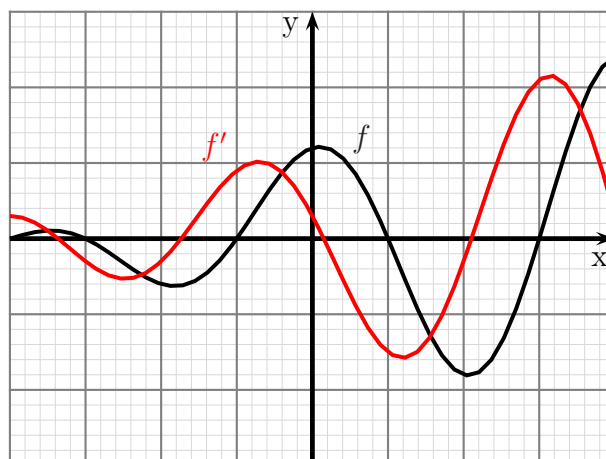
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.36 DIFFRECH-20d

Nebenstehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

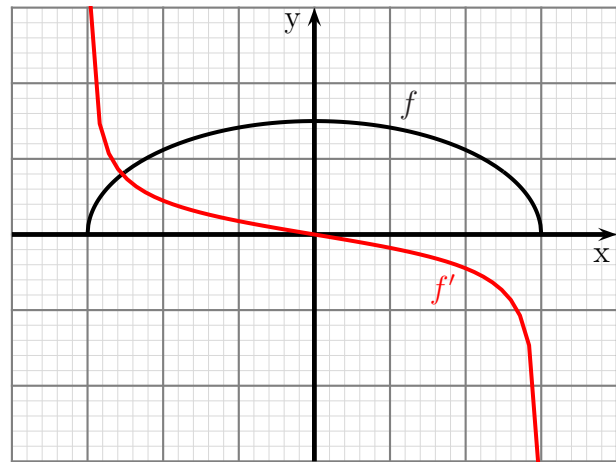
Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.37 DIFFRECH-20e

Nebensiehend ist der Funktionsgraph einer Funktion $f(x)$ dargestellt. Skizzieren Sie in dem Diagramm den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$!

Ein Maßstab ist an den Achsen nicht erkennbar. Das Raster dient lediglich dazu, die Skizze besser mit dem gegebenen Graphen in einen Zusammenhang bringen zu können. (10 P.)



0.38 DIFFRECH-21a

Geben Sie die **erste** und die **zweite** Ableitung der nachfolgenden Funktionen an!
(je 5 P.)

a)

$$f(x) = 3x^6 - 5x^4 + \pi^2 - x - 3$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

c)

$$f(x) = (3x - 5)^2$$

d)

$$f(x) = 5 \cdot (3x^3 - 5x^2 + 2x - 1)$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^6 - 5x^4 + \pi^2 - x - 3 \\ f'(x) &= 18x^5 - 20x^3 - 1 \\ f''(x) &= 90x^4 - 60x^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^3} = x^{-3} \\ f'(x) &= -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4} \\ f''(x) &= 12x^{-5} = \frac{12}{x^5} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25 \\ f'(x) &= 18x - 30 \\ f''(x) &= 18 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \cdot (3x^3 - 5x^2 + 2x - 1) & \text{oder: } 15x^3 - 25x^2 + 10x - 5 \\ f'(x) &= 5 \cdot (9x^2 - 10x + 2) & \text{oder: } 45x^2 - 50x + 10 \\ f''(x) &= 5 \cdot (18x - 10) & \text{oder: } 90x - 50 \end{aligned}$$

0.39 DIFFRECH-21b

Geben Sie die **erste** und die **zweite** Ableitung der nachfolgenden Funktionen an!
(je 5 P.)

a)

$$f(x) = x^7 - 4x^5 + x - e^3 + 3^3$$

b)

$$f(x) = \frac{2}{x^4}$$

c)

$$f(x) = (2x - 5) \cdot (x^2 + 1)$$

d)

$$f(x) = (2x^4 - 4x^2 + 8x - 1) \cdot 2$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^7 - 4x^5 + x - e^3 + 3^3 \\ f'(x) &= 7x^6 - 20x^4 + 1 \\ f''(x) &= 42x^5 - 80x^3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{x^4} = 2x^{-4} \\ f'(x) &= -8x^{-5} = -\frac{8}{x^5} \\ f''(x) &= 40x^{-6} = \frac{40}{x^6} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x - 5) \cdot (x^2 + 1) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 5 \\ f'(x) &= 6x^2 - 10x + 2 \\ f''(x) &= 12x - 10 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^4 - 4x^2 + 8x - 1) \cdot 2 & \text{oder:} & \quad 4x^4 - 8x^2 + 16x - 2 \\ f'(x) &= (8x^3 - 8x + 8) \cdot 2 & \text{oder:} & \quad 16x^3 - 16x + 16 \\ f''(x) &= (24x^2 - 8) \cdot 2 & \text{oder:} & \quad 48x^2 - 16 \end{aligned}$$

0.40 DIFFRECH-21c

Geben Sie die **erste** und die **zweite** Ableitung der nachfolgenden Funktionen an!
(je 5 P.)

a)

$$f(x) = 3x^6 - 2x^3 + 0,5x^2 + 2e^3 - \pi \cdot x$$

b)

$$f(x) = \frac{3}{x^3}$$

c)

$$f(x) = (x^3 - 5x) \cdot (x^2 - 3)$$

d)

$$f(x) = 4 \cdot (0,5x^4 - 4x^3 + x - 5)$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^6 - 2x^3 + 0,5x^2 + 2e^3 - \pi \cdot x \\ f'(x) &= 18x^5 - 6x^2 + x - \pi \\ f''(x) &= 90x^4 - 12x + 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{x^3} = 3x^{-3} \\ f'(x) &= -9x^{-4} = -\frac{9}{x^4} \\ f''(x) &= 36x^{-5} = \frac{36}{x^5} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - 5x) \cdot (x^2 - 3) \\ &= x^5 - 3x^3 - 5x^3 + 15x \\ &= x^5 - 8x^3 + 15x \\ f'(x) &= 5x^4 - 24x^2 + 15 \\ f''(x) &= 20x^3 - 48x \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \cdot (0,5x^4 - 4x^3 + x - 5) & \text{oder: } 2x^4 - 16x^3 + 4x - 20 \\ f'(x) &= 4 \cdot (2x^3 - 12x^2 + 1) & \text{oder: } 8x^3 - 48x^2 + 4 \\ f''(x) &= 4 \cdot (6x^2 - 24x) & \text{oder: } 24x^2 - 96x \end{aligned}$$

0.41 DIFFRECH-21d

Geben Sie die **erste** und die **zweite** Ableitung der nachfolgenden Funktionen an!
(je 5 P.)

a)

$$f(x) = 0,125x^8 - 0,4x^5 + \pi \cdot x^3 + 3e^2 - x$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{3x^3}$$

c)

$$f(x) = (2x^2 - 4x) \cdot (3x^2 + 6x)$$

d)

$$f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 3x - 1}{3}$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,125x^8 - 0,4x^5 + \pi \cdot x^3 + 3e^2 - x \\ f'(x) &= x^7 - 2x^4 + 3\pi x^2 - 1 \\ f''(x) &= 7x^6 - 8x^3 + 6\pi x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3x^3} = \frac{1}{3} \cdot x^{-3} \\ f'(x) &= -x^{-4} = -\frac{1}{x^4} \\ f''(x) &= 4x^{-5} = \frac{4}{x^5} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 4x) \cdot (3x^2 + 6x) \\ &= 6x^4 + 12x^3 - 12x^3 - 24x^2 \\ &= 6x^4 - 24x^2 \\ f'(x) &= 24x^3 - 48x \\ f''(x) &= 72x^2 - 48 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 3x - 1}{3} & \text{oder: } \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{3} \\ f'(x) &= \frac{6x^2 - 12x + 3}{3} & \text{oder: } 2x^2 - 4x + 1 \\ f''(x) &= \frac{12x - 12}{3} & \text{oder: } 4x - 4 \end{aligned}$$

0.42 DIFFRECH-21e

Geben Sie die **erste** und die **zweite** Ableitung der nachfolgenden Funktionen an!
(je 5 P.)

a)

$$f(x) = 0,4x^5 - \frac{2x^3}{3} + 2\pi x^2 - x - e^3 + 1$$

b)

$$f(x) = \frac{2}{5x^2}$$

c)

$$f(x) = (2x^2 - 3x)^2$$

d)

$$f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 5x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^6$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,4x^5 - \frac{2x^3}{3} + 2\pi x^2 - x - e^3 + 1 \\ f'(x) &= 2x^4 - 2x^2 + 4\pi x - 1 \\ f''(x) &= 8x^3 - 4x + 4\pi \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{5x^2} = \frac{2}{5}x^{-2} \\ f'(x) &= -\frac{4}{5}x^{-3} = -\frac{4}{5x^3} \\ f''(x) &= \frac{12}{5}x^{-4} = \frac{12}{5x^4} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 3x)^2 = 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 \\ f'(x) &= 16x^3 - 36x^2 + 18x \\ f''(x) &= 48x^2 - 72x + 18 \end{aligned}$$

d)

$$f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 5x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^6$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 4x^5$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{7}{3}} - 20x^4$$

0.43 DIFFRECH-21f

Geben Sie die **erste** Ableitung der nachfolgenden Funktionen an!
(je 5 P.)

a)

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x - 1$$

b)

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

c)

$$f(x) = (x^2 + 5)^{10}$$

d)

$$f(x) = x^2 \cdot \cos x$$

e)

$$f(x) = e^{x^2+3x}$$

f)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 - 5x^3 + 2x - 1 \\ f'(x) &= 15x^4 - 15x^2 + 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{x} \\ u(x) = \sin x &\Rightarrow u'(x) = \cos x \\ v(x) = x &\Rightarrow v'(x) = 1 \\ f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(\cos x) \cdot x - 1 \cdot \sin x}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 + 5)^{10} \\g(x) = x^2 + 5 &\Rightarrow g'(x) = 2x \\f(g) = g^{10} &\Rightarrow f'(g) = 10g^9 \\f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\&= 10g^9 \cdot 2x \\&= 10 \cdot (x^2 + 5)^9 \cdot 2x \\f'(x) &= 20x \cdot (x^2 + 5)^9\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \cdot \cos x \\u(x) = x^2 &\Rightarrow u'(x) = 2x \\v(x) = \cos x &\Rightarrow v'(x) = -\sin x \\f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\&= 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) \\f'(x) &= 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{x^2+3x} \\g(x) = x^2 + 3x &\Rightarrow g'(x) = 2x + 3 \\f(g) = e^g &\Rightarrow f'(g) = e^g \\f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\&= e^g \cdot (2x + 3) \\f'(x) &= e^{x^2+3x} \cdot (2x + 3)\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} \\ u(x) = x^2 + 2x + 1 &\Rightarrow u'(x) = 2x + 2 \\ v(x) = x^2 - 2x + 1 &\Rightarrow v'(x) = 2x - 2 \\ f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 - (2x^3 + 2x^2 - 2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 2x + 1)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 - 2x + 1)^2} \\ &= \frac{-4 \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 - 2x + 1)^2} \\ &= \frac{-4 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)}{(x - 1)^4} \\ f'(x) &= -\frac{4x + 4}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

0.44 DIFFRECH-22a

Leiten Sie **mit Hilfe des Differenzenquotienten** die Ableitung der nachfolgenden Funktion her! (20 P.)

$$f(x) = (x + 3) \cdot (5x - 2)$$

Lösung 1: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = (x + 3) \cdot (5x - 2) = 5x^3 - 2x + 15x - 6 = 5x^2 + 13x - 6 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten gemacht werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(5(x+h)^2 + 13(x+h) - 6\right) - (5x^2 + 13x - 6)}{h} \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x^2 + 2xh + h^2) + 13x + 13h - 6 - 5x^2 - 13x + 6}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 13x + 13h + 5 - 5x^2 - 13x + 6}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10xh + 5h^2 + 13h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (10x + 5h + 13)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h + 13) \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 10x + \lim_{h \rightarrow 0} 5h + \lim_{h \rightarrow 0} 13 \\ &= 10x + 0 + 13 \\ f'(x) &= 10x + 13 \quad (5) \end{aligned}$$

Lösung 2: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = (x + 3) \cdot (5x - 2) = 5x^3 - 2x + 15x - 6 = 5x^2 + 13x - 6 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten gemacht werden, zunächst für die Sekantensteigung m_S .

$$\begin{aligned}
m_S &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} & (2) \\
&= \frac{\left(5(x+h)^2 + 13(x+h) - 6\right) - (5x^2 + 13x - 6)}{h} & (5) \\
&= \frac{5(x^2 + 2xh + h^2) + 13x + 13h - 6 - 5x^2 - 13x + 6}{h} \\
&= \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 13x + 13h + 5 - 5x^2 - 13x + 6}{h} \\
&= \frac{10xh + 5h^2 + 13h}{h} \\
&= \frac{h \cdot (10x + 5h + 13)}{h} \\
m_S &= 10x + 5h + 13 & (5)
\end{aligned}$$

Jetzt kommt die Tangentensteigung als Grenzwertübergang mit $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
m_T &= 10x + 5 \cdot 0 + 13 \\
f'(x) &= 10x + 13 & (5)
\end{aligned}$$

0.45 DIFFRECH-22b

Leiten Sie **mit Hilfe des Differenzenquotienten** die Ableitung der nachfolgenden Funktion her! (20 P.)

$$f(x) = 3x \cdot (5x - 2) - 4 \cdot (x + 3)$$

Lösung 1: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = 3x \cdot (5x - 2) - 4 \cdot (x + 3) = 15x^2 - 6x - 4x - 12 = 15x^2 - 10x - 12 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten gemacht werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(15(x+h)^2 - 10(x+h) - 12) - (15x^2 - 10x - 12)}{h} \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15(x^2 + 2xh + h^2) - 10x - 10h - 12 - 15x^2 + 10x + 12}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{15x^2 + 30xh + 15h^2 - 10x - 10h - 12 - 15x^2 + 10x + 12}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{30xh + 15h^2 - 10h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (30x + 15h - 10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (30x + 15h - 10) \quad (5) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 30x + \lim_{h \rightarrow 0} 15h - \lim_{h \rightarrow 0} 10 \\ &= 30x + 0 - 10 \\ f'(x) &= 30x - 10 \quad (5) \end{aligned}$$

Lösung 2: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = 3x \cdot (5x - 2) - 4 \cdot (x + 3) = 15x^2 - 6x - 4x - 12 = 15x^2 - 10x - 12 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten gemacht werden, zunächst für die Sekantensteigung m_S .

$$\begin{aligned}
m_S &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} & (2) \\
&= \frac{\left(15(x+h)^2 - 10(x+h) - 12\right) - (15x^2 - 10x - 12)}{h} & (5) \\
&= \frac{15(x^2 + 2xh + h^2) - 10x - 10h - 12 - 15x^2 + 10x + 12}{h} \\
&= \frac{15x^2 + 30xh + 15h^2 - 10x - 10h - 12 - 15x^2 + 10x + 12}{h} \\
&= \frac{30xh + 15h^2 - 10h}{h} \\
&= \frac{h \cdot (30x + 15h - 10)}{h} \\
m_S &= 30x + 15h - 10 & (5)
\end{aligned}$$

Jetzt kommt die Tangentensteigung als Grenzwertübergang mit $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
m_T &= 30x + 15 \cdot 0 - 10 \\
f'(x) &= 30x - 10 & (5)
\end{aligned}$$

0.46 DIFFRECH-22c

Leiten Sie **mit Hilfe des Differenzenquotienten** die Ableitung der nachfolgenden Funktion her! (20 P.)

$$f(x) = (2x - 1) \cdot (x + 2)$$

Lösung 1: (fehlt noch)

Lösung 2: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = (2x - 1) \cdot (x + 2) = 2x^2 + 4x - x - 2 = 2x^2 + 3x - 2 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten gemacht werden, zunächst für die Sekantensteigung m_S .

$$\begin{aligned} m_S &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2) \\ &= \frac{\left(2(x+h)^2 + 3(x+h) - 2\right) - (2x^2 + 3x - 2)}{h} \quad (5) \\ &= \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) + 3x + 3h - 2 - 2x^2 - 3x + 2}{h} \\ &= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x + 3h - 2 - 2x^2 - 3x + 2}{h} \\ &= \frac{4xh + 2h^2 + 3h}{h} \\ &= \frac{h \cdot (4x + 2h + 3)}{h} \\ m_S &= 4x + 2h + 3 \quad (5) \end{aligned}$$

Jetzt kommt die Tangentensteigung als Grenzwertübergang mit $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} m_T &= 4x + 2 \cdot 0 + 3 \\ f'(x) &= 4x + 3 \quad (5) \end{aligned}$$

0.47 DIFFRECH-22d

Leiten Sie **mit Hilfe des Differenzenquotienten** die Ableitung der nachfolgenden Funktion her! (20 P.)

$$f(x) = (2x - 1) \cdot x + 2$$

Lösung: Zunächst wird die Funktionsgleichung vereinfacht.

$$f(x) = (2x - 1) \cdot x + 2 = 2x^2 - x + 2 \quad (3)$$

Mit dieser vereinfachten Funktionsgleichung kann nun der Ansatz mit dem Differenzenquotienten gemacht werden, zunächst für die Sekantensteigung m_S .

$$\begin{aligned} m_S &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2) \\ &= \frac{\left(2(x+h)^2 - (x+h) + 2\right) - (2x^2 - x + 2)}{h} \quad (5) \\ &= \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - x - h + 2 - 2x^2 + x - 2}{h} \\ &= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - x - h + 2 - 2x^2 + x - 2}{h} \\ &= \frac{4xh + 2h^2 - h}{h} \\ &= \frac{h \cdot (4x + 2h - 1)}{h} \\ m_S &= 4x + 2h - 1 \quad (5) \end{aligned}$$

Jetzt kommt die Tangentensteigung als Grenzwertübergang mit $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} m_T &= 4x + 2 \cdot 0 - 1 \\ f'(x) &= 4x - 1 \quad (5) \end{aligned}$$

0.48 DIFFRECH-23

Ein Stein wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geworfen. Er verlässt in der Höhe h_0 über dem Erdboden zum Zeitpunkt $t = 0$ die Hand des Werfers. Die aktuelle Höhe h des Steines beschreibt die Funktion für den senkrechten Wurf:

$$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h_0$$

Hierbei ist $h_0 = 2 \text{ m}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und $v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Ableitung der Höhe nach der Zeit ist die Momentangeschwindigkeit des Steines:

$$v(t) = \frac{dv}{dt} = h^\bullet(t)^1$$

1. Welche Höhe erreicht der Stein maximal?
2. Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Stein auf dem Boden auf?

(20 P.)

Lösung: Zunächst werden die bekannten Werte in die Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} h(t) &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h_0 \\ h(t) &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 2 \text{ m} \quad | \text{ zusammenfassen} \\ h(t) &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 2 \text{ m} \end{aligned}$$

Lösungsteil 1: Die größte Höhe des Steines stellt einen Hochpunkt der Funktion dar. Zu dem Zeitpunkt, an dem der Stein diesen Punkt erreicht, muss daher die erste Ableitung (seine Geschwindigkeit) gleich Null sein.

$$\begin{aligned} h^\bullet(t) &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \\ 0 &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \quad | + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \\ 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad | : \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\ t &= 1 \text{ s} \end{aligned}$$

Da es sich bei der Funktionsgleichung um eine Quadratische Funktion handelt, ist der Funktionsgraph eine Parabel. Der Koeffizient des Quadratischen Term ist **negativ**, die

¹Heißt die Variable, nach der abgeleitet wird, nicht x sondern t , dann kennzeichnet man die Ableitung nicht mit einem Strich, sondern mit einem Punkt.

Parabel ist also nach **unten** geöffnet. Daher hat die Parabel nur einen einzigen Hochpunkt als Extremum (der Scheitelpunkt der Parabel). Auf eine Prüfung mit dem Vorzeichenwechselkriterium kann mit dieser Begründung verzichtet werden.²

Nach einer Sekunde hat der Stein also seinen höchsten Punkt erreicht. Da die konkrete Höhe gefragt ist, muss dieser Wert in die Funktionsgleichung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}h(t) &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 2 \text{ m} \\h(1 \text{ s}) &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1 \text{ s})^2 + 2 \text{ m} \\&= 10 \text{ m} - 5 \text{ m} + 2 \text{ m} \\h_E &= 7 \text{ m}\end{aligned}$$

Ergebnis: **Der Stein fliegt maximal sieben Meter hoch (über dem Erdboden).**

Lösungsteil 2: Jetzt ist die Aufprallgeschwindigkeit auf den Boden gesucht. Dazu wird zunächst der Zeitpunkt des Auftreffens bestimmt. Da der Boden sich auf der Höhe Null befindet, werden die Nullstellen der Funktion berechnet.

$$\begin{aligned}h(t) &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 2 \text{ m} \\0 &= -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 2 \text{ m} \quad | : \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\0 &= t^2 - 2 \text{ s} \cdot t - 0,4 \text{ s}^2 \\t_{1/2} &= 1 \text{ s} \pm \sqrt{1 \text{ s}^2 + 0,4 \text{ s}^2} \\&= 1 \text{ s} \pm \sqrt{1,4 \text{ s}^2} \\t_{1/2} &\approx 1 \text{ s} \pm 1,183 \text{ s} \\t_1 \approx 2,183 \text{ s} \quad t_2 &\approx -0,183 \text{ s}\end{aligned}$$

Das (negative) Ergebnis für t_2 entfällt. Das war zeitlich noch **vor** dem Wurf. Wir müssen also mit $t_1 \approx 2,183 \text{ s}$ weiter rechnen.

Da die Geschwindigkeit (auch die Aufprallgeschwindigkeit) die Ableitung der Höhe nach der Zeit ist, muss der gefundene Wert nur noch dort eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}v_1 = h'(t_1) &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t_1 \\&\approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,183 \text{ s} \\v_1 &\approx -11,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

²**Achtung!** Ohne diese oder eine ähnliche Begründung ist die Prüfung auf Hoch- und Tiefpunkte allerdings unverzichtbar!

Wir erhalten eine **negative** Geschwindigkeit. Das liegt daran, dass wir den Weg in Richtung oben (und damit auch die Geschwindigkeit nach oben) als positiv definiert haben. Der Stein fällt aber nach **unten**. Als Wert für die Praxis interessiert uns aber nur der **Betrag** der Geschwindigkeit.

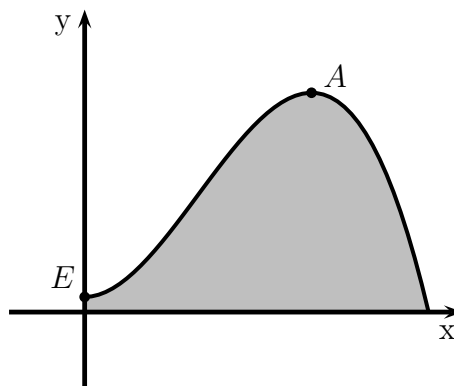
Ergebnis: Der Stein trifft mit einer Geschwindigkeit von etwa $11,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf den Boden.

0.49 DIFFRECH-24

Eine Kinderrutschbahn hat die Form eines Polynoms 3. Grades. Die zugehörige Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = -0,2x^3 + 0,9x^2 + 0,2$$

Die Funktionsgleichung gilt für die Einheit *Meter*. Die Rutschbahn hat oben am Startpunkt *A* der Rutsche einen Hochpunkt. Rechts vom Hochpunkt sind Treppenstufen eingebaut, damit die Kinder zum Startpunkt hochklettern können. Es wird also auf der rechten Seite nach *A* hinaufgeklettert, und gerutscht wird dann von Rutschbahnanfang *A* nach links zum Rutschbahnenende *E* hinunter. (ges.: 40 P.)



1. In den Sicherheitsvorschriften unter DIN 1176 steht:

Die Seitenwangen müssen entlang der Rutschstrecke fortlaufen: bis 1,5 m Rutschenhöhe mindestens 10 cm hoch, bis 2,5 m Rutschenhöhe mindestens 15 cm und über 2,5 m Rutschenhöhe mindestens 50 cm hoch.

Berechnen Sie die Höhe des höchsten Punktes (Punkt *A*) der Rutsche über dem Erdboden und legen Sie die erforderliche Seitenwangenhöhe fest! (19 P.)

2. Weisen Sie durch eine Rechnung nach, dass das Rutschenende bei *E* **waagrecht** ausläuft! (5 P.)

3. In den Sicherheitsvorschriften unter DIN 1176 steht:

Der Abstand vom waagerechten Auslaufteil zum darunterliegenden Boden sollte maximal 35 cm betragen.

Prüfen Sie durch eine Rechnung die Einhaltung dieser Bestimmung nach! (5 P.)

4. Nach den Sicherheitsbestimmungen in DIN 1176 darf der Gefällewinkel an Kinderrutschbahnen nirgendwo größer als 60° sein. Prüfen Sie durch eine Rechnung nach, ob diese Bedingung an der steilsten Stelle der Rutschbahn eingehalten wird! (11 P.)

Lösung:

Teil 1 (Rutschenhöhe): Zunächst werden alle eventuell nötigen Ableitungen der Funktion bestimmt. Sie lauten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0,6 \cdot x^2 + 1,8 \cdot x & (2) \\ f''(x) &= -1,2x + 1,8 & (2) \\ f'''(x) &= -1,2 & (2) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für einen Hochpunkt ist Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ -0,6 \cdot x_E^2 + 1,8 \cdot x_E &= 0 \quad | : (-0,6) \\ x_E^2 - 3x_E &= 0 \quad | (x_E \text{ ausklammern}) \\ x_E \cdot (x_E - 3) &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Es gibt einen Lehrsatz, der besagt:

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Der linke Faktor x_E liefert sofort die Lösung: $x_{E1} = 0$

Die zweite Lösung liefert der Klammerausdruck.

$$\begin{aligned} x_E - 3 &= 0 \quad | + 3 \\ x_{E2} &= 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Der Wert $x_{E1} = 0$ ist der Auslauf im Punkt E links unten. Daher muss für x_{E2} untersucht werden, ob tatsächlich ein **Hochpunkt** vorliegt. Dies kann beispielsweise mit der 2. Ableitung oder mit dem Vorzeichenwechselkriterium der 1. Ableitung gemacht werden.

Untersuchung für $x_{E2} = 3$:

Mit 2. Ableitung:

$$f''(3) = -1,2 \cdot 3 + 1,8 = -1,8 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = 3$$

Alternativ mit Vorzeichenwechselkriterium:

$$\begin{aligned} f'(2) &= -0,6 \cdot 2^2 + 1,8 \cdot 2 = 1,2 > 0 \\ f'(4) &= -0,6 \cdot 4^2 + 1,8 \cdot 4 = -2,4 < 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von + nach - \Rightarrow Hochpunkt bei $x_{E2} = 3$ (3)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 3$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(3) = -0,2 \cdot 3^3 + 0,9 \cdot 3^2 + 0,2 = 2,9$$

zusammengefasst: Hochpunkt A(3|2,9) (3)

Ergebnis: Die höchste Stelle der Bahn bei A liegt 2,90 m über dem Boden. Da das mehr als 2,5 m ist, muss die Seitenwangenhöhe nach DIN 1176 mindestens 50 cm betragen. (2)

Teil 2 (Waagerechter Auslauf): Das Rutschenende liegt in E bei $x_{E1} = 0$. Im Teil 1 wurde schon gezeigt, dass $f'(x)$ hier eine **Nullstelle** hat, die Steigung also Null ist und die Funktion daher dort **waagerecht** verläuft. (5)

Alternativ kann man auch den Wert der Ableitung dort ausrechnen:

$$f'(0) = -0,6 \cdot 0^2 + 1,8 \cdot 0 = 0$$

Teil 3 (Abstand vom Boden): Der Rutschenauslauf liegt bei $x_{E1} = 0$. Den Abstand vom Boden liefert der Funktionswert dort.

$$h = f(0) = -0,2 \cdot 0^3 + 0,9 \cdot 0^2 + 0,2 = 0,2 \quad (3)$$

Ergebnis: Der Rutschenauslauf liegt 0,2 m oder 20 cm über dem Erdboden. Damit liegt er unter dem höchstzulässigen Wert von 45 cm. (2)

Teil 4 (maximale Steigung): Die **steilste Stelle** liegt im Wendepunkt. Zur Wendepunktbestimmung muss die zweite Ableitung Null sein.

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \\ -1,2x_W + 1,8 &= 0 & | -1,8 \\ -1,2x_W &= -1,8 & | : (-1,2) \\ x_W &= 1,5 \end{aligned} \quad (3)$$

Mit diesem x -Wert kann die Steigung an der steilsten Stelle berechnet werden:

$$\begin{aligned} f'(x_W) &= -0,6x_W^2 + 1,8x_W \\ &= -0,6 \cdot 1,5^2 + 1,8 \cdot 1,5 \\ f'(1,5) &= 1,35 \end{aligned} \quad (3)$$

Hieraus wird der zugehörige Steigungswinkel berechnet.

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= 1,35 & | \arctan \dots \\ \varphi &= \arctan 1,35 \\ \varphi &\approx 53,47^\circ \end{aligned} \quad (3)$$

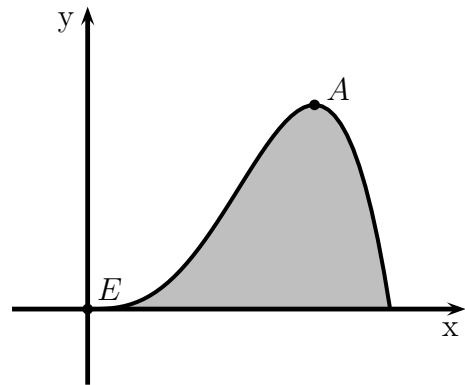
Ergebnis: Dieser Winkel ist kleiner, als die zulässigen 60° , die Rutschbahn liegt demnach im erlaubten und damit gefahrlosen Bereich. (2)

0.50 DIFFRECH-25a

Eine Kinderrutschbahn hat die Form eines Polynoms 4. Grades. Die zugehörige Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = -0,1x^4 + 0,4x^3$$

Die Funktionsgleichung gilt für die Einheit *Meter*. Die Rutschbahn hat oben am Startpunkt *A* der Rutsche einen Hochpunkt. Rechts vom Hochpunkt sind Treppenstufen eingebaut, damit die Kinder zum Startpunkt hochklettern können. Es wird also auf der rechten Seite nach *A* hinaufgeklettert, und gerutscht wird dann von Rutschbahnanfang *A* nach links zum Rutschbahnende *E* hinunter.



1. Weisen Sie durch eine Rechnung nach, dass links unten im Auslauf *E* (im Koordinatenursprung) die Rutschbahn **waagerecht** endet, die Bahn also ungefährlich ausläuft.
2. Berechnen Sie die Höhe des höchsten Punktes (Punkt *A*) der Rutsche über dem Erdboden!

(20 P.)

Lösung: Auf jeden Fall wird die Ableitung der Funktion benötigt. Sie lautet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0,1 \cdot 4 \cdot x^3 + 0,4 \cdot 3 \cdot x^2 \\ f'(x) &= -0,4 \cdot x^3 + 1,2 \cdot x^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Teil 1: Ein **waagerechter** Auslauf am Rutschenende *E* bedeutet eine Ableitung mit dem Wert Null im Koordinatenursprung (bei *E*).

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0,4 \cdot x^3 + 1,2 \cdot x^2 \\ f'(0) &= -0,4 \cdot 0^3 + 1,2 \cdot 0^2 \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Ergebnis: **Der Auslauf verläuft waagerecht, weil $f'(0) = 0$ ist.** (4)

Teil 2: Notwendige Bedingung für einen Hochpunkt ist Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ -0,4 \cdot x_E^3 + 1,2 \cdot x_E^2 &= 0 \quad | : (-0,4) \\ x_E^3 - 3x_E^2 &= 0 \quad | (x_E^2 \text{ ausklammern}) \\ x_E^2 \cdot (x_E - 3) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Es gibt einen Lehrsatz, der besagt:

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Der linke Faktor x_{E1}^2 liefert sofort die Lösung: $x_{E1} = 0$

Die zweite Lösung liefert der Klammerausdruck.

$$\begin{array}{rcl} x_{E2} - 3 & = & 0 \quad | + 3 \\ x_{E2} & = & 3 \quad (2) \end{array}$$

Der linke Wert $x_{E1} = 0$ ist der bereits bekannte Auslauf. Daher muss für x_{E2} noch untersucht werden, ob tatsächlich ein **Hochpunkt** vorliegt. Dies kann beispielsweise mit dem Vorzeichewechselkriterium gemacht werden.

Untersuchung für $x_{E2} = 3$:

$$\begin{array}{rcl} f'(2) & = & -0,4 \cdot 2^3 + 1,2 \cdot 2^2 = 1,6 > 0 \\ f'(4) & = & -0,4 \cdot 4^3 + 1,2 \cdot 4^2 = -6,4 < 0 \end{array}$$

Vorzeichenwechsel von + nach - \Rightarrow Hochpunkt bei $x_{E2} = 3$ (3)

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 3$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(3) = -0,1 \cdot 3^4 + 0,4 \cdot 3^3 = 2,7$$

zusammengefasst: Hochpunkt $A(3|2,7)$

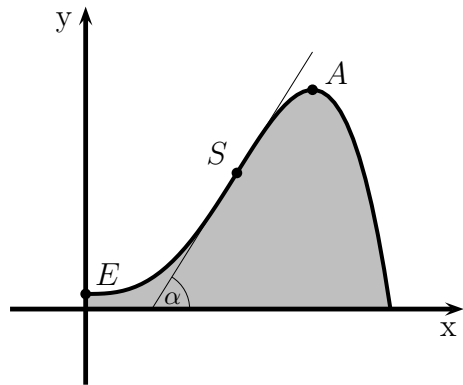
Ergebnis: **Die höchste Stelle der Bahn bei A liegt 2,70 m über dem Boden.** (3)

0.51 DIFFRECH-25b

Eine Kinderrutschbahn hat die Form eines Polynoms 4. Grades. Die zugehörige Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = -0,1x^4 + 0,4x^3 + 0,2$$

Die Funktionsgleichung gilt für die Einheit *Meter*. Die Rutschbahn hat oben am Startpunkt *A* der Rutsche einen Hochpunkt. Rechts vom Hochpunkt sind Treppenstufen eingebaut, damit die Kinder zum Startpunkt hochklettern können. Es wird also auf der rechten Seite nach *A* hinaufgeklettert, und gerutscht wird dann von Rutschbahnanfang *A* nach links zum Rutschbahnende *E* hinunter.



1. Weisen Sie durch eine Rechnung nach, dass links unten im Auslauf *E* (bei $x = 0$) die Rutschbahn **waagerecht** endet, die Bahn also ungefährlich ausläuft. Bestimmen Sie ebenfalls **rechnerisch**, in welcher Höhe über dem Erdboden die Bahn bei *E* endet. Nach den Sicherheitsvorschriften in DIN 1176 soll diese Höhe nicht mehr als 35 Zentimeter betragen.
2. Die steilste Stelle *S* der Rutschbahn liegt bei $x_s = 2$. Nach den Sicherheitsvorschriften in DIN 1176 darf der Gefällewinkel α an Kinderrutschbahnen nirgendwo steiler als 60° sein. Prüfen Sie durch eine Rechnung nach, ob diese Bedingung an der steilsten Stelle der Rutschbahn eingehalten wird!
3. Wie hoch über dem Boden liegt der höchste Punkt *A* dieser Bahn?

(30 P.)

Lösung Teil 1: (10)

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,1x^4 + 0,4x^3 + 0,2 \\ f'(x) &= -0,4x^3 + 1,2x^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Die Bahn endet bei $x = 0$. Dort muss die Steigung bestimmt werden.

$$f'(0) = -0,4 \cdot 0^3 + 1,2 \cdot 0^2 = 0 \quad (2)$$

Die Steigung bei *E* ist Null. \Rightarrow Die Bahn endet waagerecht. (2)

$$h_E = f(0) = -0,1 \cdot 0^4 + 0,4 \cdot 0^3 + 0,2 = 0,2 \quad (2)$$

Die Bahn endet 20 Zentimeter über dem Erdboden und erfüllt hiermit die Sicherheitsvorschriften. (2)

Lösung Teil 2: (7)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -0,4x^3 + 1,2x^2 \\
f'(2) &= -0,4 \cdot 2^3 + 1,2 \cdot 2^2 \\
f'(2) &= 1,6
\end{aligned} \tag{3}$$

Der zugehörige Winkel muss berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\tan \alpha &= m \\
\tan \alpha &= 1,6 \quad | \arctan \dots \\
\alpha &= \arctan 1,6 \\
\alpha &\approx 57,995^\circ
\end{aligned} \tag{3}$$

Das ist weniger als die zulässigen 60° . \Rightarrow Die Sicherheit ist gegeben. (1)

Lösung Teil 3: (13)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -0,4x^3 + 1,2x^2 \\
f''(x) &= -1,2x^2 + 2,4x
\end{aligned} \tag{2}$$

Notwendige Bedingung für ein Maximum ist das Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned}
f'(x_E) &= 0 \\
-0,4x_E^3 + 1,2x_E^2 &= 0 \quad | : (-0,4) \\
x_E^3 - 3x_E^2 &= 0 \\
x_E^2 \cdot (x_E - 3) &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

$$\begin{aligned}
x_{E1} &= 0 \\
x_{E2} - 3 &= 0 \quad | + 3 \\
x_{E2} &= 3
\end{aligned} \tag{2}$$

Die Lösung $x_{E1} = 0$ kommt hier nicht in Betracht, da die Bahn dort endet. Es muss daher nur $x_{E2} = 3$ auf einen Hochpunkt untersucht werden.

$$f''(3) = -1,2 \cdot 3^2 + 2,4 \cdot 3 = -3,6 < 0$$

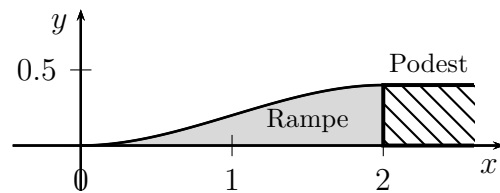
Da die zweite Ableitung bei $x_a = 3$ **kleiner** als Null ist, liegt ein **Hochpunkt** vor. (2)

$$h_A = f(3) = -0,1 \cdot 3^4 + 0,4 \cdot 3^3 + 0,2 = 2,9$$

Der Punkt A liegt 2,9 Meter über dem Erdboden. (3)

0.52 DIFFRECH-26

An ein 40 Zentimeter hohes Podest soll eine Rampe angebaut werden, die ein ruhiges ruckelfreies Hinauf- und Hinunterfahren mit Materialwagen ermöglichen soll. Zu diesem Zweck hat die Rampe die Form eines Polynomes dritten Grades und mündet sowohl auf Bodenniveau als auch oben auf dem Podest waagrecht ein. Die waagrecht gemessene Länge der Rampe beträgt 2 Meter.



a) Weisen Sie durch Rechnungen nach, dass die nachfolgende Funktion diese Bedingungen erfüllt! (Sie soll am linken und rechten Ende jeweils eine waagerechte Tangente haben, sie soll am linken Ende die Höhe Null und am rechten Ende die Höhe 40 cm haben.)

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2$$

Diese Funktionsgleichung gilt für die Einheit *Meter*.

b) Damit es für die Materialwagen nicht zu steil wird, darf die Steigung maximal 32 % betragen. Prüfen Sie durch eine Rechnung, ob die vorgesehene Rampe diese Bedingung erfüllt. Die steilste Stelle der Rampe liegt genau in ihrer Mitte. (20 P.)

Lösung: Zunächst wird die Ableitung benötigt.

$$f'(x) = -0,3x^2 + 0,6x \quad (4)$$

Teil 1: Die Steigung und der Funktionswert muss jeweils bei 0 und 2 berechnet werden.

$$\begin{aligned} f'(0) &= -0,3 \cdot 0^2 + 0,6 \cdot 0 = 0 \quad (\text{Passt.}) \quad (2) \\ f'(2) &= -0,3 \cdot 2^2 + 0,6 \cdot 2 = 0 \quad (\text{Passt.}) \quad (2) \\ f(0) &= -0,1 \cdot 0^3 + 0,3 \cdot 0^2 = 0 \quad (\text{Passt.}) \quad (2) \\ f(2) &= -0,1 \cdot 2^3 + 0,3 \cdot 2^2 = 0,4 \quad (\text{Das sind 40 cm. Passt.}) \quad (2) \end{aligned}$$

Alle Bedingungen sind erfüllt, die Funktion passt. (2)

Teil 2: Die Mitte zwischen 0 und 2 ist 1. (2)

Die Steigung bei $x = 1$ wird berechnet.

$$f'(1) = -0,3 \cdot 1^2 + 0,6 \cdot 1 = 0,3 = 30 \% \quad (2)$$

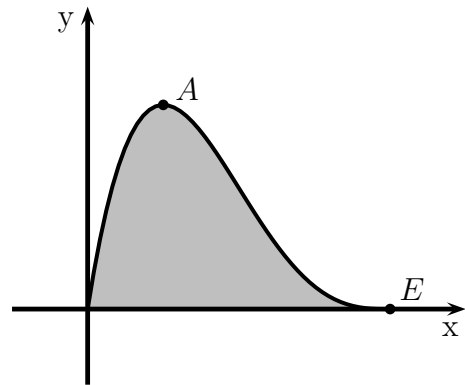
Mit 30 % liegt die maximale Steigung im zulässigen Bereich. (2)

0.53 DIFFRECH-27

Eine Kinderrutschbahn hat die Form eines Polynoms 4. Grades. Die zugehörige Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = -0,1x^4 + 1,2x^3 - 4,8x^2 + 6,4x$$

Die Funktionsgleichung gilt für die Einheit *Meter*. Die Rutschbahn hat oben am Startpunkt *A* der Rutsche einen Hochpunkt. Links vom Hochpunkt sind Treppenstufen eingebaut, damit die Kinder zum Startpunkt hochklettern können. Es wird also auf der linken Seite nach *A* hinaufgeklettert, und gerutscht wird dann von Rutschbahnanfang *A* nach rechts zum Rutschbahnenende *E* hinunter.



1. Weisen Sie durch eine Rechnung nach, dass rechts unten im Auslauf *E* die Rutschbahn **waagerecht** endet, die Bahn also ungefährlich ausläuft.
2. Nach den Sicherheitsbestimmungen in DIN 1176 darf der Gefällewinkel an Kinder-rutschbahnen nirgendwo steiler als 60° sein. Das entspricht einer Steigung von $\sqrt{3}$. Prüfen Sie durch eine Rechnung nach, ob diese Bedingung an der steisten Stelle eingehalten wird!

(20 P.)

Lösung:

0.54 DIFFRECH-28

Am Strand von Kellenhusen an der Ostsee steht eine Skulptur aus Beton, die einen stilisierten Fisch darstellt. Sie besteht aus drei Teilstücken, die jeweils durch eine senkrechte Fuge voneinander abgetrennt sind. Der linke Teil stellt den Schwanz, der mittlere den Bauch und der rechte den Kopf des Fisches dar. Alle Teile bestehen aus Betonplatten mit einer Plattenstärke von 30 cm. Sie ragen 80 cm tief in das Erdreich hinein, damit sie nicht umfallen können. Das Schwanzteil hat eine Länge von 4 m, das Bauchteil von 8,6 m.

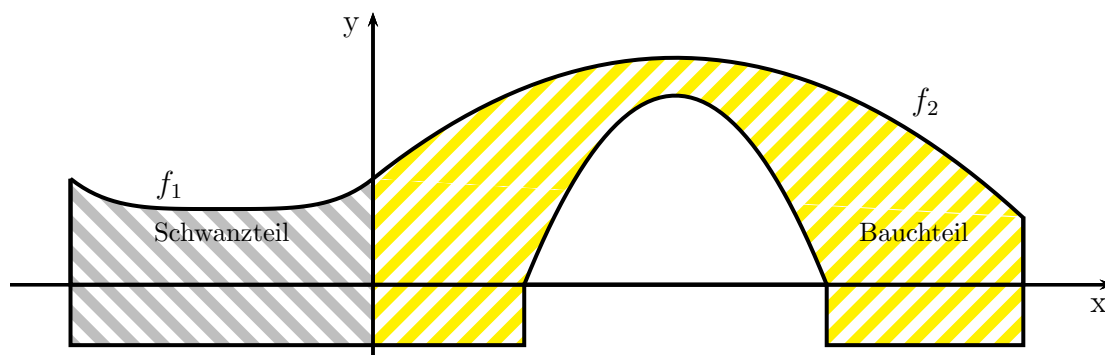


Fischskulptur von Kellenhusen

Legt man auf die Frontfläche der Skulptur ein Koordinatensystem so, dass die x -Achse auf dem Boden und die y -Achse auf der Trennfuge zwischen Schwanz und Bauch liegt, dann werden die Oberkanten des Schwanzes und des Bauches durch diese Funktionen dargestellt:

$$\begin{aligned}\text{Schwanzteil: } f_1(x) &= 0,025x^4 + 0,2x^3 + 0,6x^2 + 0,8x + 1,4 \\ \text{Bauchteil: } f_2(x) &= -0,1x^2 + 0,8x + 1,4\end{aligned}$$

Hierbei ist 1 Meter die verwendete Einheit.



- a) Weisen Sie durch Rechnungen nach, dass die Oberkanten von Schwanzteil und Bauchteil an der Trennfuge
1. ohne Stufe und
 2. ohne Knick
- aneinander passen. (10 P.)
- b) Bestimmen Sie durch Rechnungen die Höhe des Bauchteiles an der höchsten Stelle über dem Erdboden. (10 P.)

Lösung zu Teil a: Keine Stufe bei $x = 0$ bedeutet **gleiche Funktionswerte** an der Trennfuge, also: $f_1(0) = f_2(0)$.

$$f_1(0) = 0,025 \cdot 0^4 + 0,2 \cdot 0^3 + 0,6 \cdot 0^2 + 0,8 \cdot 0 + 1,4 = 1,4 \quad (1)$$

$$f_2(0) = -0,1 \cdot 0^2 + 0,8 \cdot 0 + 1,4 = 1,4 \quad (1)$$

Beide Punkte liegen 1,4 m über dem Erdboden, es gibt **keine Stufe**. (1)

Kein Knick bei $x = 0$ bedeutet **gleiche Steigung** an der Trennfuge, also: $f'_1(0) = f'_2(0)$.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0,025x^4 + 0,2x^3 + 0,6x^2 + 0,8x + 1,4 \\ f'_1(x) &= 0,1x^3 + 0,6x^2 + 1,2x + 0,8 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f'_1(0) &= 0,1 \cdot 0^3 + 0,6 \cdot 0^2 + 1,2 \cdot 0 + 0,8 \\ f'_1(0) &= 0,8 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -0,1x^2 + 0,8x + 1,4 \\ f'_2(x) &= -0,2x + 0,8 \\ f'_2(0) &= -0,2 \cdot 0 + 0,8 \\ f'_2(0) &= 0,8 \end{aligned} \quad \begin{matrix} (2) \\ (1) \end{matrix}$$

Beide Ableitungen sind gleich, also sind die Steigungen an der Trennfuge gleich. Es gibt **keinen Knick**. (1)

Lösung zu Teil b: Notwendige Bedingung für einen Hochpunkt einer Funktion ist das Null-Werden der zugehörigen Ableitung.

$$\begin{aligned} f'_2(x_E) &= 0 \\ -0,2x_E + 0,8 &= 0 & | -0,8 \\ -0,2x_E &= -0,8 & | : (-0,2) \\ x_E &= 4 \end{aligned} \quad (2)$$

Jetzt muss geprüft werden, ob tatsächlich bei $x_E = 4$ ein **Hochpunkt** vorliegt.

$$\begin{aligned} f'_2(3) &= -0,2 \cdot 3 + 0,8 = 0,2 > 0 \quad (2) \\ f'_2(5) &= -0,2 \cdot 5 + 0,8 = -0,2 < 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $- \Rightarrow$ Hochpunkt bei $x_E = 4$ (1)

Der zugehörige y -Wert wird berechnet.

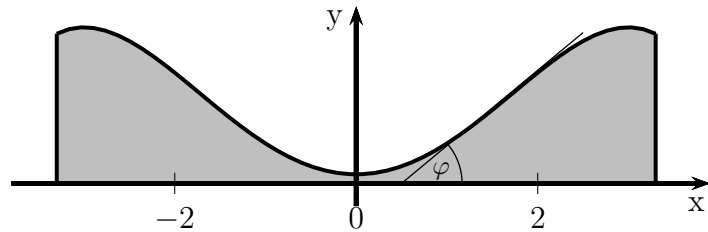
$$\begin{aligned} y_E &= f_2(x_E) \\ &= -0,1 \cdot 4^2 + 0,8 \cdot 4 + 1,4 \\ y_E &= 3 \end{aligned} \quad (2)$$

Ergebnis: Das Bauteil ist maximal 3,00 m hoch. (1)

0.55 DIFFRECH-29

Eine Skaterbahn, die neu erstellt werden soll, stellt im Querschnitt ein spiegelsymmetrisches Polynom 4. Grades dar. Die Funktionsgleichung für dieses Polynom in der Einheit *Meter* lautet:

$$f(x) = -0,02x^4 + 0,36x^2 + 0,1$$



1. An welchen Stellen (Abstand von der Mitte) liegen die höchsten und tiefsten Punkte der Bahn? Wie hoch über dem Erdboden liegen diese Punkte?
2. Aus Sicherheitsgründen darf eine Skaterbahn an der steilsten Stelle nicht steiler als mit einem Steigungswinkel von $\varphi = 40^\circ$ verlaufen. Prüfen Sie nach, ob das bei dieser geplanten Bahn gewährleistet ist.

Lösung:

Für die gesamte Lösung wird die Einheit *Meter* verwendet. Während der Rechnung wird sie weggelassen.

Da im Laufe der Rechnung mehrere Ableitungen benötigt werden, bestimme ich diese vorab.

$$\begin{aligned}f(x) &= -0,02x^4 + 0,36x^2 + 0,1 \\f'(x) &= -0,08x^3 + 0,72x \\f''(x) &= -0,24x^2 + 0,72 \\f'''(x) &= -0,48x\end{aligned}$$

Teil 1: Notwendige Bedingung für einen Hoch- oder Tiefpunkt ist, dass die erste Ableitung dort Null ist.

$$\begin{aligned}f'(x_E) &= 0 \\-0,08x_E^3 + 0,72x_E &= 0\end{aligned}$$

Das ist eine Gleichung **dritten** Grades, die wir ohne weiteres so nicht lösen können. Es fehlt aber das **absolute Glied**, so dass man x_E ausklammern kann.

$$\begin{aligned}-0,08x_E^3 + 0,72x_E &= 0 \\x_E \cdot (-0,08x_E^2 + 0,72) &= 0\end{aligned}$$

Es gibt einen Lehrsatz, der besagt, dass ein **Produkt** Null wird, sobald **einer der Faktoren** Null ist. Der erste Faktor lautet schlicht x_E . Wenn der Null ist haben wir sofort die erste Lösung:

$$x_{E1} = 0$$

Weitere Lösungen erhalten wir, wenn der Klammerterm Null wird.

$$\begin{array}{rcll} -0,08x_E^2 + 0,72 & = & 0 & | -0,72 \\ -0,08x_E^2 & = & -0,72 & | : (-0,08) \\ x_E^2 & = & 9 & | \sqrt{} \\ x_{E2/E3} & = & \pm 3 & \\ x_{E2} = 3 & & x_{E3} = -3 & \end{array}$$

Somit haben wir **drei** Kandidaten für Hoch- und Tiefpunkte erhalten.

Untersuchung für $x_{E1} = 0$:

$$f''(x_{E1}) = -0,24x_{E1}^2 + 0,72 = -0,24 \cdot 0^2 + 0,72 = 0,72 > 0$$

Hier ist die zweite Ableitung **größer** als Null, deshalb haben wir hier einen **Tiefpunkt**.
Die Höhe über dem Erdboden erhalten wir als den Funktionswert $f(x_{E1})$.

$$f(0) = -0,02 \cdot 0^4 + 0,36 \cdot 0^2 + 0,1 = 0,1$$

Die Bahn hat ihren tiefsten Punkt in der Bahnmitte 10 Zentimeter über dem Erdboden.

Untersuchung für $x_{E2} = 3$:

$$f''(x_{E2}) = -0,24x_{E2}^2 + 0,72 = -0,24 \cdot 3^2 + 0,72 = -1,44 < 0$$

Hier ist die zweite Ableitung **kleiner** als Null, deshalb haben wir hier einen **Hochpunkt**.
Die Höhe über dem Erdboden erhalten wir als den Funktionswert $f(x_{E2})$.

$$f(3) = -0,02 \cdot 3^4 + 0,36 \cdot 3^2 + 0,1 = 1,72$$

Die Bahn hat einen Hochpunkt 3 Meter rechts der Mitte 1,72 Meter über dem Erdboden.

Untersuchung für $x_{E3} = -3$:

$$f''(x_{E3}) = -0,24x_{E3}^2 + 0,72 = -0,24 \cdot (-3)^2 + 0,72 = -1,44 < 0$$

Hier ist die zweite Ableitung **kleiner** als Null, deshalb haben wir hier einen **Hochpunkt**.
Die Höhe über dem Erdboden erhalten wir als den Funktionswert $f(x_{E3})$.

$$f(-3) = -0,02 \cdot (-3)^4 + 0,36 \cdot (-3)^2 + 0,1 = 1,72$$

Die Bahn hat einen Hochpunkt 3 Meter links der Mitte 1,72 Meter über dem Erdboden.

Teil 2: Die steilsten Stellen liegen in den Wendepunkten. Diese erhält man als Nullstellen der 2. Ableitung.

$$\begin{array}{rcl}
 f''(x) & = & -0,24x^2 + 0,72 \\
 0 & = & -0,24x_w^2 + 0,72 \quad | + 0,24x_w^2 \\
 0,24x_w^2 & = & 0,72 \quad | : 0,24 \\
 x_w^2 & = & 3 \quad | \sqrt{} \\
 x_{w1/2} & = & \pm\sqrt{3}
 \end{array}$$

Mit der dritten Ableitung kann geprüft werden, ob tatsächlich Wendestellen vorliegen.

$$\begin{array}{ll}
 f'''(+\sqrt{3}) & = -0,48 \cdot \sqrt{3} \approx -0,831 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_{w1} = \sqrt{3} \\
 f'''(-\sqrt{3}) & = -0,48 \cdot (-\sqrt{3}) \approx 0,831 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x_{w2} = -\sqrt{3}
 \end{array}$$

Alternativ zur zweiten Prüfung mit x_{w2} kann auch mit Symmetrie argumentiert werden.

Zur Bestimmung des Steigungswinkels muss zunächst die Steigung an den Wendestellen bestimmt werden.

$$f'(x_{w1}) = -0,08x_{w1}^3 + 0,72x_{w1} = -0,08 \cdot (\sqrt{3})^3 + 0,72 \cdot \sqrt{3} = 0,48 \cdot \sqrt{3} \approx 0,831\,384$$

$$\begin{array}{rcl}
 \tan \varphi_1 & = & f'(x_{w1}) \\
 & = & 0,48 \cdot \sqrt{3} \\
 \varphi_1 & = & \arctan 0,48 \cdot \sqrt{3} \\
 \varphi_1 & \approx & 39,74^\circ
 \end{array}$$

Aus Symmetriegründen ist der Winkel φ_2 bei x_{w2} genau so groß, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen.

Da die Winkel (betragsmäßig) kleiner als 40° sind, ist die Sicherheit gewährleistet.

0.56 DIFFRECH-30

Sie sind mit dem Auto auf einer Landstraße unterwegs. Erlaubt ist eine Geschwindigkeit von $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, sie fahren aber mit $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Da entdecken 20 Meter Sie vor sich eine automatische Geschwindigkeitsmessanlage und treten sofort voll auf die Bremse. Mit welcher Geschwindigkeit fahren Sie an der Messanlage vorbei? Bei trockener Straße können Sie von einer Bremsverzögerung von $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ausgehen.

Zur Lösung sind noch ein paar Informationen zu den physikalischen Grundlagen notwendig.

- Die Weg-Zeit-Funktion für den Bremsvorgang lautet: $s = f(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}a \cdot t^2$. Hierbei ist s der zu einem bestimmten Zeitpunkt zurückgelegte Weg in der Einheit m (Meter), v_0 die Anfangsgeschwindigkeit in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Meter pro Sekunde), t die Variable Zeit in der Einheit s (Sekunden) und a die Bremsverzögerung in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- Die Geschwindigkeitseinheiten können umgerechnet werden: $1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- Die Geschwindigkeit v ist die **Ableitung** der Weg-Zeit-Funktion: $v = f'(t)$. Sie gibt zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit des Fahrzeuges an.

Lösung: Bei der Lösung möchte ich aus Vereinfachungsgründen die Einheiten weglassen. Deshalb wird zunächst die Einheit der Anfangsgeschwindigkeit umgerechnet.

$$v_0 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nun wird die Fahr-Zeit t_{20} für die ersten 20 Meter Fahrstrecke bestimmt.

$$\begin{array}{rcll} s(t_{20}) & = & 20 & \\ v_0 \cdot t_{20} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t_{20}^2 & = & 20 & \\ 25 \cdot t_{20} - 2 \cdot t_{20}^2 & = & 20 & | - 20 \\ -2 \cdot t_{20}^2 + 25 \cdot t_{20} - 20 & = & 0 & | : (-2) \\ t_{20}^2 - 12,5t_{20} + 10 & = & 0 & | p-q\text{-Formel} \\ t_{20_{1/2}} & = & 6,25 \pm \sqrt{6,25^2 - 10} & \\ & \approx & 6,25 \pm 5,39 & \\ t_{20_1} \approx 0,86 & & t_{20_2} \approx 11,64 & \end{array}$$

Die kürzere Zeit $t_{20_1} \approx 0,86$ ist für die Rechnung von Belang. (Die längere Zeit gilt für den nur rechnerisch möglichen Fall, dass die Bremskraft auch nach Erreichen des Stillstandes weiter wirken würde und das Auto dann rückwärts beschleunigen würde.)

Jetzt benötigen wir die Funktionsgleichung für die Momentangeschwindigkeit $v(t)$. Laut Anleitung ist das die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion.

$$\begin{aligned}s(t) &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2}a \cdot t^2 \\s'(t) &= v_0 - at \\v(t) &= s'(t) \\v(t) &= v_0 - at \\v(t) &= 25 - 4t\end{aligned}$$

Hier kann die eben berechnete Zeit $t_{20_1} \approx 0,86$ eingesetzt werden, um die Geschwindigkeit v_{20} nach 20 Metern Bremsung zu berechnen.

$$\begin{aligned}v_{20} &= 25 - 4t_{20_1} \\v_{20} &= 25 - 4 \cdot 0,86 \\&= 21,56\end{aligned}$$

Diese Geschwindigkeit muss zum Schluss noch im Kilometer pro Stunde umgerechnet werden.

$$21,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \cdot 21,56 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 77,616 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ergebnis: Sie fahren mit $77,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ an der Messanlage vorbei. Die Vollbremsung reicht also nicht ganz aus.

0.57 DIFFRECH-31

Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und muss plötzlich bremsen. Bei normaler Witterung beträgt die Bremsverzögerung $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

1. Nach welcher Zeit kommt der PKW zum Stehen?
2. Wie lang ist der Bremsweg?
3. Wie lang ist der Bremsweg, wenn die Bremsverzögerung wegen schlechter Witterung nur $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beträgt?
4. Wie groß ist die Restgeschwindigkeit des PKW bei schlechter Witterung an der Stelle, wo er bei normalem Wetter zum Stehen gekommen wäre?

Zur Lösung sind noch ein paar Informationen zu den physikalischen Grundlagen notwendig.

- Die Weg-Zeit-Funktion für den Bremsvorgang lautet: $s = f(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}a \cdot t^2$ Hierbei ist s der zu einem bestimmten Zeitpunkt zurückgelegte Weg in der Einheit m (Meter), v_0 die Anfangsgeschwindigkeit in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Meter pro Sekunde), t die Variable Zeit in der Einheit s (Sekunden) und a die Bremsverzögerung in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- Die Geschwindigkeitseinheiten können umgerechnet werden: $1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- Die Geschwindigkeit v ist die **Ableitung** der Weg-Zeit-Funktion: $v = f'(t)$. Sie gibt zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit des Fahrzeuges an.

Lösung: Zunächst sollte die in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ angegebene Geschwindigkeit in die Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ umgerechnet werden.

$$45 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{45 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 12,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Wenn man nun immer in diesen Grundeinheiten rechnet, kann man in der Rechnung die Einheit der Einfachheit halber auch weglassen.

zu 1: Wenn der PKW zum Stehen kommt, muss die Geschwindigkeit Null sein. Die Geschwindigkeit gibt die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion an. Die wird zunächst bestimmt.

$$\begin{aligned} s &= f(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}a \cdot t^2 \\ f(t) &= 12,5t - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 \\ f(t) &= 12,5t - 2t^2 \\ f'(t) &= 12,5 - 2 \cdot 2t \\ v &= f'(t) = 12,5 - 4t \end{aligned}$$

Am Ende des Bremsvorgangs ist $v = 0$. Die Zeit für den Bremsvorgang nenne ich t_B .

$$\begin{array}{rcll} v & = & f'(t_B) & = 0 \\ & & 12,5 - 4t_B & = 0 & | -12,5 \\ & & -4t_B & = -12,5 & | : (-4) \\ & & t_B & = 3,125 \end{array}$$

Ergebnis: Nach 3,125 Sekunden kommt das Fahrzeug zum Stehen.

zu 2: Den zugehörigen Bremsweg s_B liefert die Funktion $s(t)$.

$$s_B = f(t_B) = 12,5t_B - 2t_B^2 = 12,5 \cdot 3,125 - 2 \cdot 3,125^2 = 39,0625 - 19,53125 = 19,53125$$

Ergebnis: Nach 19,53 Metern kommt das Fahrzeug zum Stillstand.

zu 3: Bei einem anderen Wert für die Bremsverzögerung a erhalten wir eine andere Weg-Zeit-Funktion. Ich nenne sie $s = f_1(t)$. Ansonsten müssen die gleichen Rechnungen wie unter 1. und 2. erneut durchgeführt werden.

$$\begin{array}{rcll} s & = & f_1(t) & = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}a \cdot t^2 \\ & & f_1(t) & = 12,5t - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2 \\ & & f_1(t) & = 12,5t - t^2 \\ v & = & f_1'(t) & = 12,5 - 2t \end{array}$$

Am Ende des Bremsvorgangs ist $v = 0$. Die Zeit für den Bremsvorgang nenne ich t_{B1} .

$$\begin{array}{rcll} v & = & f_1'(t_{B1}) & = 0 \\ & & 12,5 - 2t_{B1} & = 0 & | -12,5 \\ & & -2t_{B1} & = -12,5 & | : (-2) \\ & & t_{B1} & = 6,25 \end{array}$$

Zwischenergebnis: Nach 6,25 Sekunden kommt das Fahrzeug zum Stehen.

Den zugehörigen Bremsweg s_{B1} liefert die Funktion $s_1(t)$.

$$s_{B1} = f_1(t_{B1}) = 12,5t_{B1} - t_{B1}^2 = 12,5 \cdot 6,25 - 6,25^2 = 78,125 - 39,0625 = 39,0625$$

Ergebnis: Bei schlechter Witterung kommt das Fahrzeug nach 39,06 Metern zum Stillstand.

Anmerkung: Im Vergleich zu trockenem Wetter ist der Bremsweg doppelt so lang.

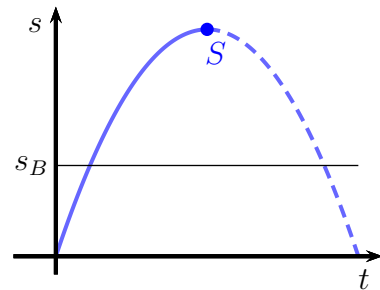
zu 4: Hier ist gefragt, mit welcher Restgeschwindigkeit sich das Fahrzeug noch bewegt, wenn es bei schlechter Witterung 19,53 Meter weit gekommen ist. Dazu wird zunächst die Zeit für diese Strecke berechnet. Ich nenne sie t_{B2} .

$$\begin{array}{rcll} f_1(t_{B2}) & = & s_B & \\ 12,5 \cdot t_{B2} - t_{B2}^2 & = & 19,53 & | - 19,53 \\ -t_{B2}^2 + 12,5 \cdot t_{B2} - 19,53 & = & 0 & | : (-1) \\ t_{B2}^2 - 12,5 \cdot t_{B2} + 19,53 & = & 0 & \end{array}$$

Jetzt kann die p - q -Formel angewendet werden.

$$\begin{aligned} t_{B2_{1/2}} &= 6,25 \pm \sqrt{6,25^2 - 19,53} \\ &\approx 6,25 \pm 4,42 \\ t_{B2_1} &= 1,83 & t_{B2_2} &= 10,67 \end{aligned}$$

An dieser Stelle taucht vermutlich die Frage auf, wieso es hier zwei Lösungen geben soll. Dazu habe ich nebenstehend die Weg-Zeit-Funktion des Bremsvorgangs dargestellt. Mit s_B ist der Bremsweg bei trockener Straße eingezeichnet. Der Bremsvorgang ist nur die **blaue** durchgezogene Linie. Im Scheitelpunkt S der Parabel kommt das Fahrzeug zum Stehen. Würde auch danach noch eine Kraft wie die Bremskraft das Fahrzeug weiter nach hinten ziehen, dann würde es rückwärts beschleunigt und sich in die Richtung bewegen, woher es gekommen ist. Das stellt die gestrichelte Linie dar. Es würde also eine Weile später wieder an der Streckenmarkierung s_B vorbeikommen. Die hierzu gehörende Zeit ist die zweite Lösung der Gleichung. Die ist aber ungültig, weil die Kraftwirkung in dem Moment aufhört, in dem das Fahrzeug zum Stillstand kommt.



(Die hier gemachten Erläuterungen sind natürlich kein Teil der Lösung. Sie sollen nur einem besseren Verständnis der Zusammenhänge dienen.)

Wir halten fest: Nach 1,83 Sekunden kommt das Fahrzeug an dem Punkt vorbei, an dem es bei trockener Straße stehen geblieben wäre.

Jetzt muss nur noch die Momentangeschwindigkeit nach dieser Zeit berechnet werden. Die liefert die Ableitung $v_1(t) = f'_1(t)$.

$$\begin{aligned} v_1(t) &= f'_1(t) \\ v_1(t_{B2_1}) &= f'_1(t_{B2_1}) \\ &= 12,5 - 2t_{B2_1} \\ &= 12,5 - 2 \cdot 1,83 \\ v_1(t_{B2_1}) &= 8,84 \end{aligned}$$

Die berechnete Geschwindigkeit von $8,84 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ muss nun noch in die Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ umgerechnet werden.

$$v_1(t_{B2_1}) = 8,84 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \cdot 8,84 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 31,824 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ergebnis: Bei schlechter Witterung rauscht der PKW noch mit $31,824 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ an der Stelle vorbei, an der er bei trockener Straße zum Stehen gekommen wäre.

0.58 DIFFRECH-32

Unser Verkehrsminister Andreas Scheuer benötigt Ihren Rat. Bei einer Gesetzesnovelle zur Strafverschärfungen im Straßenverkehrsrecht ist ein Formfehler passiert, wodurch die Gesetzesänderung ungültig wurde. Darin war vorgesehen, dass bei einer Geschwindigkeitsüberschreitung innerorts um mehr als $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ der Führerschein für einen Monat abzugeben ist. Herr Scheuer meinte, das sei eine zu hohe Strafe nur für ein „bischen“ zu schnelles Fahren und hat das kürzlich in einem neuen Gesetz verhindert.

Dazu ein Beispiel: Vor einem Kindergarten ist eine Geschwindigkeitsbeschränkung auf $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ausgeschildert. Ein Autofahrer fährt dort etwas mehr als $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu schnell, nämlich mit $51 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein Kind springt unvermittelt auf die Straße. Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Autofahrer das Kind an, wenn er bei zulässiger Geschwindigkeit gerade noch vor dem Kind hätte anhalten können? Gehen Sie bei den Berechnungen von einer Bremsverzögerung von $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ aus. (ges. 40 P.)

Ich empfehle Ihnen, nach folgendem Lösungsleitfaden vorzugehen.

1. Wie lange würde der Bremsvorgang bei der zulässigen Geschwindigkeit von $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ dauern? (10 P.)
2. Wie lang ist der Bremsweg bei der zulässigen Geschwindigkeit von $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? (8 P.)
3. Wie lange würde der Bremsvorgang des zu schnellen Fahrers mit $51 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ dauern, vom Beginn des Bremsens bis er das Kind anfährt? (12 P.)
4. Mit welcher Geschwindigkeit (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) würde er das Kind anfahren? (10 P.)
5. Welchen Rat hätten Sie Herrn Scheuer gegeben?

Zur Lösung sind noch ein paar Informationen zu den physikalischen Grundlagen notwendig.

- Die Weg-Zeit-Funktion für den Bremsvorgang lautet: $s = f(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}a \cdot t^2$. Hierbei ist s der zu einem bestimmten Zeitpunkt zurückgelegte Weg in der Einheit m (Meter), v_0 die Anfangsgeschwindigkeit in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Meter pro Sekunde), t die Variable Zeit in der Einheit s (Sekunden) und a die Bremsverzögerung in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- Die Geschwindigkeitseinheiten können umgerechnet werden: $1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- Die Geschwindigkeit v ist die **Ableitung** der Weg-Zeit-Funktion: $v = f'(t)$. Sie gibt zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit des Fahrzeuges an.

Lösung: Bei der Lösung möchte ich aus Vereinfachungsgründen die Einheiten weglassen. Deshalb werden zunächst die Einheiten der Anfangsgeschwindigkeiten umgerechnet.

$$30 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{30}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8,33 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1)$$

$$51 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{51}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 14,17 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1)$$

zu 1: Zunächst wird die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion als Ableitung der Weg-Zeit-Funktion benötigt. Die Funktion wird mit $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ konkretisiert.

$$\begin{aligned} s &= f(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ f(t) &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 \\ f(t) &= v_0 \cdot t - 2 \cdot t^2 \\ v &= f'(t) = v_0 - 4 \cdot t \end{aligned} \quad (4)$$

Wenn die Geschwindigkeit Null ist, kommt das Fahrzeug zum Stillstand. Damit kann die Bremszeit t_{30} bei $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ Anfangsgeschwindigkeit berechnet werden.

$$\begin{aligned} f'(t_{30}) &= 0 \\ 8,33 - 4 \cdot t_{30} &= 0 & | -8,33 \\ -4 \cdot t_{30} &= -8,33 & | : (-4) \\ t_{30} &= 2,083 \end{aligned} \quad (4)$$

Ergebnis: Nach 2,083 Sekunden kommt das Fahrzeug zum Stehen.

zu 2: Die Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ liefert den zugehörigen Bremsweg s_{30} .

$$\begin{aligned} s_{30} &= f(t_{30}) \\ &= 8,33 \cdot t_{30} - 2 \cdot t_{30}^2 \\ &= 8,33 \cdot 2,083 - 2 \cdot 2,083^2 \\ &= 17,35 - 8,68 \\ s_{30} &= 8,67 \end{aligned} \quad (6)$$

Ergebnis: Der Bremsweg aus $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt 8,67 Meter.

zu 3: Jetzt wird die Zeit t_{51} für die ersten 8,67 Meter bei $51 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ berechnet.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\
 f(t) &= 14,17 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 \\
 f(t) &= 14,17 \cdot t - 2 \cdot t^2 \\
 f(t_{51}) &= s_{30} \\
 14,17 \cdot t_{51} - 2 \cdot t_{51}^2 &= 8,67 & | - 13,01 \\
 -2 \cdot t_{51}^2 + 14,17 \cdot t_{51} - 8,67 &= 0 & | : (-2) \\
 t_{51}^2 - 7,085 t_{51} + 4,335 &= 0 \\
 t_{51/2} &= 3,5425 \pm \sqrt{3,5425^2 - 4,335} \\
 t_{51/2} &\approx 3,5425 \pm 2,866 \\
 t_{51_1} = 0,6765 & \quad t_{51_2} = 6,4085 & (10)
 \end{aligned}$$

Ergebnis: Hier ist die kürzere Zeit die Lösung. Nach einem 0,6765 Sekunden dauernden Bremsvorgang wird das Kind angefahren. (2)

zu 4: Die Aufprallgeschwindigkeit v_A kann über die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion (die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion) berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 v_A &= f'(t_{51_1}) \\
 &= v_0 - a \cdot t_{51_1} \\
 &= 14,17 - 4 \cdot 0,6765 \\
 v_A &= 11,464 & (8)
 \end{aligned}$$

Diese Aufprallgeschwindigkeit wird nun in die Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ umgerechnet.

$$11,464 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \cdot 11,464 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 41,2704 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (2)$$

Ergebnis: Das Kind wird noch mit einer Restgeschwindigkeit von $41,27 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ angefahren. Das ist kaum weniger als die Anfangsgeschwindigkeit und immer noch viel mehr als erlaubt.

zu 5: (Den Rat an Herrn Scheuer erspare ich mir hier.) (2)

0.59 DIFFRECH-33

Gegeben ist die Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$$

Bestimmen Sie die Hoch- und Tiefpunkte der Funktion!

Lösung: Notwendige Bedingung für Extremstellen ist $f'(x_E) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 24x + 18 \\ 6x_E^2 - 24x_E + 18 &= 0 & | :6 \\ x_E^2 - 4x_E + 3 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ &= 2 \pm 1 \\ x_{E1} &= 1 & x_{E2} &= 3 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der **zweiten Ableitung** wird nun geprüft, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

$$f''(x) = 12x - 24$$

Untersuchung für $x_{E1} = 1$:

$$f''(x_{E1}) = f''(1) = 12 \cdot 1 - 24 = -12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_{E1} = 1$$

Untersuchung für $x_{E2} = 3$:

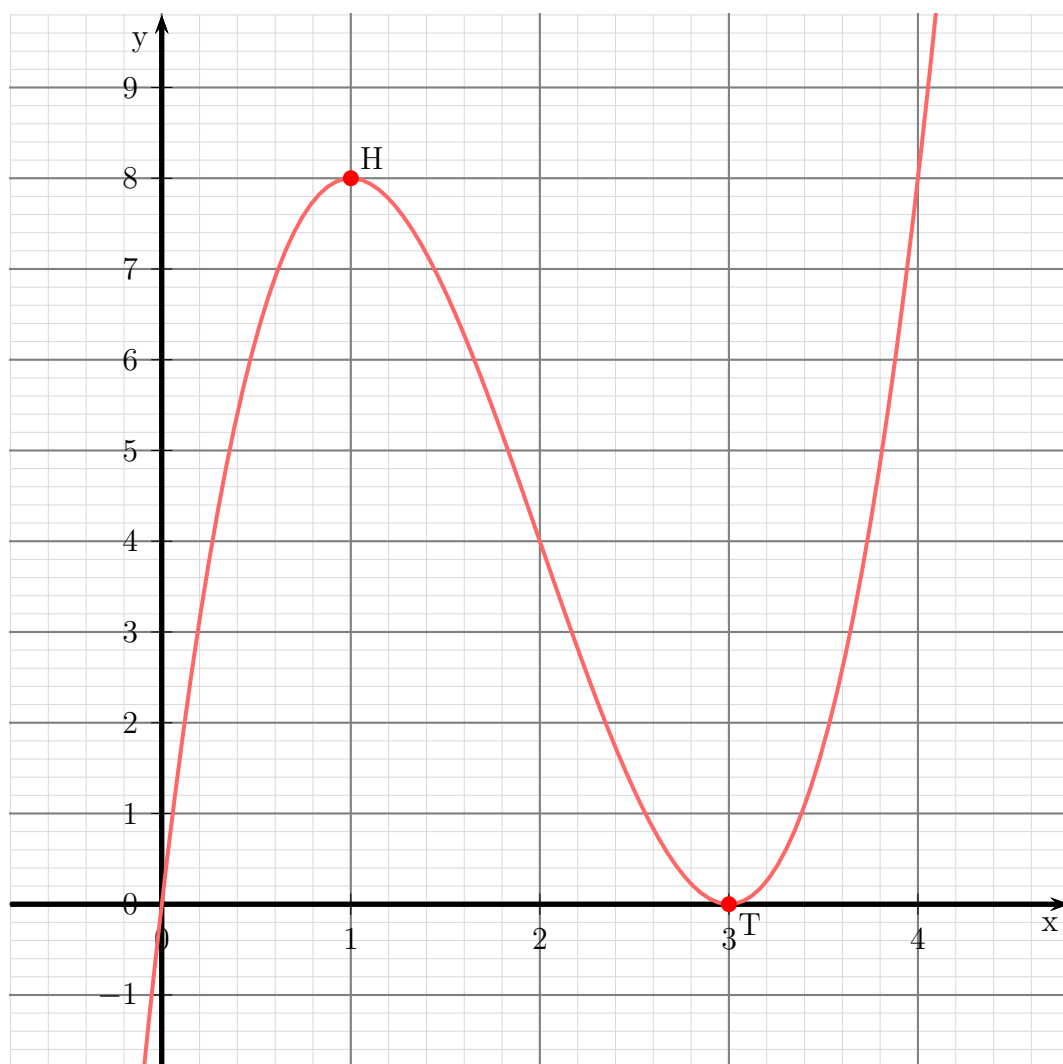
$$f''(x_{E2}) = f''(3) = 12 \cdot 3 - 24 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E2} = 3$$

Die zugehörigen y -Werte liefert die Originalfunktion $f(x)$.

$$\begin{aligned} y_{E1} &= f(x_{E1}) \\ &= 2x_{E1}^3 - 12x_{E1}^2 + 18x_{E1} \\ &= 2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 \\ &= 2 - 12 + 18 \\ y_{E1} &= 8 \\ \\ y_{E2} &= f(x_{E2}) \\ &= 2x_{E2}^3 - 12x_{E2}^2 + 18x_{E2} \\ &= 2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 \\ &= 54 - 108 + 54 \\ y_{E2} &= 0 \end{aligned}$$

Die Extremstellen lauten: $H(1|8)$ und $T(3|0)$

Damit man sich den Verlauf besser vorstellen kann folgt hier eine Skizze.



0.60 DIFFRECH-34

Im Freibad springt ein Schwimmer auf dem 1-Meter-Sprungbrett mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach oben vom Brett ab.

1. Nach welcher Zeit erreicht er seine größte Höhe?
2. Wie hoch über dem Brett ist er dann?
3. Mit welcher Geschwindigkeit taucht er anschließend ins Wasser (ein Meter unterhalb des Brettes) ein? (Gehen Sie dabei davon aus, dass er nicht wieder auf dem Sprungbrett auftrifft.)

Zur Lösung sind noch ein paar Informationen zu den physikalischen Grundlagen notwendig.

- Die Höhe-Zeit-Funktion für den Sprung lautet:

$$h = f(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2 + h_0$$

Hierbei ist h die zu einem bestimmten Zeitpunkt erreichte Höhe in der Einheit m (Meter), v_0 die Anfangsgeschwindigkeit in der Einheit $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Meter pro Sekunde), t die Variable Zeit in der Einheit s (Sekunden), h_0 die Starthöhe und g die Erdbeschleunigung mit $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

- Die Geschwindigkeit v ist die **Ableitung** der Höhe-Zeit-Funktion: $v = f'(t)$. Sie gibt zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit des Schwimmers an. Eine positive Geschwindigkeit ist nach oben gerichtet, eine negative nach unten.
- Wenn Sie die angegebenen Einheiten verwenden, dann passen die alle zueinander. Sie können diese dann innerhalb der Rechnung zur Vereinfachung weglassen.

Lösung: Zunächst muss man festlegen, wo der Bezug für die Höhe sein soll. Das kann auf der Sprungbretthöhe sein oder auch auf der Wasseroberfläche. Nimmt man die Sprungbretthöhe, dann ist $h_0 = 0$ und kann entfallen. Daher wähle ich diese Option.

Nun wird die konkrete Höhe-Zeit-Funktion mit den angegebenen Daten aufgestellt.

$$f(t) = 5 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 + 0 = 5t - 5t^2$$

zu 1: Es wird ein Hochpunkt gesucht. Dazu muss die erste Ableitung gebildet werden, zur Kontrolle auch die zweite.

$$\begin{aligned} f(t) &= 5t - 5t^2 \\ v(t) = f'(t) &= 5 - 10t \\ f''(t) &= -10 \end{aligned}$$

Für einen Extrempunkt muss die erste Ableitung Null werden.

$$\begin{array}{rcl} f'(t_E) & = & 0 \\ 5 - 10t_E & = & 0 \quad | -5 \\ -10t_E & = & -5 \quad | : (-5) \\ t_E & = & 0,5 \end{array}$$

Mit der zweiten Ableitung wird geprüft, ob tatsächlich ein **Hochpunkt** vorliegt.

$$f''(0,5) = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } t_E = 0,5$$

Nach 0,5 Sekunden erreicht der Schwimmer die größte Höhe.

zu 2:

$$\begin{array}{rcl} h_E & = & f(t_E) \\ & = & 5 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,5^2 \\ & = & 2,5 - 1,25 \\ h_E & = & 1,25 \end{array}$$

Der Schwimmer springt 1,25 Meter hoch.

zu 3:

Zunächst muss die Zeit berechnet werden, bis der Schwimmer die Höhe von -1 m (die Wasserspiegelhöhe) erreicht.

$$\begin{array}{rcl} f(t_W) & = & -1 \\ 5t_W - 5t_W^2 & = & -1 \quad | +1 \\ -5t_W^2 + 5t_W + 1 & = & 0 \quad | : (-5) \\ t_W^2 - t_W - \frac{1}{5} & = & 0 \quad | p\text{-}q\text{-Formel} \\ t_{W1/2} & = & \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}} \\ & = & \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} \\ & = & \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{20} + \frac{4}{20}} \\ & = & \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{20}} \\ t_{W1/2} & \approx & 0,5 \pm 0,671 \\ t_{W1} \approx 1,171 & & t_{W2} \approx -0,171 \end{array}$$

Die Lösung t_{W2} entfällt, weil sie negativ ist. Zu dem Zeitpunkt stand der Schwimmer noch auf dem Brett, die Lösung liegt damit nicht im Definitionsbereich. Etwa 1,171 Sekunden nach dem Absprung trifft der Schwimmer auf dem Wasser auf.

Gesucht ist die **Geschwindigkeit**, mit der er auf dem Wasser auftrifft. Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Höhe-Zeit-Funktion.

$$\begin{aligned}v(t_W) &= f'(t_W) \\&= 5 - 10t_W \\&= 5 - 10 \cdot 1,171 \\v(t_W) &= -6,71\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit ist negativ, weil sie nach unten gerichtet ist. Das Vorzeichen spielt aber bei der Antwort zur gestellten Frage keine Rolle.

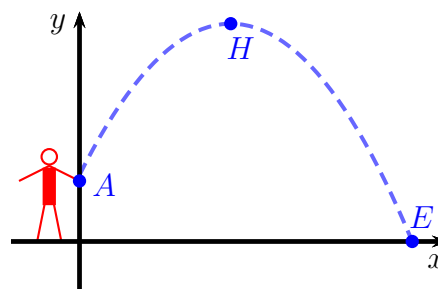
Der Schwimmer tift mit einer Geschwindigkeit von $6,71 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf dem Wasser auf.

0.61 DIFFRECH-35

Mit einem Wasserschlauch wird ein Wasserstrahl erzeugt, der folgende Funktionsgleichung in der Einheit *Meter* darstellt:

$$f(x) = -0,4x^2 + 2x + 1,1$$

a) In welcher waagerecht gemessenen Entfernung vom Anfangspunkt A des Wasserstrahls trifft dieser im Endpunkt E auf den Erdboden?



b) Wie hoch über dem Erdboden befindet sich die höchste Stelle H des Wasserstrahls?

Lösung:

zu a) Der Wasserstrahl trifft auf den Boden, wenn er die Höhe Null erreicht. Wir suchen also die Nullstellen der Funktion.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 & (2) \\ -0,4x_0^2 + 2x_0 + 1,1 &= 0 & | : (-0,4) \\ x_0^2 - 5x_0 - 2,75 &= 0 & (2) \\ x_{01/2} &= 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 + 2,75} \\ &= 2,5 \pm 3 \\ x_{01} = 2,5 + 3 = 5,5 & \quad x_{02} = 2,5 - 3 = -0,5 & (2) \end{aligned}$$

Der negative Wert $x_{02} = -0,5$ entfällt, dort gibt es den Wasserstrahl (noch) nicht. (1)

Der Wasserstrahl trifft in 5,5 Meter Entfernung auf den Boden. (1)

zu b) Wir suchen den **Hochpunkt** der Funktion. Dazu bestimmen wir zunächst die ersten beiden Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,4x^2 + 2x + 1,1 \\ f'(x) &= -0,8x + 2 & (2) \\ f''(x) &= -0,8 & (2) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für einen Hochpunkt ist, dass die erste Ableitung Null ist.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ -0,8x_E + 2 &= 0 & | -2 & (2) \\ -0,8x_E &= -2 & | : (-0,8) \\ x_E &= 2,5 & (2) \end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung kann geprüft werden, ob tatsächlich ein Hochpunkt vorliegt.

$$f''(2,5) = -0,8 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_H = 2,5 \quad (2)$$

Gesucht ist die Höhe dort, also der Funktionswert.

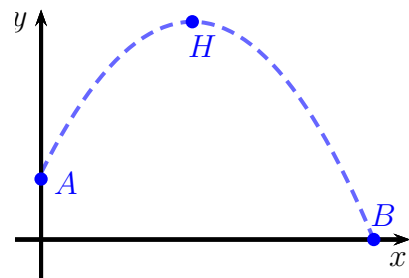
$$y_H = f(2,5) = -0,4 \cdot 2,5^2 + 2 \cdot 2,5 + 1,1 = 3,6$$

Der Wasserstrahl reicht 3,6 Meter hoch. (2)

0.62 DIFFRECH-36

Ein Ball wird geworfen. Nebenstehend ist seine Flugbahn dargestellt. Im Punkt A verlässt er die Hand des Werfers, im Punkt B trifft er auf dem Boden auf. Die Flugbahn wird in der Einheit *Meter* durch diese Funktionsgleichung dargestellt:

$$f(x) = -0,8x^2 + 4x + 2,2$$



a) In welcher waagerecht gemessenen Entfernung vom Anfangspunkt A trifft der Ball im Endpunkt B der Flugbahn auf den Erdboden?

b) Wie hoch über dem Erdboden befindet sich die höchste Stelle H der Flugbahn?

Lösung:

zu a) Der Ball trifft auf den Boden, wenn er die Höhe Null erreicht. Wir suchen also die Nullstellen der Funktion.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 & (2) \\ -0,8x_0^2 + 4x_0 + 2,2 &= 0 & | : (-0,8) \\ x_0^2 - 5x_0 - 2,75 &= 0 & (2) \\ x_{01/2} &= 2,5 \pm \sqrt{2,5^2 + 2,75} \\ &= 2,5 \pm 3 \\ x_{01} = 2,5 + 3 = 5,5 & \quad x_{02} = 2,5 - 3 = -0,5 & (2) \end{aligned}$$

Der negative Wert $x_{02} = -0,5$ entfällt, dort fliegt der Ball (noch) nicht. (1)

Der Ball trifft in 5,5 Meter Entfernung auf den Boden. (1)

zu b) Wir suchen den **Hochpunkt** der Funktion. Dazu bestimmen wir zunächst die ersten beiden Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,8x^2 + 4x + 2,2 \\ f'(x) &= -1,6x + 4 & (2) \\ f''(x) &= -1,6 & (2) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für einen Hochpunkt ist, dass die erste Ableitung Null ist.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ -1,6x_E + 4 &= 0 & | -4 & (2) \\ -1,6x_E &= -4 & | : (-1,6) \\ x_E &= 2,5 & (2) \end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung kann geprüft werden, ob tatsächlich ein Hochpunkt vorliegt.

$$f''(2,5) = -1,6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_H = 2,5 \quad (2)$$

Gesucht ist die Höhe dort, also der Funktionswert.

$$y_H = f(2,5) = -0,8 \cdot 2,5^2 + 4 \cdot 2,5 + 2,2 = 7,2$$

Der Ball fliegt 7,2 Meter hoch. (2)