

Lösen linearer Gleichungssysteme

W. Kippels

22. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Einsetzungsverfahren	3
3	Additions-/Subtraktionsverfahren	5
4	Gleichsetzungsverfahren	8

1 Einleitung

Was ist ein Lineargleichungssystem? Wenn mehrere Variablen miteinander verknüpft sind, benötigt man mehrere Gleichungen, um eine eindeutige Lösung für alle Variablen zu erhalten. Die Zahl der Variablen muss dabei gleich der Zahl der Gleichungen sein. Ein solches Gleichungssystem kann beispielsweise so aussehen:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 5y + 2z = -15 \\ (2) \quad 3x - y + 2z = 5 \\ (3) \quad 5x + 2y - 6z = 16 \end{array}$$

Hierbei handelt es sich um ein Gleichungssystem **dritter Ordnung**. Das bedeutet, wir haben **drei** Variablen – hier x , y und z – und **drei** Gleichungen. Setzt man für x die 2, für y die -3 und für z die -2 ein, dann stellt jede Gleichung eine **wahre Aussage** dar. Daher nennt man das Zahlentripel:

$$x = 2 \quad y = -3 \quad z = -2$$

die Lösung des Gleichungssystems. Als Lösungsmenge wird es so geschrieben:

$$L = \{(2 | -3 | -2)\} \text{ oder auch so: } L = \{(2; -3; -2)\}$$

Beschrieben werden nachfolgend diese Lösungsverfahren¹:

- Einsetzungsverfahren
- Additions- /Subtraktionsverfahren
- Gleichsetzungsverfahren

Übungsaufgaben zu diesen Verfahren sind mit durchgerechneten Lösungen beispielsweise hier zu finden:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/linglsys.pdf>

¹Andere Verfahren sind nachfolgend zu finden und zwar die Cramersche Regel hier:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf>

und das Gauß-Jordan-Verfahren hier:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gauss.pdf>

2 Einsetzungsverfahren

Das Verfahren kann durch einen einzigen Merksatz beschrieben werden.

Merksatz:

Man stellt *eine* beliebige Gleichung nach einer beliebigen Variablen

um und setzt den Ergebnisterm in *alle anderen* Gleichungen ein.

Dadurch erhält man ein Gleichungssystem mit einer Gleichung und einer Variablen weniger, als zuvor. Man führt diesen Schritt so lange durch, bis man nur noch eine einzige Gleichung mit einer einzigen Variablen hat. Diese kann man lösen. Das Ergebnis setzt man in die letzte nach einer Variablen aufgelöste Gleichung ein und bestimmt so die nächste Variable. Man geht dann rückwärts durch alle Einsetzungsterme durch und bestimmt so nach und nach alle Variablen.

Ein Beispiel mit einem Gleichungssystem 3. Ordnung (3 Gleichungen mit 3 Variablen) soll das Vorgehen erläutern.

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 5y + 2z = -15 \\ (2) \quad 3x - y + 2z = 5 \\ (3) \quad 5x + 2y - 6z = 16 \end{array}$$

Welche Gleichung man nach welcher Variablen umstellt, ist im Prinzip gleichgültig. Es bietet sich jedoch an, Gleichung (2) nach y umzustellen, weil das besonders einfach geht, da hier keine Zahl vor dem y steht. Die dadurch entstehende Gleichung nenne ich Gleichung (4).

$$\begin{array}{l} (2) \quad 3x - y + 2z = 5 \quad \quad \quad | + y - 5 \\ \quad \quad 3x + 2z - 5 = y \\ (4) \quad \quad \quad y = 3x + 2z - 5 \end{array}$$

Der Term aus Gleichung (4) muss nun in *alle anderen* Gleichungen für y eingesetzt werden, also in Gleichung (1) und in Gleichung (3). Dadurch erhält man ein Gleichungssystem 2. Ordnung, also nur noch 2 Gleichungen mit 2 Variablen.

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 5 \cdot (3x + 2z - 5) + 2z = -15 \\ (3) \quad 5x + 2 \cdot (3x + 2z - 5) - 6z = 16 \end{array}$$

Wir müssen jetzt nur noch die beiden Gleichungen zusammenfassen und vereinfachen.

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 15x + 10z - 25 + 2z = -15 \\ (3) \quad 5x + 6x + 4z - 10 - 6z = 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \quad 17x + 12z - 25 = -15 \quad | + 25 \\ (3) \quad 11x - 2z - 10 = 16 \quad | + 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \quad 17x + 12z = 10 \\ (3) \quad 11x - 2z = 26 \end{array}$$

Dieses neu entstandene Gleichungssystem 2. Ordnung lässt sich nun mit jedem beliebigen Verfahren weiter reduzieren. Um das Einsetzungsverfahren noch besser zu verdeutlichen, verwende ich für den nächsten Reduktionsschritt ebenfalls dieses Verfahren. Dazu löse ich Gleichung (3) nach z auf. Das Ergebnis nenne ich dann (5).

$$\begin{array}{rcl}
 (3) & 11x - 2z & = 26 & | - 11x \\
 & -2z & = 26 - 11x & | : (-2) \\
 (5) & z & = -13 + 5,5x &
 \end{array}$$

Der Ergebnisterm aus Gleichung (5) muss nun in **alle anderen** Gleichungen für z eingesetzt werden. „Alle“ bedeutet jetzt natürlich nur noch „eine“, nämlich nur die Gleichung (1).

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 17x + 12 \cdot (-13 + 5,5x) & = 10 \\
 & 17x - 156 + 66x & = 10 & | + 156 \\
 & 83x & = 166 & | : 83 \\
 & x & = 2 &
 \end{array}$$

Damit haben wir bereits die Lösung der ersten Variablen gefunden.

Jetzt müssen noch die anderen Variablen bestimmt werden. Das geht am einfachsten, indem man den Lösungsweg langsam rückwärts verfolgt. Man sucht die erste nach einer Variablen umgestellte Gleichung. Das ist hier Gleichung (5). Dort kann die bereits bestimmte Variable x eingesetzt werden, um die Variable z zu berechnen. Das sieht dann so aus:

$$(5) \quad z = -13 + 5,5x = -13 + 5,5 \cdot 2 = -13 + 11 = -2$$

Jetzt wird erneut rückwärts weitergesucht, bis man wieder auf eine nach einer Variablen umgestellte Gleichung stößt. Das ist hier Gleichung (4). Dort werden die bisher bekannten Variablen x und z eingesetzt.

$$(4) \quad y = 3x + 2z - 5 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) - 5 = 6 - 4 - 5 = -3$$

Zusammengefasst: $x = 2 \quad y = -3 \quad z = -2$

Weiteres zu diesem Verfahren findet man auch hier:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf>

3 Additions-/Subtraktionsverfahren

Das Verfahren ist nicht so simpel, wie das Einsetzungsverfahren. Zur Beschreibung benötige ich vier Merksätze. Dafür ist dieses Verfahren meist aber effektiver.

Merksatz 1:

Stimmen die Koeffizienten einer Variablen betragsmäßig in zwei Gleichungen überein, so fällt diese Variable weg, wenn man die Gleichungen addiert oder subtrahiert.

Merksatz 2:

Bei *unterschiedlichen* Vorzeichen **addiert** man die Gleichungen, bei *gleichen* Vorzeichen muss man eine Gleichung von der anderen **subtrahieren**.

Merksatz 3:

Stimmen die Koeffizienten *nicht* überein, dann können sie durch Multiplikation einer oder beider Gleichungen mit einem *geeigneten Faktor* gleich gemacht werden.

Merksatz 4:

Enthält das Gleichungssystem mehr als zwei Gleichungen, dann müssen sie mehrfach paarweise so miteinander kombiniert werden, dass *jedes mal die gleiche Variable* wegfällt.

Auch dieses Verfahren sehen wir uns am besten am gleichen Beispiel an.

$$\begin{array}{r} (1) \quad 2x + 5y + 2z = -15 \\ (2) \quad 3x - y + 2z = 5 \\ (3) \quad 5x + 2y - 6z = 16 \end{array}$$

Zunächst schaue ich nach Übereinstimmungen gemäß Merksatz 1. In Gleichung (1) und Gleichung (2) stimmen die Koeffizienten von z überein. Es bietet sich also an, diese beiden Gleichungen zu kombinieren, um z zu eliminieren. Da die Koeffizienten (Vorzeichen) von z beide positiv sind (beide $+2$), muss ich die Gleichungen nach Merksatz 2 voneinander subtrahieren. Ich bilde die Differenz (1)-(2). Die dabei entstehende Gleichung bekommt die Nummer (4).

$$\begin{array}{r} (1) \quad 2x + 5y + 2z = -15 \quad | \\ (2) \quad 3x - y + 2z = 5 \quad | - \\ \hline (4) \quad -x + 6y = -20 \end{array}$$

Wir haben bisher erst *eine* neue Gleichung erhalten, die aber *zwei* Variablen enthält. Nach Merksatz 4 müssen wir daher noch eine andere Kombination zweier Gleichungen durchführen, bei der *ebenfalls die Variable* z wegfällt. In Frage kommt die Kombination von Gleichung (3) mit (1) oder (2). Willkürlich wähle ich Gleichung (2) aus.

Die Koeffizienten (Vorzahlen) von z sind in Gleichung (2) und (3) unterschiedlich. Daher kommt Merksatz 3 zur Anwendung. Multipliziert man Gleichung (2) mit dem Faktor 3, dann werden beide Koeffizienten betragsmäßig gleich, nämlich +6 in Gleichung (2) und -6 in Gleichung (3).

$$\begin{array}{r} (2) \quad 3x \quad -y \quad +2z \quad = \quad 5 \quad | \cdot 3 \\ (3) \quad 5x \quad +2y \quad -6z \quad = \quad 16 \end{array}$$

Dadurch sind die Koeffizienten von z nun gleich. Nach Merksatz 2 können die Gleichungen **addiert** werden. Die Ergebnisgleichung bekommt die Gleichungsnummer (5).

$$\begin{array}{r} (2) \quad 9x \quad -3y \quad +6z \quad = \quad 15 \quad | \\ (3) \quad 5x \quad +2y \quad -6z \quad = \quad 16 \quad | + \\ \hline (5) \quad 14x \quad -y \quad \quad \quad = \quad 31 \end{array}$$

Die Gleichungen (4) und (5) bilden jetzt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung, wir haben also eine Variable und eine Gleichung weniger, als zuvor.

$$\begin{array}{r} (4) \quad -x \quad +6y \quad = \quad -20 \\ (5) \quad 14x \quad -y \quad = \quad 31 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Ich verwende dazu erneut das Additions-/Subtraktionsverfahren.

$$\begin{array}{r} (4) \quad -x \quad +6y \quad = \quad -20 \\ (5) \quad 14x \quad -y \quad = \quad 31 \quad | \cdot 6 \\ \hline (4) \quad -x \quad +6y \quad = \quad -20 \quad | \\ (5) \quad 84x \quad -6y \quad = \quad 186 \quad | + \\ \hline \quad 83x \quad \quad \quad = \quad 166 \quad | : 83 \\ \quad \quad x \quad \quad \quad = \quad 2 \end{array}$$

Die fehlenden Variablen y und z werden durch Einsetzen dieses Ergebnisses in vorangehende Gleichungen bestimmt. Beispielsweise kann ich den gefundenen Wert für x in Gleichung (5) einsetzen.

$$\begin{array}{r} 14x - y = 31 \\ 14 \cdot 2 - y = 31 \\ 28 - y = 31 \quad | - 28 \\ -y = 3 \\ y = -3 \end{array}$$

Die beiden nun bekannten Lösungen für x und y werden nun in eine der Ursprungsgleichungen eingesetzt, zum Beispiel in Gleichung (1).

$$\begin{aligned}2x + 5y + 2z &= -15 \\2 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 2z &= -15 \\4 - 15 + 2z &= -15 \\-11 + 2z &= -15 \quad | + 11 \\2z &= -4 \quad | : 2 \\z &= -2\end{aligned}$$

Weiteres zu diesem Verfahren findet man auch hier:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf>

4 Gleichsetzungsverfahren

Das Gleichsetzungsverfahren ist ein Verfahren, das relativ selten verwendet wird. Nur dann, wenn die Gleichungen in einer bestimmten Form gegeben sind, bietet es sich an.

Merksatz:

Alle Gleichungen werden nach der gleichen Variablen umgestellt.

Dann setzt man die Gleichungen paarweise gleich.

Dadurch erhält man ein Gleichungssystem mit einer Gleichung und einer Variablen weniger, als zuvor. Man führt diesen Schritt so lange durch, bis man nur noch eine einzige Gleichung mit einer einzigen Variablen hat. Diese kann man lösen.

Das bekannte Beispiel mit einem Gleichungssystem 3. Ordnung (3 Gleichungen mit 3 Variablen) soll das Vorgehen erläutern.

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 5y + 2z = -15 \\ (2) \quad 3x - y + 2z = 5 \\ (3) \quad 5x + 2y - 6z = 16 \end{array}$$

Ich stelle alle Gleichungen nach y um.

Gleichung (1):

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 2z &= -15 \quad | -2x - 2z \\ 5y &= -15 - 2x - 2z \quad | :5 \\ y &= -3 - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}z \end{aligned}$$

Gleichung (2):

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 5 \quad | -3x - 2z \\ -y &= 5 - 3x - 2z \quad | \cdot (-1) \\ y &= -5 + 3x + 2z \end{aligned}$$

Gleichung (3):

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z &= 16 \quad | -5x + 6z \\ 2y &= 16 - 5x + 6z \quad | :2 \\ y &= 8 - \frac{5}{2}x + 3z \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem sieht damit so aus:

$$\begin{array}{l} (1) \quad y = -3 - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}z \\ (2) \quad y = -5 + 3x + 2z \\ (3) \quad y = 8 - \frac{5}{2}x + 3z \end{array}$$

Ich setze nun Gleichung (1) mit Gleichung (2) gleich; die dabei entstehende Gleichung nenne ich dann Gleichung (4). Ebenso setze ich Gleichung (1) mit Gleichung (3) gleich. Diese Gleichung nenne ich Gleichung (5). Damit erhalte ich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} (4) \quad -3 - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}z = -5 + 3x + 2z \\ (5) \quad -3 - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}z = 8 - \frac{5}{2}x + 3z \end{array}$$

Die Gleichungen müssen nun vereinfacht und zusammengefasst werden.

$$\begin{array}{l} (4) \quad -3 - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}z = -5 + 3x + 2z \quad | \cdot 5 \\ (5) \quad -3 - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}z = 8 - \frac{5}{2}x + 3z \quad | \cdot 10 \\ \hline (4) \quad -15 - 2x - 2z = -25 + 15x + 10z \quad | + 15 - 15x - 10z \\ (5) \quad -30 - 4x - 4z = 80 - 25x + 30z \quad | + 30 + 25x - 30z \\ \hline (4) \quad -17x - 12z = -10 \\ (5) \quad 21x - 34z = 110 \end{array}$$

Wir haben damit ein Gleichungssystem zweiter Ordnung erhalten. Das kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden.

Ich verwende erneut das Gleichsetzungsverfahren. Dazu löse ich beide Gleichungen nach z auf.

Gleichung (4):

$$\begin{array}{l} -17x - 12z = -10 \quad | + 17x \\ -12z = -10 + 17x \quad | : (-12) \\ z = \frac{5}{6} - \frac{17}{12}x \end{array}$$

Gleichung (5):

$$\begin{array}{l} 21x - 34z = 110 \quad | - 21x \\ -34z = 110 - 21x \quad | : (-34) \\ z = -\frac{55}{17} + \frac{21}{34}x \end{array}$$

Jetzt können beide Gleichungen gleichgesetzt werden. Wir erhalten eine Gleichung, aus der dann x berechnet werden kann.

$$\begin{array}{l} \frac{5}{6} - \frac{17}{12}x = -\frac{55}{17} + \frac{21}{34}x \quad | \cdot 204 \\ 170 - 289x = -660 + 126x \quad | - 170 - 126x \\ -415x = -830 \quad | : (-415) \\ x = 2 \end{array}$$

Die restlichen Variablen bestimmt man durch Einsetzen in vorangehende umgestellte Gleichungen, ähnlich wie beim Einsetzungsverfahren. Das führe ich hier jetzt nicht mehr vor.

An diesem Beispiel kann man schon erkennen, dass das Gleichsetzungsverfahren recht aufwendig und ineffizient ist. Daher wird man es nur dann verwenden, wenn die Gleichungen schon in der Form gegeben sind, dass eine Variable allein auf einer Seite steht.

Ein weiteres sehr effizientes Lösungsverfahren ist die **Cramersche Regel**. Die Beschreibung des Verfahrens findet man hier:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf>