Übungsaufgaben zur Linearen Funktion

Aufgabe 1 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = -3x + 7$ und $f_2(x) = 2x - 13$!

Aufgabe 2 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x + 11$ und $f_2(x) = 4x + 17$!

Aufgabe 3 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 6x + 12$ und $f_2(x) = 6x - 4$!

Aufgabe 4 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x - 7$ und $f_2(x) = 6x - 7$!

Aufgabe 5 Eine Gerade verläuft durch die Punkte $P_1(-2|4)$ und $P_2(-5|-2)$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$?

Aufgabe 6 Eine Gerade schneidet die x-Achse bei $x_0 = 5$ und die y-Achse bei $y_0 = 3$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$?

Aufgabe 7 Die Gerade g_1 schneidet die Gerade g_2 mit $f_2(x) = 2x+1$ bei $x_1 = 2$ und die Gerade g_3 mit $f_3(x) = 5x - 7$ bei $x_2 = 3$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f_1(x)$?

Aufgabe 8 Die Gerade g_1 schneidet die Gerade g_2 mit $f_2(x) = x+2$ bei $x_1 = 1$ und die Gerade g_3 mit $f_3(x) = -x+10$ bei $x_2 = 5$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f_1(x)$?

Aufgabe 9 Die Gerade g_1 schneidet die Gerade g_2 mit $f_2(x) = \frac{2}{3}x + 2$ bei $x_s = 6$ rechtwinklig. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f_1(x)$?

Aufgabe 10 Gesucht ist die Funktion $f(x)$. Der Graph ihrer *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ verläuft durch die Punkte $P_1(2|4)$ und $P_2(1|5)$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f(x)$?

Aufgabe 11 Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = 2x + 6$ und $f_2(x) = \frac{1}{2}x + 9$. In welchem Punkt schneiden sich ihre *Umkehrfunktionen*?

Lösungen der Übungsaufgaben

1. $S(4\|-5)$	2. $S(-2\|9)$	3. Kein Schnittp.	4. $S(0\|-7)$
5. $f(x) = 2x + 8$	6. $f(x) = -\frac{3}{5}x + 3$	7. $f_1(x) = 3x - 1$	8. $f_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
9. $f_1(x) = -\frac{3}{2}x + 15$	10. $f(x) = -x + 6$	11. $S(10\|2)$	

Lösungen mit durchgerechnetem Lösungsweg

Aufgabe 1 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = -3x + 7$ und $f_2(x) = 2x - 13$!

Zur Schnittpunktbestimmung setzt man die Funktionsgleichungen gleich.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ -3x_s + 7 &= 2x_s - 13 \quad | -7 - 2x_s \\ -5x_s &= -20 \quad | : (-5) \\ x_s &= 4 \end{aligned}$$

Den zugehörigen y-Wert bestimmt man durch Einsetzen von x_s in eine beliebige der beiden Gleichungen. Ich setze x_s in $f_2(x)$ ein.

$$\begin{aligned} y_s &= f_2(x_s) \\ y_s &= 2x_s - 13 \\ &= 2 \cdot 4 - 13 \\ y_s &= -5 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich der Schnittpunkt: $\boxed{S(4|-5)}$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x + 11$ und $f_2(x) = 4x + 17$!

Zur Schnittpunktbestimmung setzt man die Funktionsgleichungen gleich.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ x_s + 11 &= 4x_s + 17 \quad | -11 - 4x_s \\ -3x_s &= 6 \quad | : (-3) \\ x_s &= -2 \end{aligned}$$

Den zugehörigen y-Wert bestimmt man durch Einsetzen von x_s in eine beliebige der beiden Gleichungen. Ich setze x_s in $f_1(x)$ ein.

$$\begin{aligned} y_s &= f_1(x_s) \\ y_s &= x_s + 11 \\ &= -2 + 11 \\ y_s &= 9 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich der Schnittpunkt: $\boxed{S(-2|9)}$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 6x + 12$ und $f_2(x) = 6x - 4$!

Zur Schnittpunktbestimmung setzt man die Funktionsgleichungen gleich.

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_s) & = & f_2(x_s) \\ 6x_s + 12 & = & 6x_s - 4 \quad | - 12 - 6x_s \\ 0 & = & -16 \end{array}$$

Wir erhalten eine **falsche Aussage**. Das bedeutet, dass es keine Lösung, also keinen Schnittpunkt gibt. Das liegt daran, dass die Geraden parallel verlaufen. Unser Ergebnis lautet also:

$$\boxed{\text{Es gibt keinen Schnittpunkt.}}$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = x - 7$ und $f_2(x) = 6x - 7$!

Zur Schnittpunktbestimmung setzt man die Funktionsgleichungen gleich.

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_s) & = & f_2(x_s) \\ x_s - 7 & = & 6x_s - 7 \quad | + 7 - 6x_s \\ -5x_s & = & 0 \quad | : (-5) \\ x_s & = & 0 \end{array}$$

Den zugehörigen y-Wert bestimmt man durch Einsetzen von x_s in eine beliebige der beiden Gleichungen. Ich setze x_s in $f_1(x)$ ein.

$$\begin{array}{rcl} y_s & = & f_1(x_s) \\ y_s & = & x_s - 7 \\ & = & 0 - 7 \\ y_s & = & -7 \end{array}$$

Zusammengefasst ergibt sich der Schnittpunkt: $\boxed{S(0|-7)}$

Aufgabe 5 Eine Gerade verläuft durch die Punkte $P_1(-2|4)$ und $P_2(-5|-2)$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$?

Die allgemeine Form der Linearen Funktion lautet:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

Aus der Angabe der beiden Punkte kann man zunächst die Steigung m der Funktion bestimmen.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-2 - 4}{-5 - (-2)} \\
&= \frac{-6}{-3} \\
m &= 2
\end{aligned}$$

Um das noch fehlende b zu bestimmen, setzen wir einfach das berechnete m und die Koordinaten eines beliebigen Punktes in die allgemeine Funktionsgleichung ein. Ich wähle dazu willkürlich den Punkt $P_1(-2|4)$ aus.

$$\begin{aligned}
f(x) &= m \cdot x + b \\
y_1 &= m \cdot x_1 + b \\
4 &= 2 \cdot (-2) + b \\
4 &= -4 + b \quad | + 4 \\
8 &= b
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f(x) = 2x + 8}$

Es gibt noch einen alternativen Lösungsweg. Den stelle ich auf der nächsten Seite dar.

Alternativer Lösungsweg:

Wenn man nicht – wie im voranstehenden Lösungsweg – zunächst die Steigung m berechnen möchte, kann man auch die Kordinaten **beider** Punkte in die allgemeine Geradengleichung einsetzen. Man erhält dann **zwei** Gleichungen mit **zwei** Variablen, nämlich m und b. Dieses Lineargleichungssystem kann dann mit einem beliebigen Verfahren berechnet werden, beispielsweise mit dem Additionsverfahren.

$$\begin{array}{rcll}
y_1 & = & m \cdot x_1 + b & \\
y_2 & = & m \cdot x_2 + b & \\
\hline
4 & = & m \cdot (-2) + b & \\
-2 & = & m \cdot (-5) + b & \\
\hline
4 & = & -2m + b & | \\
-2 & = & -5m + b & |- \\
\hline
6 & = & 3m & \\
m & = & 2 &
\end{array}$$

Das Ergebnis wird in eine der Ausgangsgleichungen eingesetzt, beispielsweise in die erste Gleichung.

$$\begin{aligned}
4 &= m \cdot (-2) + b \\
4 &= 2 \cdot (-2) + b \\
4 &= -4 + b \\
8 &= b
\end{aligned}$$

Auch hier lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f(x) = 2x + 8}$

Aufgabe 6 Eine Gerade schneidet die x-Achse bei $x_0 = 5$ und die y-Achse bei $y_0 = 3$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$?

Beim Schnittpunkt mit der x-Achse ist der y-Wert gleich Null, beim Schnittpunkt mit der y-Achse ist der x-Wert gleich Null. Wir kennen also die Koordinaten zweier Punkte: $P_1(5|0)$ und $P_2(0|3)$. Wir können zur Lösung also vorgehen, wie bei der vorangehenden Aufgabe.

Die allgemeine Form der Linearen Funktion lautet:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

Aus der Angabe der beiden Punkte kann man zunächst die Steigung m der Funktion bestimmen.

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3-0}{0-5} \\ &= \frac{3}{-5} \\ m &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Um das noch fehlende b zu bestimmen, setzen wir einfach das berechnete m und die Koordinaten eines beliebigen Punktes in die allgemeine Funktionsgleichung ein. Ich wähle dazu willkürlich den Punkt $P_1(5|0)$ aus.

$$\begin{aligned} f(x) &= m \cdot x + b \\ y_1 &= m \cdot x_1 + b \\ 0 &= -\frac{3}{5} \cdot 5 + b \\ 0 &= -3 + b \quad |+3 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f(x) = -\frac{3}{5}x + 3}$

Es gibt natürlich auch hier wieder einen alternativen Lösungsweg. Den stelle ich diesmal aber nicht dar.

Aufgabe 7 Die Gerade g_1 schneidet die Gerade g_2 mit $f_2(x) = 2x + 1$ bei $x_1 = 2$ und die Gerade g_3 mit $f_3(x) = 5x - 7$ bei $x_2 = 3$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f_1(x)$?

Zunächst benötigen wir den Schnittpunkt zwischen g_1 und g_2. Da der x-Wert des Schnittpunktes P_1 mit $x_1 = 2$ bekannt ist, muss ich diesen Wert nur in die Funktionsgleichung $f_2(x)$ – die Funktionsgleichung der Geraden g_2 – einsetzen, um den zugehörigen y-Wert zu erhalten.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_2(x_1) \\ &= 2x_1 + 1 \\ &= 2 \cdot 2 + 1 \\ y_1 &= 5 \end{aligned}$$

Der erste Schnittpunkt lautet also: $\boxed{P_1(2|5)}$.

Mit dem zweiten Schnittpunkt machen wir es entsprechend mit $f_3(x)$ und x_2.

$$\begin{aligned} y_2 &= f_3(x_2) \\ &= 5x_2 - 7 \\ &= 5 \cdot 3 - 7 \\ y_2 &= 8 \end{aligned}$$

Der zweite Schnittpunkt lautet demnach: $\boxed{P_2(3|8)}$.

Ab hier geht es weiter, wie wir schon mehrfach eine Gerade durch zwei Punkte gelegt haben. Die allgemeine Form der gesuchten Linearen Funktion lautet:

$$f_1(x) = m \cdot x + b$$

Aus der Angabe der beiden Punkte kann man zunächst die Steigung m der Funktion bestimmen.

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{8 - 5}{3 - 2} \\ &= \frac{3}{1} \\ m &= 3 \end{aligned}$$

Um das noch fehlende b zu bestimmen, setzen wir einfach das berechnete m und die Koordinaten von einem der beiden bekannten Punkten in die allgemeine Funktionsgleichung ein. Ich wähle dazu willkürlich den Punkt $P_1(2|5)$ aus.

$$\begin{aligned} f(x) &= m \cdot x + b \\ y_1 &= m \cdot x_1 + b \\ 5 &= 3 \cdot 2 + b \\ 5 &= 6 + b \quad |-6 \\ -1 &= b \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f(x) = 3x - 1}$

Aufgabe 8 Die Gerade g_1 schneidet die Gerade g_2 mit $f_2(x) = x+2$ bei $x_1 = 1$ und die Gerade g_3 mit $f_3(x) = -x+10$ bei $x_2 = 5$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f_1(x)$?

Zunächst benötigen wir den Schnittpunkt zwischen g_1 und g_2. Da der x-Wert des Schnittpunktes P_1 mit $x_1 = 2$ bekannt ist, muss ich diesen Wert nur in die Funktionsgleichung $f_2(x)$ – die Funktionsgleichung der Geraden g_2 – einsetzen, um den zugehörigen y-Wert zu erhalten.

$$\begin{aligned} y_1 &= f_2(x_1) \\ &= x_1 + 2 \\ &= 1 + 2 \\ y_1 &= 3 \end{aligned}$$

Der erste Schnittpunkt lautet also: $\boxed{P_1(1|3)}$.

Mit dem zweiten Schnittpunkt machen wir es entsprechend mit $f_3(x)$ und x_2.

$$\begin{aligned} y_2 &= f_3(x_2) \\ &= -x_2 + 10 \\ &= -5 + 10 \\ y_2 &= 5 \end{aligned}$$

Der zweite Schnittpunkt lautet demnach: $\boxed{P_2(5|5)}$.

Ab hier geht es weiter, wie wir schon mehrfach eine Gerade durch zwei Punkte gelegt haben. Die allgemeine Form der gesuchten Linearen Funktion lautet:

$$f_1(x) = m \cdot x + b$$

Aus der Angabe der beiden Punkte kann man zunächst die Steigung m der Funktion bestimmen.

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5-3}{5-1} \\ &= \frac{2}{4} \\ m &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Um das noch fehlende b zu bestimmen, setzen wir einfach das berechnete m und die Koordinaten von einem der beiden bekannten Punkten in die allgemeine Funktionsgleichung ein. Ich wähle dazu willkürlich den Punkt $P_1(2|5)$ aus.

$$\begin{aligned}
f(x) &= m \cdot x + b \\
y_1 &= m \cdot x_1 + b \\
3 &= \frac{1}{2} \cdot 1 + b \\
3 &= \frac{1}{2} + b \quad \mid -\frac{1}{2} \\
\frac{5}{2} &= b
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$

Aufgabe 9 Die Gerade g_1 schneidet die Gerade g_2 mit $f_2(x) = \frac{2}{3}x + 2$ bei $x_s = 6$ rechtwinklig. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f_1(x)$?

Die Bedingung für rechtwinkliges Schneiden lautet:

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$$

Da m_2 aus der Funktionsgleichung $f_2(x)$ als $m_2 = \frac{2}{3}$ abgelesen werden kann, müssen wir nur diesen Wert in die Bedingung einsetzen und nach m_1 umstellen.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= -1 \\ m_1 &= -\frac{1}{m_2} \\ &= -\frac{1}{\frac{2}{3}} \\ m_1 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bis jetzt haben wir die Funktionsgleichung in der Form: $\boxed{f_1(x) = -\frac{3}{2}x + b}$

Es fehlt also nur noch der Parameter b. Dazu muss der y-Wert des Schnittpunktes bestimmt werden. Das geschieht durch Einsetzen des x-Wertes des Schnittpunktes x_s in die Funktionsgleichung $f_2(x)$.

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{2}{3}x_s + 2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 \\ y_s &= 6 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt lautet also: $\boxed{S(6|6)}$

Die Koordinaten des Schnittpunktes können jetzt in die „vorläufige“ Funktionsgleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} y_s &= f(x_s) \\ y_s &= -\frac{3}{2} \cdot x_s + b \\ 6 &= -\frac{3}{2} \cdot 6 + b \\ 6 &= -9 + b \quad | + 9 \\ 15 &= b \end{aligned}$$

Also lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = -\frac{3}{2} \cdot x + 15}$

Aufgabe 10 Gesucht ist die Funktion $f(x)$. Der Graph ihrer *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ verläuft durch die Punkte $P_1(2|4)$ und $P_2(1|5)$. Wie lautet die Funktionsgleichung $f(x)$?

„Umkehrfunktion" bedeutet eine Vertauschung zwischen x- und y-Werten. Ich muss bei den angegebenen Koordinaten der Punkte also nur die x-Werte mit den y-Werten zu tauschen. Dann erhalte ich die Punkte P_1^* und P_2^*, durch die der Graph der *gesuchten* Funktion verläuft.

$$\begin{aligned} P_1(2|4) &\Rightarrow P_1^*(4|2) \\ P_2(1|5) &\Rightarrow P_2^*(5|1) \end{aligned}$$

Ab hier geht es genauso weiter, wie bei den ersten Übungsaufgaben, bei denen zwei Punkte der Geraden gegeben sind. Die allgemeine Form der Linearen Funktion lautet:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

Aus der Angabe der beiden Punkte kann man zunächst die Steigung m der Funktion bestimmen.

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1-2}{5-4} \\ &= \frac{-1}{1} \\ m &= -1 \end{aligned}$$

Um das noch fehlende b zu bestimmen, setzen wir einfach das berechnete m und die Koordinaten eines beliebigen Punktes in die allgemeine Funktionsgleichung ein. Ich wähle dazu willkürlich den Punkt $P_1^*(4|2)$ aus.

$$\begin{aligned} f(x) &= m \cdot x + b \\ y_1 &= m \cdot x_1 + b \\ 2 &= -1 \cdot 4 + b \\ 2 &= -4 + b \quad | + 4 \\ 6 &= b \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f(x) = -x + 6}$

Aufgabe 11 Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = 2x + 6$ und $f_2(x) = \frac{1}{2}x + 9$. In welchem Punkt schneiden sich ihre *Umkehrfunktionen*?

Zur Lösung bieten sich zwei grundsätzlich verschiedene Lösungswege an.

1. Man bestimmt beide Umkehrfunktionen und berechnet dann den Schnittpunkt.

2. Man berechnet den Schnittpunkt der gegebenen Funktionen und tauscht dann die x-Koordinate des Punktes mit seiner y-Koordinaten.

Eleganter ist sicher der zweite Lösungsweg, da man dabei nicht zwei Umkehrfunktionen bestimmen muss. Damit das jeder selbst vergleichen kann, führe ich beide Lösungswege vor.

Lösungsweg 1: Beide Umkehrfunktionen werden berechnet.

$$\begin{array}{rcll} f_1(x) &=& 2x+6 & |\text{Umkehrung:} \\ x &=& 2y+6 & |-6 \\ x-6 &=& 2y & |:2 \\ \frac{1}{2}x-3 &=& y & \\ f_1^{-1}(x) &=& \frac{1}{2}x-3 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} f_2(x) &=& \frac{1}{2}x+9 & |\text{Umkehrung:} \\ x &=& \frac{1}{2}y+9 & |-9 \\ x-9 &=& \frac{1}{2}y & |\cdot 2 \\ 2x-18 &=& y & \\ f_2^{-1}(x) &=& 2x-18 & \end{array}$$

Den Schnittpunkt können wir nun durch Gleichsetzen der Funktionsterme berechnen.

$$\begin{array}{rcll} f_1^{-1}(x_s) &=& f_2^{-1}(x_s) & \\ \frac{1}{2}x_s-3 &=& 2x_s-18 & |\cdot 2 \\ x_s-6 &=& 4x_s-36 & |+6-4x_s \\ -3x_s &=& 30 & |:(-3) \\ x_s &=& -10 & \end{array}$$

Den dazugehörenden y_s-Wert erhalten wir durch Einsetzen des x_s-Wertes in eine der beiden Umkehrfunktionen. Ich wähle dazu f_2^{-1} aus.

$$\begin{aligned} y_s &= f_2^{-1}(x_s) \\ &= 2x_s - 18 \\ &= 2 \cdot 10 - 18 \\ y_s &= 2 \end{aligned}$$

Damit lautet der Schnittpunkt: $\boxed{S(10|2)}$

Lösungsweg 2: Zunächst wird der Schnittpunkt S^* von f_1 und f_2 bestimmt. Danach tauscht man die x- und y-Koordinaten miteinander und erhält S.

Zur Schnittpunktbestimmung setzen wir die Funktionsterme gleich.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ 2x_s + 6 &= \tfrac{1}{2}x_2 + 9 \quad | \cdot 2 \\ 4x_2 + 12 &= x_s + 18 \quad | - 12 - x_s \\ 3x_s &= 6 \quad | : 3 \\ x_s &= 2 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von y_s verwende ich die Funktion $f_1(x)$.

$$\begin{aligned} y_s &= f_1(x_s) \\ &= 2x_s + 6 \\ &= 2 \cdot 2 + 6 \\ y_s &= 10 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt S^* der ursprünglichen Funktionen f_1 und f_2 lautet damit: $S^*(2|10)$. Tauschen wir die Koordinaten aus, dann erhalten wir den gesuchten Schnittpunkt S der Umkehrfunktionen:

$$\boxed{S(10|2)}$$