Lineare Funktion

Wolfgang Kippels

17. November 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

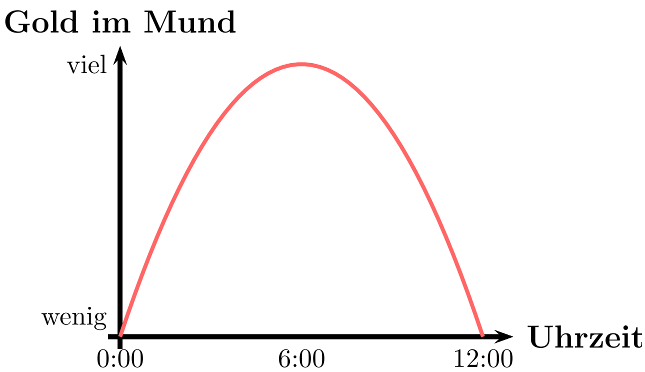
Vielen Dank!

2 Grundlegende Zusammenhänge

2.1 Was ist eine Funktion?

Eine **Funktion** stellt einen Zusammenhang zwischen zwei (oder auch mehr) Größen dar. In diesem Skript bleiben wir bei nur zwei Größen. Dabei sind die Größen **nicht** gleichberechnigt, eine Größe hängt von der anderen ab.

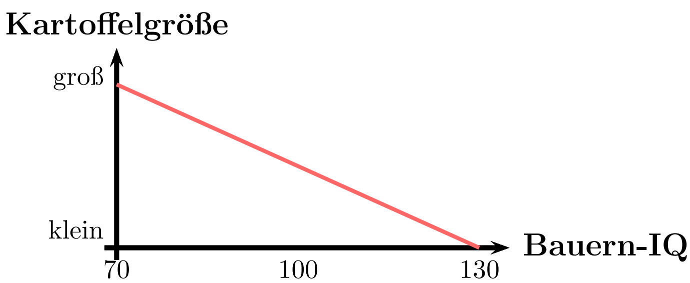
Nebenstehend ist ein altes Sprichwort als Funktionsgraph dargestellt.[1] Die beiden Größen, die hier im Zusammenhang stehen sind in diesem Fall:
1. Die Uhrzeit
2. Die Goldmenge im Mund
Dabei ist die Uhrzeit die **unabhängige** Größe. Die gibt man vor und schaut dann in der Grafik nach, wie groß dabei jeweils die **abhängige** Größe – hier die Goldmenge im Mund – wird. In der Grafik erkennt man, dass es gegen Mitternacht und gegen Mittag relativ wenig ist, gegen 6:00 Uhr am Morgen aber viel.



Wichtig ist folgendes: Zu **jedem** Wert der unabhängigen Größe (hier der Uhrzeit) gibt es **genau einen** Wert der abhängigen Größe (hier der Goldmenge im Mund). Umgekehrt muss das nicht unbedingt gelten! Suche ich mir eine bestimmte Goldmenge aus, dann finde ich nicht eindeutig eine bestimmte Uhrzeit, die dazu passt. Meist sind es zwei verschiedene Zeiten.

2.2 Was ist eine Lineare Funktion?

Ein Beispiel für eine **Lineare Funktion** gehört ebenfalls zu einem alten Sprichwort. Der Funktionsgraph dieser Funktion ist nebenstehend dargestellt. Man nennt sie **Lineare Funktion**, weil der Zusammenhang zwischen den beiden Größe eine **gerade Linie** ergibt. In diesem Beispiel stellt der Intelligenzquotient der Bauern die unabhängige und die Kartoffelgröße die abhängige Größe dar.



[1]Inspiriert hat mich dazu ein Beitrag in der Zeitschrift Stern, Heft 23/2019 und 28/2019, Rubrik Humor.

Wie das Ganze mathematisch in den Griff zu bekommen ist, wird nun im Folgenden dargestellt.

2.3 Aufbau der Linearen Funktion

Eine ***Lineare Funktion*** ist eine Funktion, die sich in dieser Form darstellen lässt:

$$\boxed{y = f(x) = m \cdot x + b}$$

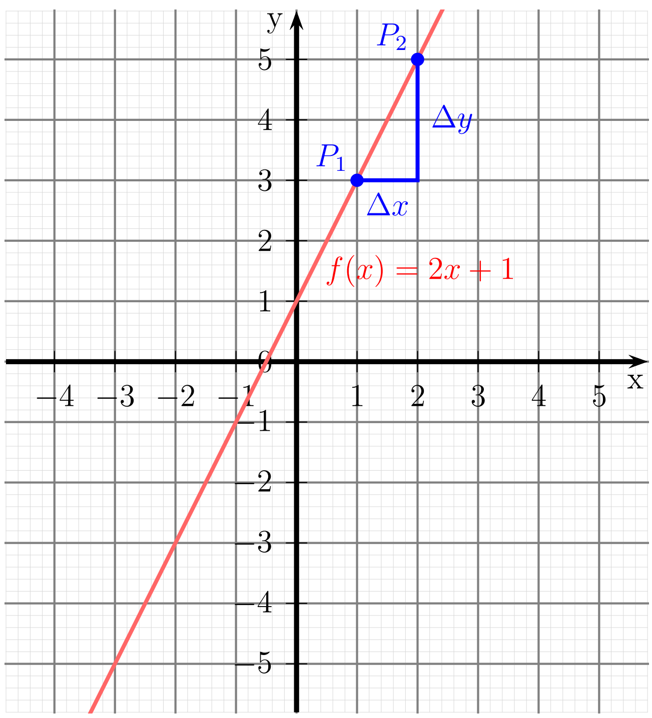
Dabei stellen die Parameter m und b bestimmte Eigenschaften der Funktion dar, und zwar folgende:

- m: Die Steigung der Funktion
- b: Den y-Achsenabschnitt der Funktion.

Dabei ist die Steigung wie folgt definiert:

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

In dieser Formel kommen die Werte x_1, y_1, x_2 und y_2 vor. Sie stellen die Koordinaten von zwei beliebigen Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ dar, die genau auf der Geraden von $f(x)$ liegen.



Nebenstehend ist die Funktion $f(x) = 2x + 1$ dargestellt. Auf den ersten Blick erkennt man sofort, dass die Gerade bei $y_0 = 1$ die y-Achse schneidet. In der Funktionsgleichung erkennt man das daran, dass $b = 1$ ist.

Auch die Steigung kann man am Funktionsgraphen ablesen. Geht man von einem beliebigen Punkt P_1 eine Einheit nach *rechts*, dann gibt der Wert der Steigung an, um wieviele Einheiten man nach *oben* gehen muss. Muss man nicht nach oben, sondern nach *unten* gehen, dann ist die Steigung *negativ*.

Im vorgestellten Beispiel muss man für jede Einheit nach rechts um 2 Einheiten nach oben gehen, da die Steigung der Funktion $m = 2$ ist.

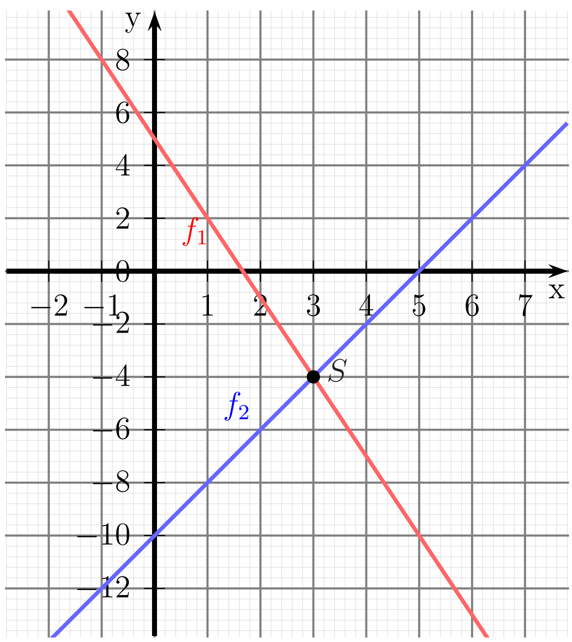
2.4 Nullstellenbestimmung

Will man den Abschnitt auf der x-Achse – die sogenannte „Nullstelle“ – wissen, kan man den entsprechenden Wert nicht sofort an der Funktionsgleichung ablesen. Man kann ihn aber berechnen. Dies macht man, indem man den Funktionsterm gleich Null setzt und nach x auflöst:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 2x_0 + 1 &= 0 \quad | -1 \\ 2x_0 &= -1 \quad | : 2 \\ x_0 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.5 Schnittpunktbestimmung

Die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden zeige ich an einem Beispiel. Gegeben seien die beiden Funktionen $f_1(x) = -3x + 5$ und $f_2(x) = 2x - 10$.



Der Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ ist der Punkt, der **beide** Funktionsgleichungen erfüllt. Setzen wir seine allgemeinen Koordinaten x_s und y_s in die beiden Funktionsgleichungen ein, dann erhalten wir ein Lineargleichungssystem mit zwei Variablen.

$$\begin{aligned} y_s &= -3x_s + 5 \\ y_s &= 2x_s - 10 \end{aligned}$$

Da beide Gleichungen nach y_s aufgelöst sind, bietet sich das **Gleichsetzungsverfahren** zur Lösung an. Das gilt nicht nur für diese Aufgabe, das ist bei Schnittpunktbestimmungen **immer** so.

$$\begin{aligned} -3x_s + 5 &= 2x_s - 10 \quad | -2x_s - 5 \\ -5x_s &= -15 \quad | : (-5) \\ x_s &= 3 \end{aligned}$$

Den zugehörigen Wert y_s kann man beliebig mit einer der beiden Funktionen bestimmen. Ich wähle dafür $f_2(x) = 2x - 10$ aus.

$$
\begin{aligned}
y_s &= f_2(x_s) \\
f_2(x) &= 2x - 10 \\
y_s &= 2 \cdot 3 - 10 \\
y_s &= -4
\end{aligned}
$$

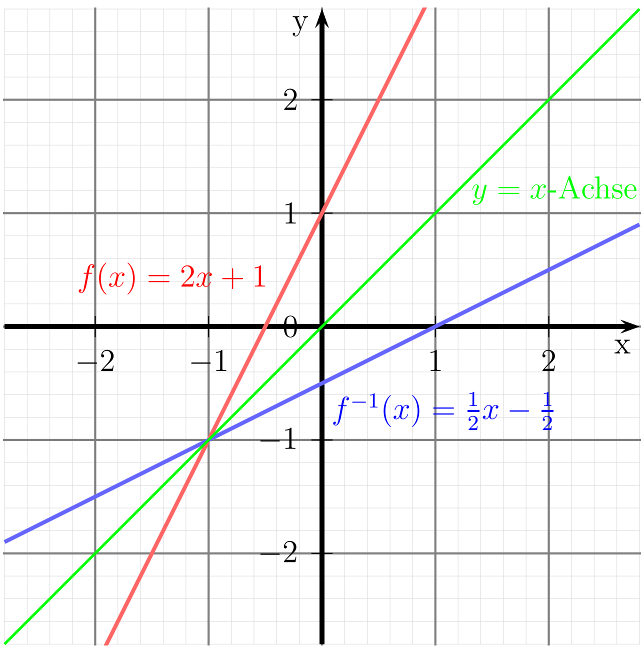
Schnittpunkt: $S(3|-4)$

2.6 Umkehrfunktion

Wenn man die „Rollen“ von x und y tauscht und dann die Gleichung neu nach y auflöst, erhält man die sogenannte ***Umkehrfunktion*** $f^{-1}(x)$. Ein Beispiel soll verdeutlichen, was damit gemeint ist.

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) = 2x + 1 \quad | \text{„Rollentausch“} \\
x &= 2y + 1 \quad | -1 \\
x - 1 &= 2y \quad | : 2 \\
\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} &= y \\
f^{-1}(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Nebenstehend ist die eben besprochene Funktion $f(x) = 2x + 1$ in rot zusammen mit ihrer Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ in blau dargestellt.



Schaut man sich deren Lage zueinander genauer an, dann kann man feststellen, dass sie spiegelbildlich zueinander zu einer Achse liegen, die den ersten Quadranten in einem 45^0-Winkel teilt. Diese Achse nennt man auch $y = x$-Achse, weil die zugehörige Funktionsgleichung $y = f(x) = x$ heißt. Sie ist hier in der Farbe grün dargestellt.

2.7 Schnittwinkel zwischen Geraden

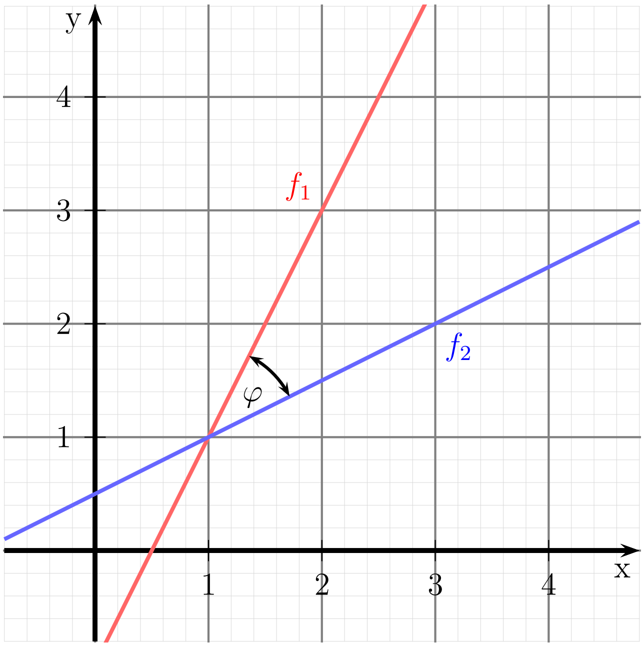
2.7.1 Allgemeiner Schnittwinkel

Schneiden sich zwei Geraden, dann entsteht zwischen diesen Geraden ein Schnittwinkel φ. Man kann zeigen, dass dieser Winkel mit nachfolgender Formel berechnet werden kann.

$$\tan\varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass m_1 die Steigung der Funktion f_1 und m_2 die Steigung der Funktion f_2 ist.

Auf den Beweis der Formel soll an dieser Stelle verzichtet werden. Er kann mit Hilfe der *Additionstheoreme der Trigonometrie* durchgeführt werden.



Wenn $m_1 < m_2$ ist, dann erhalten wir einen **negativen** Schnittwinkel. Will man das vermeiden, dann muss man den **Betrag** des Bruches bilden. Wir erhalten die endgültige Formel:

$$\boxed{\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|}$$

Achtung! Will man mit dieser Formel φ berechnen, dann erhält man für den Fall, dass $\varphi > 90°$ ist, über die Arcustangens-Funktion nur den kleineren *Ergänzungswinkel* φ^* mit $\varphi^* = 180° - \varphi$. Dies ist immer dann der Fall, wenn der **Nenner negativ** wird. In diesem Fall muss also noch umgerechnet werden.

Anmerkung: Für den Fall, dass $m_1 \cdot m_2 = -1$ ist, ist der Nenner Null, der Bruch also nicht definiert. Mit der angegebenem Formel kann daher kein Winkel berechent werden. Dieser Fall wird im nächsten Kapitel behandelt.

Beispiel 1 Gegeben sind die beiden Funktionen:

$$f_1(x) = 2x - 1$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

(Das sind die Funktionen aus der obigen Skizze.)

Der Schnittwinkel wird berechnet:

$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{\frac{3}{2}}{2}\right| \\
\tan\varphi &= \frac{3}{4} \\
\varphi &= \arctan\frac{3}{4} \\
\varphi &\approx 36{,}87°
\end{aligned}$$

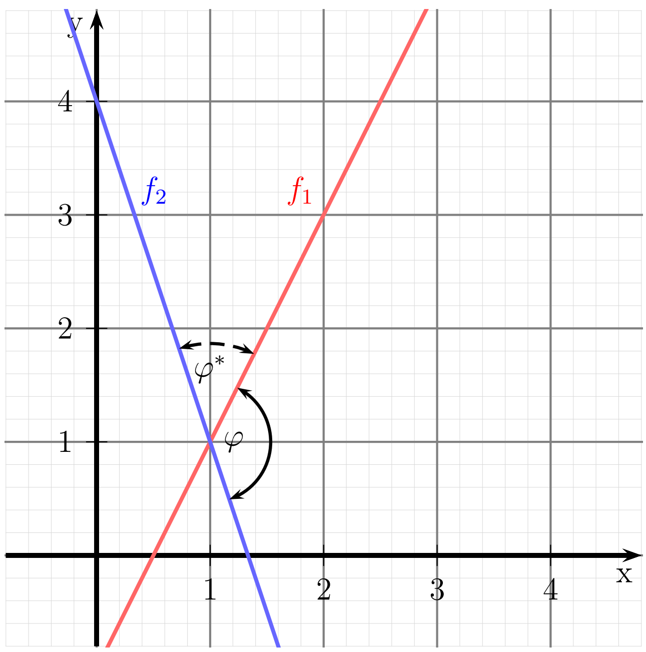
Beispiel 2 Gegeben sind die beiden Funktionen:

$$f_1(x) = 2x - 1$$

$$f_2(x) = -3x + 4$$

Nebenstehend sind die beiden Funktionsgraphen dargestellt. Wie man gut erkennen kann, ist der gesuchte Winkel φ **größer** als 90°. Demnach wird bei der Berechnung der Ergänzungswinkel φ^* als Ergebnis herauskommen. Wir werden also am Ende der Berechnung den gesuchten Winkel φ aus φ^* umrechnen müssen.

Wir berechnen nun den Winkel φ^*.

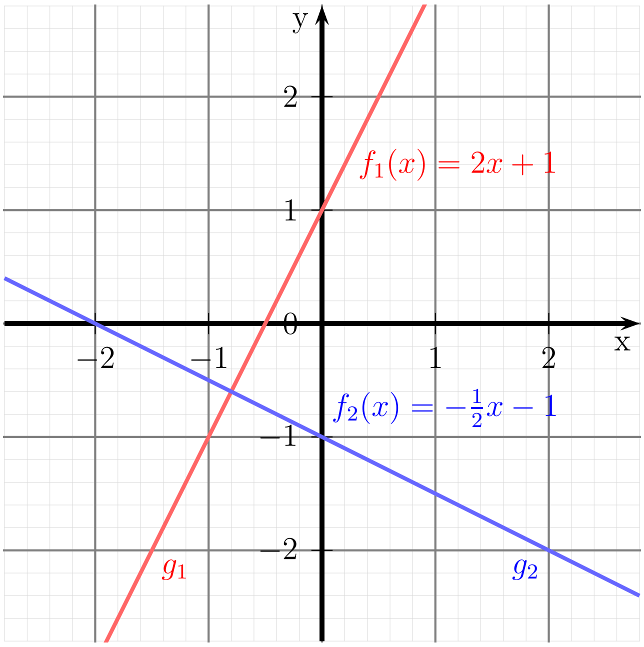


$$\begin{aligned}
\tan\varphi &= \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{2-(-3)}{1 + 2\cdot(-3)}\right| \\
\tan\varphi &= \left|\frac{5}{-5}\right| \\
\varphi &= \arctan|-1| \\
\varphi^* &= 45^\circ
\end{aligned}$$

Der Nenner ist negativ geworden; die Vermutung, dass der gesuchte Winkel größer als 90° sein muss, war also richtig. Deshalb haben wir als Ergebnis nicht den tatsächlich gesuchten Winkel φ, sondern den Ergänzungswinkel φ^* erhalten. Damit kann der eigentlich gesuchte Winkel φ bestimmt werden:

$$\varphi = 180^\circ - \varphi^* = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

2.7.2 Rechtwinkliges Schneiden



Wie schon im vorangehenden Kapitel dargestellt, gibt es immer einen ***Schnittwinkel***, wenn sich zwei Geraden schneiden. Ist dieser Schnittwinkel ein ***Rechter Winkel***, dann sagt man:„***Die Geraden schneiden sich rechtwinklig***.“ oder:„***Die Geraden stehen senkrecht aufeinander***.“ Man kann auch sagen:„***Die Geraden sind zueinander orthogonal***.“

Nebenstehend sind die Graphen zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ dargestellt, für die diese Bedingung zutrifft. Wenn man diese beiden Geraden in Gedanken hin und her dreht, dann kommt man leicht zu folgenden Zusammenhängen: Wenn die Gerade g_1 steigt, dann fällt die Gerade g_2 und umgekehrt. Wenn die Gerade g_1 steiler wird, dann verläuft die Gerade g_2 entsprechend flacher. Natürlich kann man das auch durch eine Formel ausdrücken. Die Formel ergibt sich aus der allgemeinen Schnittpunktformel aus dem vorangegangenen Kapitel. Da der Tangens für einen Rechten Winkel nicht existiert (bzw. unendlich groß ist), ist in der Schnittwinkel-Formel der Nenner gleich Null. Das führt zu nachfolgender Formel. Sie lautet für zwei Funktionen mit $f_1(x) = m_1 \cdot x + b_1$ und $f_2(x) = m_2 \cdot x + b_2$:

$$\textbf{Bedingung für Orthogonalität:} \quad \boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$$

Anmerkung: Diese Bedingung haben wir im vorangegangenen Kapitel „Schnittwinkel“ als die Bedingung kennengelernt, für die die gefundene Formel nicht definiert war. Der Tangens eines Rechten Winkels ist ja bekanntlich nicht definiert. Mit dieser Bedingung sind wir somit in der Lage, **jeden** Schnittwinkel zu bestimmen.

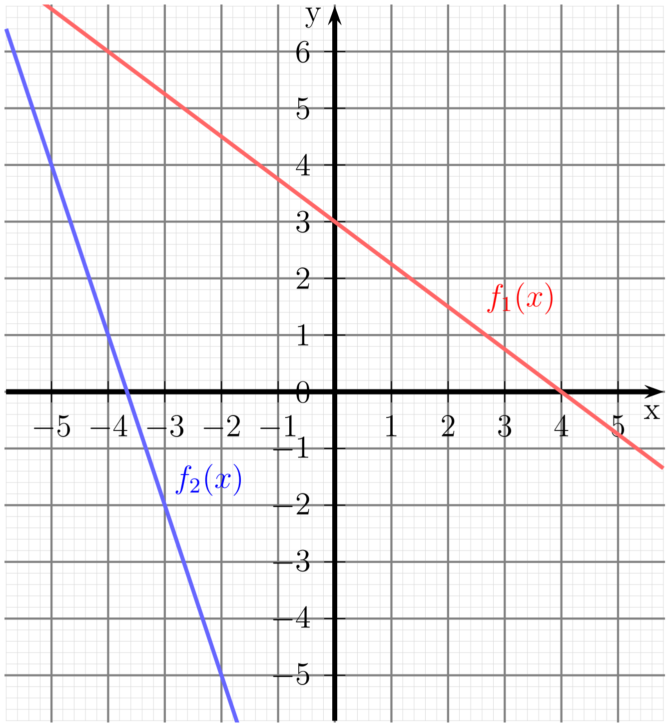
3 Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1

Nebenstehendes Diagramm zeigt die Funktionsgraphen zweier Funktionen. Die Funktion $f_1(x)$ ist rot dargestellt, die Funktion $f_2(x)$ ist blau.

Bestimmen die die Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ der beiden Funktionen.

Berechnen Sie auch den Schnittpunkt S der beiden Funktionsgraphen!



3.2 Aufgabe 2

Eine Gerade hat eine Steigung von $m = -0,5$ und eine Nullstelle bei $x_0 = 12$. Wie lautet die zugehörige Funktion $f(x)$?

3.3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie die **Umkehrfunktionen** $f_1^{-1}(x)$ und $f_2^{-1}(x)$ der beiden Funktionen $f_1(x) = 5x + 15$ und $f_2(x) = -x + 3$.

3.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der Geraden, die durch den Punkt $P(3|-2)$ parallel zur Geraden mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -5x + 9$ verläuft.

3.5 Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Geraden, die durch die Punkte $P_1(-2|5)$ und $P_2(5|-2)$ verläuft!

3.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der Geraden g_1, die die Gerade g_2 mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 3x - 13$ an der Stelle $x_s = 6$ rechtwinklig schneidet.

3.7 Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden g_1 und g_2 mit den zugehörigen Funktionsgleichungen $f_1(x) = 12x + 5$ und $f_2(x) = 10x - 3$.

3.8 Aufgabe 8

Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 mit $f_1(x) = 3x + 2$, $f_2(x) = -x - 6$ und $f_3(x) = m \cdot x - 8$ schneiden sich alle im gleichen Punkt. Bestimmen Sie die Steigung m in der Funktion $f_3(x)$!

3.9 Aufgabe 9

Welchen Abstand hat der Punkt $P(7|3)$ von der Geraden g_1 mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{12}{5}x + 20$?
Lösungshinweis: Bestimmen Sie dazu die Funktionsgleichung $f_2(x)$ der Geraden g_2 durch P senkrecht zur Geraden g_1.

3.10 Aufgabe 10

Die Gerade g verläuft in der Mitte zwischen den Punkten $P_1(1|-5)$ und $P_2(-5|7)$ hindurch und schneidet ihre Verbindungslinie rechtwinklig. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$?

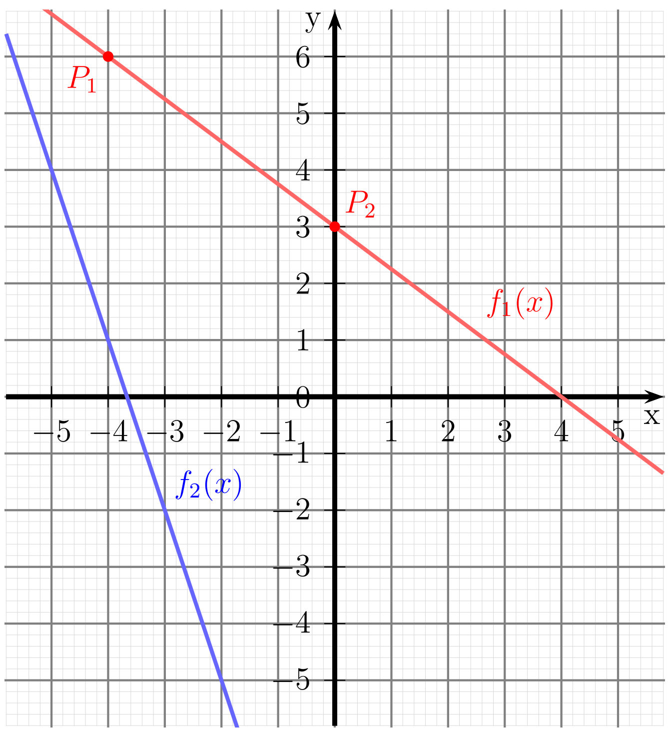
Weitere Übungsaufgaben sind hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/linfkt2.pdf

4 Lösungen der Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

Nebenstehendes Diagramm zeigt die Funktionsgraphen zweier Funktionen. Bestimmen die die Funktionsgleichungen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ der beiden Funktionen.
Berechnen Sie auch den Schnittpunkt S der beiden Funktionsgraphen!



Lösung: Beginnen wir mit der Funktion f_1. Die allgemeine Form lautet:

$$f_1(x) = m \cdot x + b$$

Zwei Punkte, deren Koordinaten man gut ablesen kann, sind beispielsweise die Punkte $P_1(-4|6)$ und $P_2(0|3)$. Wenn man von P_1 nach P_2 geht, muss man 4 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach unten gehen. Damit ist $\Delta x = 4$ und $\Delta y = -3$. Wir erhalten also:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

Der Parameter b ist der Abschnitt auf der y-Achse, den man mit $y_0 = 3$ ablesen kann. Eingesetzt in die allgemeine Form erhalten wir:

$$\boxed{f_1(x) = -\frac{3}{4}x + 3}$$

Auch für f_2 kann man die Steigung gut ablesen. Mit jeder Einheit, die wir nach rechts gehen, geht man 3 Einheiten nach unten. Damit ist $\Delta x = 1$ und $\Delta y = -3$. Wir erhalten also $m = -3$. Die Funktionsgleichung sieht damit so aus:

$$f_2(x) = -3x + b$$

Den Abschnitt auf der y-Achse kann man nicht ablesen, er liegt außerhalb des dargestellten Diagramms. Daher setzt man von einem beliebigen Punkt, dessen Koordinaten man gut ablesen kann, diese in die Funktionsgleichung ein und bestimmt damit den Parameter b. Ich wähle hierzu den Punkt $P_3(-4|1)$ aus.

$$\begin{aligned} y &= -3x + b \\ 1 &= -3 \cdot (-4) + b \\ 1 &= 12 + b \quad |-12 \\ b &= -11 \end{aligned}$$

Den gefundenen Wert für b setzen wir in die Funktionsgleichung ein und erhalten f_2.

$$\boxed{f_2(x) = -3x - 11}$$

Was noch fehlt, ist die Bestimmung des Schnittpunktes. Wie geht das?

Der Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ ist der Punkt, der **beide** Funktionsgleichungen erfüllt. Setzen wir seine allgemeinen Koordinaten x_s und y_s in die beiden Funktionsgleichungen ein, dann erhalten wir ein Lineargleichungssystem mit zwei Variablen.

$$\begin{aligned} y_s &= -\frac{3}{4}x_s + 3 \\ y_s &= -3x_s - 11 \end{aligned}$$

Da beide Gleichungen nach y_s aufgelöst sind, bietet sich das **Gleichsetzungsverfahren**[2] zur Lösung an. Das gilt nicht nur für diese Aufgabe, das ist bei Schnittpunktbestimmungen **immer** so.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x_s + 3 &= -3x_s - 11 \quad quad| + 3x_s - 3 \\ \frac{12}{4}x_s - \frac{3}{4}x_s &= -14 \\ \frac{9}{4}x_s &= -14 \qquad\qquad |\cdot \tfrac{4}{9} \\ x_s &= -\frac{56}{9} \end{aligned}$$

Anmerkung: In der Regel ist es sinnvoll, beim Lösen einer Gleichung mit Brüchen die Gleichung **sofort** mit dem **Hauptnenner** zu multiplizieren. Dann fallen alle Brüche weg. In unserem Beispiel sähe das so aus:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x_s + 3 &= -3x_s - 11 \quad |\cdot 4 \\ -3x_s + 12 &= -12x_s - 44 \quad | + 12x_s - 12 \\ 9x_s &= -56 \quad |:9 \\ x_s &= -\frac{56}{9} \end{aligned}$$

Den zugehörigen Wert y_s kann man beliebig mit einer der beiden Funktionen bestimmen. Ich wähle dafür $f_2(x) = -3x - 11$ aus.

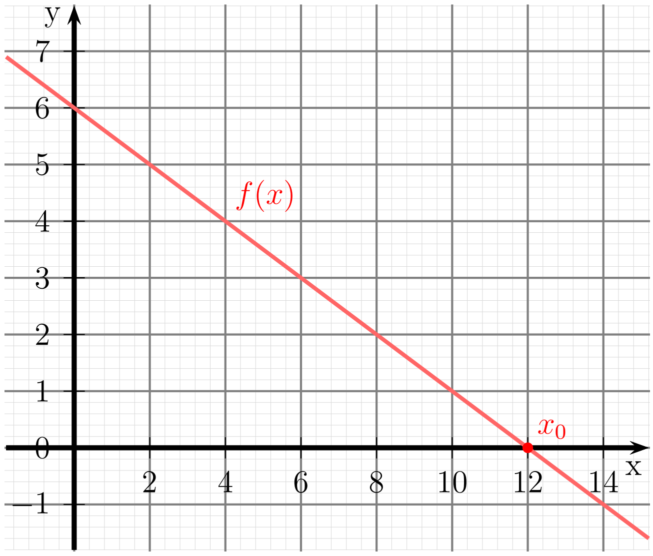
$$\begin{aligned} y_s &= f_2(x_s) \\ f_2(x) &= -3x - 11 \\ y_s &= -3\cdot(-\frac{56}{9}) - 11 \\ &= \frac{56}{3} - \frac{33}{3} \\ y_s &= \frac{23}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{S\left(-\tfrac{56}{9}\middle|\tfrac{23}{3}\right)}$$

[2]Einzelheiten zum Gleichsetzungsverfahren siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

4.2 Aufgabe 2

Eine Gerade hat eine Steigung von $m = -0,5$ und eine Nullstelle bei $x_0 = 12$. Wie lautet die zugehörige Funktion $f(x)$?



Lösung: Die Normalform für die Lineare Funktion lautet:

$$f(x) = m \cdot x + b$$

Mit der angegebenen Steigung $m = -0,5$ lautet die Funktionsgleichung:

$$f(x) = -0,5 \cdot x + b$$

Wir müssen nur noch b bestimmen. Das geht, indem wir die Koordinaten der Nullstelle $N(12|0)$ in die Funktion einsetzen und dann nach b auflösen.

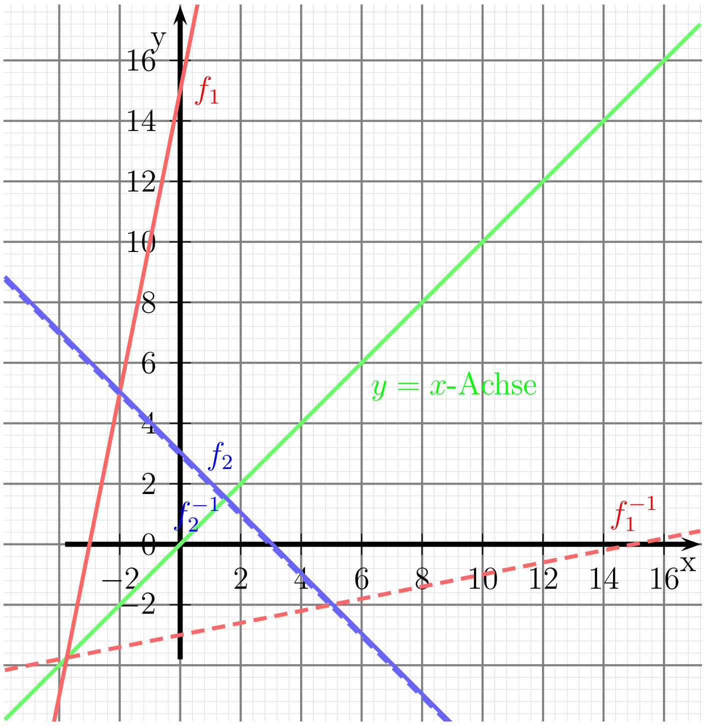
$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -0,5 \cdot 12 + b &= 0 \\ -6 + b &= 0 \quad | + 6 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Wir setzen die gefundenen Werte in die Normalform ein und erhalten die gesuchte Funktionsgleichung:

$$\boxed{f(x) = -0,5 \cdot x + 6}$$

4.3 Aufgabe 3

Bestimmen Sie die **Umkehrfunktionen** $f_1^{-1}(x)$ und $f_2^{-1}(x)$ der beiden Funktionen $f_1(x) = 5x + 15$ und $f_2(x) = -x + 3$.



Lösung: Beginnen wir mir f_1. Wenn man die „Rollen" von x und y tauscht und dann die Gleichung neu nach y auflöst, erhält man die sogenannte ***Umkehrfunktion*** $f^{-1}(x)$.

$$y = 5x + 15$$

Wir machen den Tausch von x und y und lösen nach y auf.

$$\begin{aligned} x &= 5y + 15 \quad | -15 \\ x - 15 &= 5y \quad | :5 \\ \frac{1}{5}x - 3 &= y \\ y &= \frac{1}{5}x - 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{f_1^{-1}(x) = \tfrac{1}{5}x - 3}$$

Es folgt die Berechnung der Umkehrfunktion von f_2.

$$y = -x + 3$$

Wir machen den Tausch von x und y und lösen nach y auf.

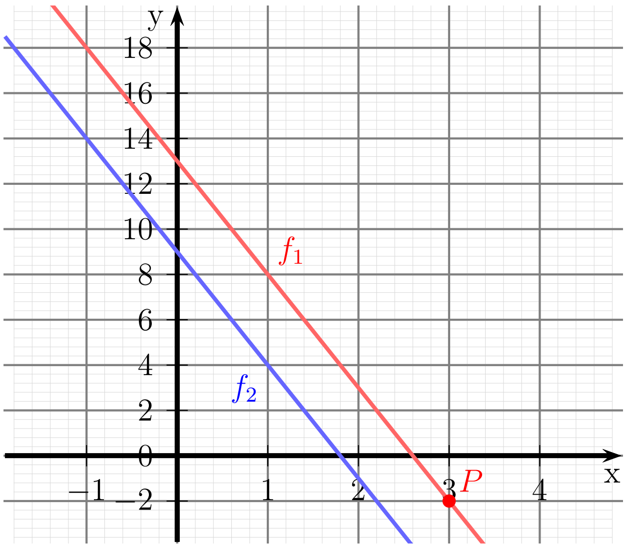
$$\begin{aligned} x &= -y + 3 \quad | +y \\ x + y &= 3 \quad | -x \\ y &= -x + 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{f_2^{-1}(x) = -x + 3}$$

Anmerkung: Die Umkehrfunktion $f_2^{-1}(x)$ ist identisch mit der urprünglichen Funktion $f_2(x)$!

4.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der Geraden, die durch den Punkt $P(3|-2)$ parallel zur Geraden mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = -5x + 9$ verläuft.



Lösung: Wenn zwei Geraden *parallel* verlaufen, dann haben sie die *gleiche Steigung*. Die Steigung für $f_1(x)$ kann also direkt aus $f_2(x)$ mit $m = -5$ übernommen werden.

$$f_1(x) = -5x + b$$

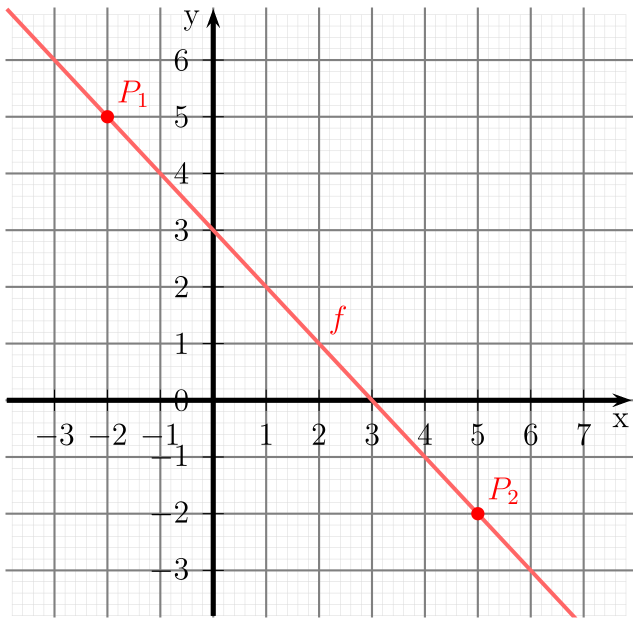
Zur Bestimmung von b setzen wir die Koordinaten des gegebenen Punktes in die Funktionsgleichung ein.

$$\begin{aligned} y &= -5x + b \\ -2 &= -5 \cdot 3 + b \\ -2 &= -15 + b \quad | +15 \\ 13 &= b \end{aligned}$$

$$\boxed{f_1(x) = -5x + 13}$$

4.5 Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Geraden, die durch die Punkte $P_1(-2|5)$ und $P_2(5|-2)$ verläuft!



Lösung: Zu dieser Aufgabe gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Ich stelle sie nacheinander dar.

Lösungsweg 1:
In die allgemeine Form der Funktionsgleichung $f(x) = m \cdot x + b$ setzt man nacheinander die Koordinaten beider Punkte ein und erhält ein Lineargleichungssystem zweiter Ordnung. In diesem Beispiel soll dieses mit dem Subtraktionsverfahren gelöst werden.

$$\begin{array}{lrrcll}
(1) & m \cdot (-2) & +b & = & 5 & \\
(2) & m \cdot 5 & +b & = & -2 & \\
\hline
(1) & -2m & +b & = & 5 & |- \\
(2) & 5m & +b & = & -2 & | \\
\hline
 & 7m & & = & -7 & | : 7 \\
 & & m & = & -1 &
\end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (1) ein:

$$\begin{aligned}
-2 \cdot (-1) + b &= 5 \\
2 + b &= 5 \quad | - 2 \\
b &= 3
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = -x + 3}$$

Lösungsweg 2:
Aus den Koordinaten der beiden Punkte kann mit Hilfe der Definition der Steigung direkt m bestimmt werden.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 5}{5 - (-2)} = \frac{-7}{7} = -1$$

Damit erhalte ich die Funktionsgleichung in dieser Form:

$$f(x) = -x + b$$

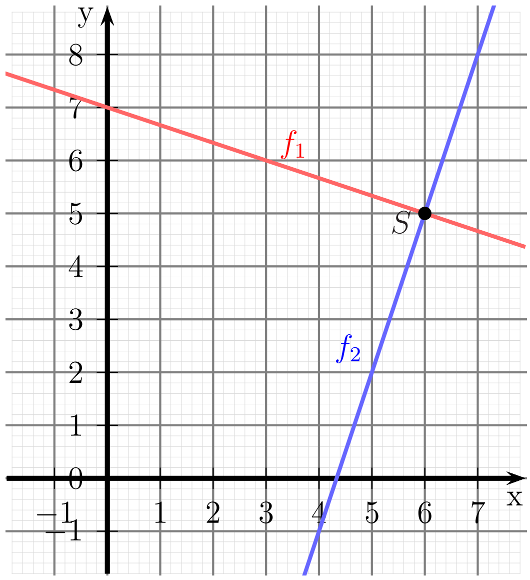
Um b zu bestimmen, setze ich die Koordinaten des Punktes P_1 in diese Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 5 &= -(-2) + b \\ 5 &= 2 + b \quad | - 2 \\ 3 &= b \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = -x + 3}$$

4.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f_1(x)$ der Geraden g_1, die die Gerade g_2 mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 3x - 13$ an der Stelle $x_s = 6$ rechtwinklig schneidet.



Lösung: Die Bedingung für rechtwinkliges Schneiden lautet:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Damit können wir die Steigung für f_1 bestimmen.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= -1 \\ m_1 \cdot 3 &= -1 \quad \mid : 3 \\ m_1 &= -\frac{1}{3} \\ f_1(x) &= -\frac{1}{3}x + b \end{aligned}$$

Die Geraden schneiden sich bei $x_s = 6$.
Den zugehörigen y-Wert können wir aus der Funktionsgleichung $f_2(x)$ bekommen.

$$y_s = f_2(x_s) = 3 \cdot 6 - 13 = 5$$

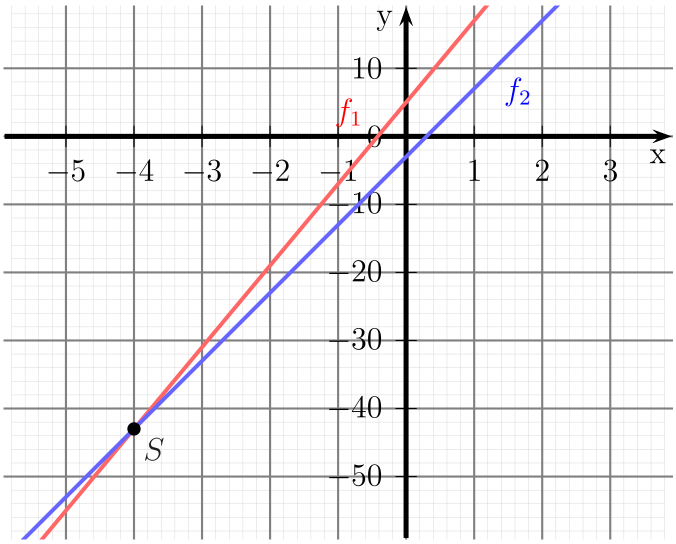
Jetzt können wir die Koordinaten des Schnittpunktes in die Funktionsgleichung von $f_1(x)$ einsetzen, um b zu bestimmen.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= -\frac{1}{3}x_s + b \\ 5 &= -\frac{1}{3} \cdot 6 + b \\ 5 &= -2 + b \quad \mid +2 \\ 7 &= b \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = -\tfrac{1}{3}x + 7}$$

4.7 Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden g_1 und g_2 mit den zugehörigen Funktionsgleichungen $f_1(x) = 12x + 5$ und $f_2(x) = 10x - 3$.



Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung können die beiden Funktionsterme gleichgesetzt werden. Dadurch erhält man den x-Wert x_S des Scheitelpunktes S. Den zugehörigen y-Wert y_S findet man anschließend, indem man x_S in eine der beiden Funktionsgleichungen für x einsetzt. Hierzu habe ich mir $f_1(x)$ ausgesucht.

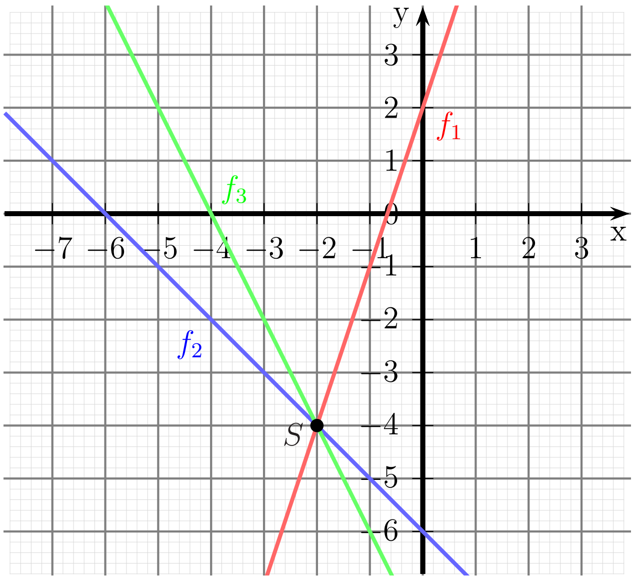
$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\
12x_s + 5 &= 10x_s - 3 \quad | - 10x_s - 5 \\
2x_s &= -8 \quad | : 2 \\
x_s &= -4 \\
\\
y_s &= f_1(x_s) \\
&= 12 \cdot (-4) + 5 \\
y_s &= -43
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Schnittpunkt: } S(-4|-43)}$$

4.8 Aufgabe 8

Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 mit $f_1(x) = 3x + 2$, $f_2(x) = -x - 6$ und $f_3(x) = m \cdot x - 8$ schneiden sich alle im gleichen Punkt. Bestimmen Sie die Steigung m in der Funktion $f_3(x)$!

Wir bestimmen zunächst die Koordinaten des Schnittpunktes durch Gleichsetzen der Funktionsterme von $f_1(x)$ und $f_2(x)$.



$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ 3x_s + 2 &= -x_s - 6 \quad | + x_s - 2 \\ 4x_s &= -8 \quad | : 4 \\ x_s &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_s &= f_1(x_s) \\ &= 3 \cdot (-2) + 2 \\ y_s &= -4 \end{aligned}$$

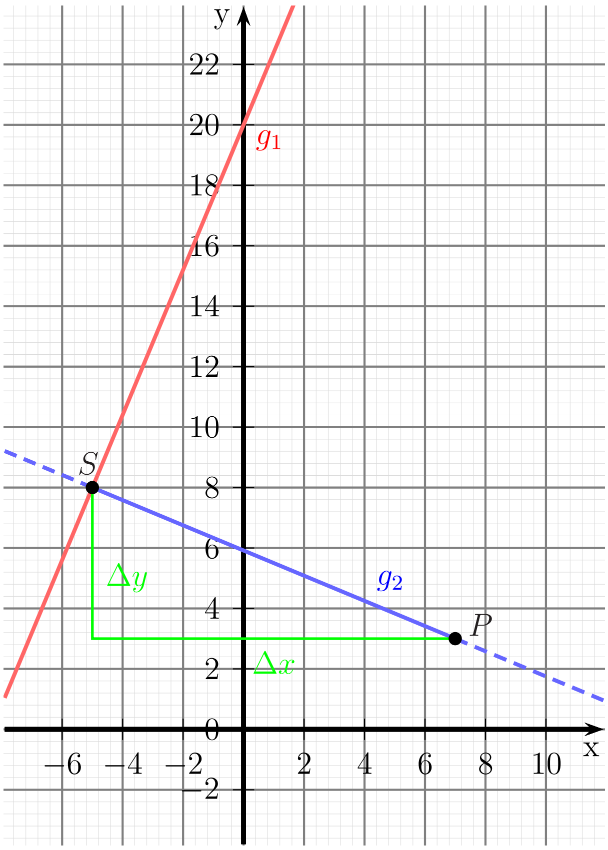
Die Koordinaten des gefundenen Schnittpunktes $S(-2|-4)$ setzen wir nun in $f_3(x)$ ein und lösen nach m auf.

$$\begin{aligned} y_s &= f_3(x_s) \\ -4 &= m \cdot (-2) - 8 \quad | + 2m + 4 \\ 2m &= -4 \quad | : 2 \\ m &= -2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Steigung: } m = -2}$$

4.9 Aufgabe 9

Welchen Abstand hat der Punkt $P(7|3)$ von der Geraden g_1 mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{12}{5}x + 20$?



Lösung: Zur Lösung bestimmen wir die Funktionsgleichung $f_2(x)$ der Geraden g_2 durch P senkrecht zur Geraden g_1. Danach wird der Schnittpunkt S zwischen f_1 und f_2 wird bestimmt. Anschließend kann die Strecke $\overline{PS}$ mithilfe des rechtwinkligen Dreiecks aus der Strecke $\overline{PS}$, Δx und Δy berechnet werden. Das ganze führen wir nun Schritt für Schritt durch.

Die Geradengleichung dieser Funktion lautet $f_2(x) = m_2 \cdot x + b$. Die Steigung erhalten wir über die Bedingung für rechtwinkliges Schneiden mit der Geraden g_1.

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= -1 \\ \frac{12}{5} \cdot m_2 &= -1 \quad \left| \cdot \frac{5}{12} \right. \\ m_2 &= -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

Den Parameter b erhalten wir, indem wir die Koordinaten des Schnittpunktes in f_2 einsetzen und die Gleichung nach b auflösen.

$$\begin{aligned} f_2(x_p) &= y_p \\ -\frac{5}{12} \cdot 7 + b &= 3 \\ -\frac{35}{12} + b &= 3 \quad \left| + \frac{35}{12} \right. \\ b &= \frac{71}{12} \end{aligned}$$

$$f_2(x) = -\frac{5}{12}x + \frac{71}{12}$$

Nun bestimmen wir den Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ zwischen den beiden Geraden. Dazu setzen wir die beiden Funktionsterme gleich.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ \frac{12}{5}x_s + 20 &= -\frac{5}{12}x_s + \frac{71}{12} \quad | \cdot 60 \\ 144x_s + 1200 &= -25x_s + 355 \quad | + 25x_s - 1200 \\ 169x_s &= -845 \quad | : 169 \\ x_s &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_s &= f_1(x_s) \\ y_s &= \frac{12}{5} \cdot (-5) + 20 \\ y_s &= 8 \end{aligned}$$

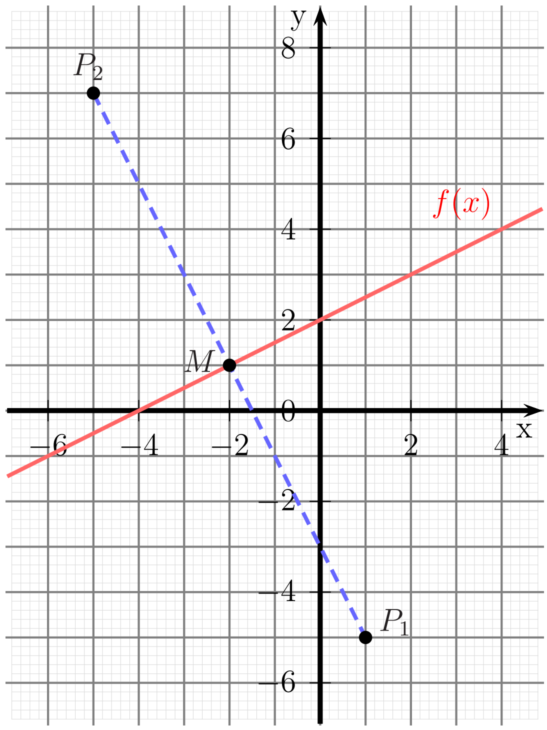
Mit dem gefundenen Schnittpunkt $S(-5|8)$ und dem gegebenen Punkt $P(7|3)$ kann nun der gesuchte Abstand bestimmt werden. Er ist identisch mit der Länge der Strecke $\overline{PS}$. Zeichnet man zwischen P und S ein Steigungsdreieck für g_2, dann erkennt man, dass die Strecke $\overline{PS}$ aus Δx und Δy mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden kann.

$$\begin{aligned} (\overline{PS})^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad |\sqrt{} \\ \overline{PS} &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2} \\ &= \sqrt{(-5-7)^2 + (8-3)^2} \\ &= \sqrt{144 + 25} \\ \overline{PS} &= 13 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Abstand: 13 Längeneinheiten}}$$

4.10 Aufgabe 10

Die Gerade g verläuft in der Mitte zwischen den Punkten $P_1(1|-5)$ und $P_2(-5|7)$ hindurch und schneidet ihre Verbindungslinie rechtwinklig. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung $f(x)$?



Lösung: Der Lösungsweg könnte folgendermaßen aussehen:
Die gesuchte Gerade muss auf der Verbindungslinie $\overline{P_1P_2}$ senkrecht stehen. Man bestimmt also die Steigung m_v der Verbindungslinie $\overline{P_1P_2}$ und berechnet daraus mit Hilfe der Formel für rechtwinkliges Schneiden die Steigung m der gesuchten Funktionsgleichung. Dann bestimmt man den Mittelpunkt M zwischen P_1 und P_2. Das kann man durch Mittelwertbildung der Koordinaten machen. Da der Mittelpunkt M einen Punkt der gesuchten Geraden darstellt, kann man seine Koordinaten in die Geradengleichung einsetzen, um damit den noch fehlenden Parameter b zu bestimmen. Diese Schritte führen wir nun der Reihe nach durch.

Die Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten hat die Steigung m_v, die wir berechnen können. Daraus lässt sich dann die Steigung m der gesuchten Funktion bestimmen.

$$m_v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-5)}{-5-1} = \frac{12}{-6} = -2$$

$$\begin{aligned}
m_v \cdot m &= -1 \\
-2 \cdot m &= -1 \quad |:(-2) \\
m &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \quad f(x) &= \frac{1}{2}x + b
\end{aligned}$$

Um den noch unbekannten Parameter b zu bestimmen, benötigen wir eine weitere Beziehung. Bekannt ist, dass die gesuchte Gerade genau in der *Mitte* zwischen den Punkten P_1 und P_2 hindurch geht. Wenn wir die Koordinaten dieses Punktes – nennen wir ihn $M(x_M|y_M)$ – in die Funktionsgleichung einsetzen, erhalten wir b. Da der Punkt M in der Mitte zwischen den Punkten P_1 und P_2 liegt, stellen seine Koordinaten x_M und y_M

das Arithmetische Mittel zwischen den entsprechenden Koordinaten von P_1 und P_2 dar.

$$\begin{aligned}
x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\
x_M &= \frac{1 + (-5)}{2} \\
x_M &= -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_M &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\
y_M &= \frac{-5 + 7}{2} \\
y_M &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_M &= f(x_M) \\
1 &= \frac{1}{2} \cdot (-2) + b \\
1 &= -1 + b \quad | + 1 \\
2 &= b
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \tfrac{1}{2}x + 2}$$