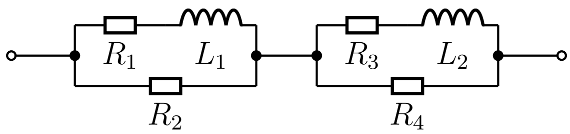
Übungen zur Komplexen Rechnung in der Elektrotechnik

Aufgabe 1

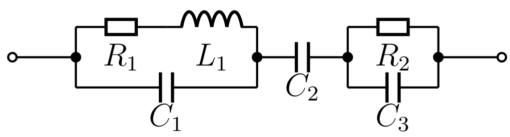
Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ. Folgende Werte sind bekannt:



$R_1 = 100\,\Omega \quad R_2 = 200\,\Omega \quad R_3 = 200\,\Omega$
$R_4 = 100\,\Omega \quad L_1 = 0{,}1\,\mathrm{H} \quad L_2 = 0{,}1\,\mathrm{H} \quad \omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$

Aufgabe 2

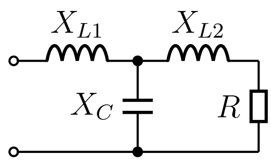
Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ. Folgende Werte sind bekannt:



$R_1 = 100\,\Omega \quad R_2 = 200\,\Omega \quad L_1 = 200\,\mathrm{mH} \quad C_1 = 2\,\mu\mathrm{F} \quad C_2 = 10\,\mu\mathrm{F} \quad C_3 = 2\,\mu\mathrm{F}$
$\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$

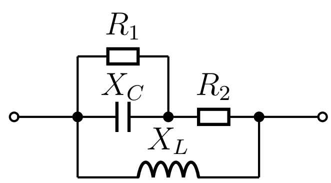
Aufgabe 3

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Widerstände X_{L1} und X_C so, dass der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung gleich $10\,\Omega$ reell wird!
Bekannt sind die Werte $X_{L2} = 8\,\Omega$ und $R = 16\,\Omega$.



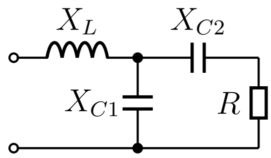
Aufgabe 4

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand R_2 so, dass der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung reell wird! Folgende Werte sind bekannt:
$X_C = 2\,\Omega \quad X_L = 8\,\Omega \quad R_1 = 4\,\Omega$
Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



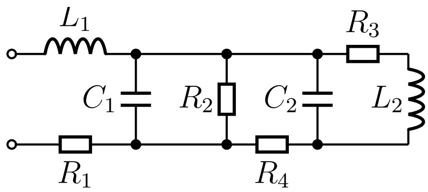
Aufgabe 5

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand X_{C2} so, dass der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung reell wird! Bekannt sind die Werte:
$X_{C1} = 50\,\Omega \quad X_L = 12,5\,\Omega \quad R_1 = 20\,\Omega.$
Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



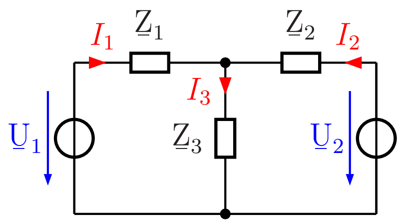
Aufgabe 6

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung! Bekannt sind folgende Werte:
$\omega = 100\,\text{s}^{-1} \quad L_1 = 0{,}5\,\text{H} \quad L_2 = 1\,\text{H}$
$C_1 = 500\,\mu\text{F} \quad C_2 = 100\,\mu\text{F} \; R_1 = 20\,\Omega$
$R_2 = 50\,\Omega \quad R_3 = 50\,\Omega \quad R_4 = 30\,\Omega$



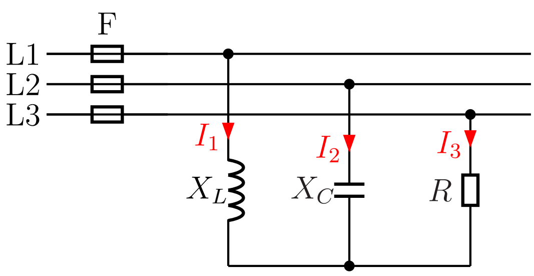
Aufgabe 7

Die Ströme in nebenstehende Schaltung können durch ein Lineargleichungssystem beschrieben werden. Stellen Sie das Gleichungssystem auf und berechnen Sie die Komplexen Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$. Bekannt sind die Werte:
$\underline{Z}_1 = 1\,\Omega - j3\,\Omega; \quad \underline{Z}_2 = 2\,\Omega - j4\,\Omega;$
$\underline{Z}_3 = j2\,\Omega; \quad \underline{U}_1 = j4\,\text{V}; \quad \underline{U}_2 = 4\,\text{V}$



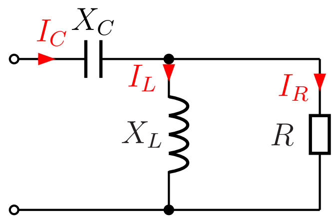
Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Ströme I_1, I_2 und I_3 in den Außenleitern des nebenstehend dargestellten Dreiphasenwechselstromnetzes mit $U_L = 400\text{V}$! Stellen Sie dazu ein Lineargleichungssystem für die drei Komplexen Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Berechnen Sie anschließend die gesuchten Beträge der Ströme I_1, I_2 und I_3. Bekannt sind die Werte:
$X_L = 100\,\Omega; \quad X_C = 200\,\Omega; \quad R = 50\,\Omega$



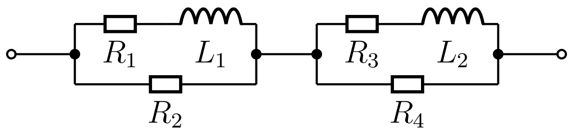
Aufgabe 9

Nebenstehende Schaltung ist an eine Wechselspannung von $U = 100V$ angschlossen. Die Bauteilwerte sind:
$X_C = 20\,\Omega$
$X_L = 25\,\Omega$
$R = 50\,\Omega$
Gesucht sind die Ströme I_C im Kondensator, I_L in der Spule und I_R im ohmschen Widerstand.



Hier die Lösungen mit Lösungsweg

Aufgabe 1 Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ. Folgende Werte sind bekannt:



$R_1 = 100\,\Omega \quad R_2 = 200\,\Omega \quad R_3 = 200\,\Omega \quad R_4 = 100\,\Omega \quad L_1 = 0{,}1\,\mathrm{H} \quad L_2 = 0{,}1\,\mathrm{H} \quad \omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$

Lösung: Wir bestimmen zunächst aus den gegebenen Daten die komplexen Wirk- und Blindwiderstände.

$$\begin{aligned}
R_1 = 100\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{R}_1 = 100\,\Omega \\
R_2 = 200\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{R}_2 = 200\,\Omega \\
R_3 = 200\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{R}_3 = 200\,\Omega \\
R_4 = 100\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{R}_4 = 100\,\Omega \\
X_{L1} = 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}1\,\mathrm{H} = 100\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{X}_{L1} = j100\,\Omega \\
X_{L2} = 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}1\,\mathrm{H} = 100\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{X}_{L2} = j100\,\Omega
\end{aligned}$$

Ich fasse R_1 und X_{L1} mit der Formel für die Reihenschaltung als Z_1 zusammen.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} = 100\,\Omega + j100\,\Omega$$

Ich fasse Z_1 mit R_2 zu Z_2 zusammen. Dazu verwende ich die Formel für die Parallelschaltung.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{R}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{R}_2} = \frac{(100\,\Omega + j100\,\Omega) \cdot 200\,\Omega}{100\,\Omega + j100\,\Omega + 200\,\Omega} = \frac{20000\,\Omega^2 + j20000\,\Omega^2}{300\,\Omega + j100\,\Omega}$$

Damit die Zahlen und die Einheiten nicht so groß werden, klammere ich im Zähler und im Nenner $100\,\Omega$ aus und kürze dadurch.

$$\underline{Z}_2 = \frac{100\,\Omega \cdot (200\,\Omega + j200\,\Omega)}{100\,\Omega \cdot (3 + j1)} = \frac{200\,\Omega + j200\,\Omega}{3 + j1}$$

Das muss ich jetzt aufteilen können in Real- und Imaginärteil. Dazu muss ich den Bruch **Konjugiert Komplex erweitern**.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \frac{200\,\Omega + j200\,\Omega}{3 + j1} \cdot \frac{3 - j1}{3 - j1} = \frac{600\,\Omega - j200\,\Omega + j600\,\Omega + 200\,\Omega}{3^2 + 1^2} = \frac{800\,\Omega + j400\,\Omega}{10} \\
\underline{Z}_2 &= 80\,\Omega + j40\,\Omega
\end{aligned}$$

Ähnlich müssen wir auch die rechte Teilschaltung zusammenfassen. Die Reihenschaltung aus R_3 und X_{L2} bekommt den Namen Z_3. Die Parallelschaltung von Z_3 mit R_4 nenne ich dann Z_4.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2} = 200\,\Omega + j100\,\Omega \\
\underline{Z}_4 &= \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{R}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{R}_4} = \frac{(200\,\Omega + j100\,\Omega) \cdot 100\,\Omega}{200\,\Omega + j100\,\Omega + 100\,\Omega} = \frac{20000\,\Omega^2 + j10000\,\Omega^2}{300\,\Omega + j100\,\Omega} \\
&= \frac{100\,\Omega \cdot (200\,\Omega + j100\,\Omega)}{100\,\Omega \cdot (3 + j1)} = \frac{200\,\Omega + j100\,\Omega}{3 + j1} \\
&= \frac{(200\,\Omega + j100\,\Omega) \cdot (3 - j1)}{(3 + j1) \cdot (3 - j1)} = \frac{600\,\Omega - j200\,\Omega + j300\,\Omega + 100\,\Omega}{3^2 + 1^2} = \frac{700\,\Omega + j100\,\Omega}{10} \\
\underline{Z}_4 &= 70\,\Omega + j10\,\Omega
\end{aligned}$$

Um den Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ zu bestimmen, muss ich nun noch $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_4$ addieren.

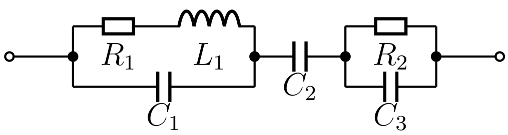
$$\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 = 80\,\Omega + j40\,\Omega + 70\,\Omega + j10\,\Omega = 150\,\Omega + j50\,\Omega$$

Mit den entsprechenden Formeln kann ich dann den Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ von $\underline{Z}$ berechnen.

$$\begin{aligned}
Z &= \sqrt{(\mathrm{Re}\underline{Z})^2 + (\mathrm{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(150\,\Omega)^2 + (50\,\Omega)^2} \approx 158\,\Omega \\
\varphi &= \arctan \frac{\mathrm{Im}\underline{Z}}{\mathrm{Re}\underline{Z}} = \arctan \frac{50\,\Omega}{150\,\Omega} \approx 18{,}43^\circ
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z \approx 158\,\Omega} \qquad \boxed{\varphi \approx 18{,}43^\circ}$$

Aufgabe 2 Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ. Folgende Werte sind bekannt:



$R_1 = 100\,\Omega$ $R_2 = 200\,\Omega$ $L_1 = 200\,\mathrm{mH}$ $C_1 = 2\,\mu\mathrm{F}$ $C_2 = 10\,\mu\mathrm{F}$ $C_3 = 2\,\mu\mathrm{F}$ $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$

Lösung: Wie schon bei Aufgabe 1 bestimmen wir zunächst aus den gegebenen Daten die komplexen Wirk- und Blindwiderstände.

$$\begin{aligned}
R_1 &= 100\,\Omega &&\Rightarrow \quad \underline{R}_1 = 100\,\Omega\\
R_2 &= 200\,\Omega &&\Rightarrow \quad \underline{R}_2 = 200\,\Omega\\
X_L = \omega \cdot L = 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 200\,\mathrm{mH} &= 200\,\Omega &&\Rightarrow \quad \underline{X}_L = j200\,\Omega\\
X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 2\,\mu\mathrm{F}} &= 500\,\Omega &&\Rightarrow \quad \underline{X}_{C1} = -j500\,\Omega\\
X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 10\,\mu\mathrm{F}} &= 100\,\Omega &&\Rightarrow \quad \underline{X}_{C2} = -j100\,\Omega\\
X_{C3} = \frac{1}{\omega \cdot C_3} = \frac{1}{1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 2\,\mu\mathrm{F}} &= 500\,\Omega &&\Rightarrow \quad \underline{X}_{C3} = -j500\,\Omega
\end{aligned}$$

Als nächstes werden R_1 und X_L mit Hilfe der Formel für die Reihenschaltung zu Z_1 zusammengefasst.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} = 100\,\Omega + j200\,\Omega$$

Nun kann man mit Hilfe der Formel für die Parallelschaltung Z_1 und X_{C1} zu Z_2 zusammengefasst werden. Nachdem die Werte eingesetzt und zusamengefasst sind, wird ausgeklammert, gekürzt und Konjugiert Komplex erweitert, um $\underline{Z}_2$ in Realteil und Imaginärteil aufspalten zu können.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C1}} = \frac{(100\,\Omega + j200\,\Omega) \cdot (-j500\,\Omega)}{100\,\Omega + j200\,\Omega + (-j500\,\Omega)} = \frac{-j50000\,\Omega^2 + 100000\,\Omega^2}{100\,\Omega - j300\,\Omega}\\
&= \frac{100\,\Omega \cdot (-j500\,\Omega + 1000\,\Omega)}{100\,\Omega \cdot (1 - j3)} = \frac{-j500\,\Omega + 1000\,\Omega}{1 - j3} = \frac{(-j500\,\Omega + 1000\,\Omega) \cdot (1 + j3)}{(1 - j3) \cdot (1 + j3)}\\
&= \frac{-j500\,\Omega + 1500\,\Omega + 1000\,\Omega + j3000\,\Omega}{1^2 + 3^2} = \frac{2500\,\Omega + j2500\,\Omega}{10} = 250\,\Omega + j250\,\Omega
\end{aligned}$$

Die Parallelschaltung aus R_2 und X_{C3} nenne ich Z_3 und berechne sie mit der Parallelschaltungsformel. Anschließend wird wieder zusammengefasst, ausgeklammert, gekürzt und Konjugiert Komplex erweitert.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_{C3}}{\underline{R}_2 + \underline{X}_{C3}} = \frac{200\,\Omega \cdot (-j500\,\Omega)}{200\,\Omega + (-j500\,\Omega)} = \frac{-j100000\,\Omega^2}{200\,\Omega - j500\,\Omega} = \frac{100\,\Omega \cdot (-j1000\,\Omega)}{100\,\Omega \cdot (2-j5)} \\
&= \frac{-j1000\,\Omega}{2-j5} = \frac{(-j1000\,\Omega)\cdot(2+j5)}{(2-j5)\cdot(2+j5)} = \frac{-j2000\,\Omega + 5000\,\Omega}{2^2+5^2} = \frac{-j2000\,\Omega + 5000\,\Omega}{29} \\
&\approx -j68{,}97\,\Omega + 172{,}41\,\Omega
\end{aligned}
$$

Die drei Widerstände Z_2, X_{C2} und Z_3 sind in Reihe geschaltet. Ich kann also den Gesamt-Scheinwiderstand Z mit der Reihenschaltungsformel berechnen und zusammenfassen.

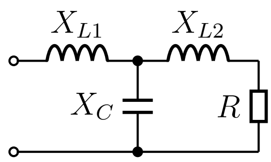
$$\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{X}_{C2} + \underline{Z}_3 = 250\,\Omega + j250\,\Omega - j100\,\Omega - j68{,}97\,\Omega + 172{,}41\,\Omega = 422{,}41\,\Omega + j81{,}03\,\Omega$$

Der Betrag und der Phasenwinkel dieses Widerstandes kann wieder mit Hilfe der Grundformeln berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
Z &= \sqrt{(\mathrm{Re}\underline{Z})^2 + (\mathrm{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(422{,}41\,\Omega)^2 + (81{,}03\,\Omega)^2} \approx 430{,}11\,\Omega \\
\varphi &= \arctan\frac{\mathrm{Im}\underline{Z}}{\mathrm{Re}\underline{Z}} = \arctan\frac{81{,}03\,\Omega}{422{,}41\,\Omega} \approx 10{,}86^\circ
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Z \approx 430{,}11\,\Omega} \qquad \boxed{\varphi \approx 10{,}86^\circ}$$

Aufgabe 3 Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Widerstände X_{L1} und X_C so, dass der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung gleich $10\,\Omega$ reell wird!
Bekannt sind die Werte $X_{L2} = 8\,\Omega$ und $R = 16\,\Omega$.



Lösung: Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe $\underline{Z}$ aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größen $\underline{X}_{L1}$ und $\underline{X}_C$ an mit:

$$\underline{X}_{L1} = jX_L \quad \text{und} \quad \underline{X}_C = -jX_C$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur zwei **reelle** Größen, nämlich X_L und X_C, bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht demnach also so aus:

$$\begin{aligned} R = 16\,\Omega \quad &\Rightarrow \quad \underline{R} = 16\,\Omega \\ X_{L2} = 8\,\Omega \quad &\Rightarrow \quad \underline{X}_{L2} = j8\,\Omega \\ X_{L1} = X_L \quad &\Rightarrow \quad \underline{X}_{L1} = jX_L \\ &\qquad\;\; \underline{X}_C = -jX_C \end{aligned}$$

Die Reihenschaltung aus X_{L2} und R nenne ich Z_1 und erhalte mit der Formel für die Reihenschaltung:

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{L2} = 16\,\Omega + j8\,\Omega$$

Z_1 ist zu X_C parallel geschaltet. Diese Parallelschaltung nenne ich Z_2. Ich bestimme $\underline{Z}_2$ mit der Formel für die Parallelschaltung.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_C} = \frac{(16\,\Omega + j8\,\Omega) \cdot (-jX_C)}{(16\,\Omega + j8\,\Omega) + (-jX_C)} = \frac{-j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C}{16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C}$$

Hinzu kommt noch $\underline{X}_{L1}$, wenn ich den Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ bestimmen will:

$$\underline{Z} = \underline{X}_{L1} + \underline{Z}_2 = jX_L + \frac{-j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C}{16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C}$$

Da $\underline{Z} = 10\,\Omega$ (reell) bekannt ist, kann diesen Wert für $\underline{Z}$ einsetzen. Ich erhalte dann *eine* Komplexe Gleichung mit *zwei* Variablen.

$$10\,\Omega = jX + \frac{-j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C}{16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C}$$

Eine solche Gleichung löst man am besten dadurch, dass man sie in *Komponentengleichungen* aufspaltet. Damit das möglich ist, muss ich die Gleichung vorher mit dem

Hauptnenner multiplizieren, um keine Brüche mehr zu haben. **Die Aufspaltung ist nämlich nur bei *Linearen Gleichungen* möglich!**

$$\begin{aligned}
10\,\Omega &= jX_L + \frac{-j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C}{16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C} | \cdot (16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C) \\
10\,\Omega \cdot (16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C) &= jX_L \cdot (16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C) - j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C \\
160\,\Omega^2 + j80\,\Omega^2 - j10\,\Omega X_C &= j16\,\Omega X_L - 8\,\Omega X_L + X_L X_C - j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C | + j10\,\Omega X_C \\
160\,\Omega^2 + j80\,\Omega^2 &= j16\,\Omega X_L - 8\,\Omega X_L + X_L X_C - j6\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C
\end{aligned}$$

Diese Komplexe Gleichung kann nun aufgespaltet werden in eine Gleichung mit den *Realteilen* und eine andere Gleichung mit den *Imaginärteilen*.

$$\begin{aligned}
\text{Re:} \quad 160\,\Omega^2 &= -8\,\Omega X_L + X_L X_C + 8\,\Omega X_C \\
\text{Im:} \quad 80\,\Omega^2 &= 16\,\Omega X_L - 6\,\Omega X_C
\end{aligned}$$

Ich löse die Gleichung aus den Imaginärteilen nach X_L auf, um das Ergebnis in die andere Gleichung einzusetzen.

$$\begin{aligned}
80\,\Omega^2 &= 16\,\Omega X_L - 6\,\Omega X_C | + 6\,\Omega X_C \\
80\,\Omega^2 + 6\,\Omega X_C &= 16\,\Omega X_L | : 16\,\Omega \\
5\,\Omega + \frac{3}{8} X_C &= X_L
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Reelle Gleichung:

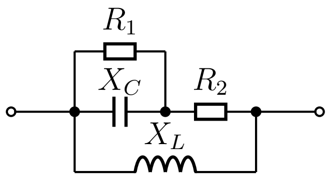
$$
\begin{aligned}
160\,\Omega^2 &= -8\,\Omega X_L + X_L X_C + 8\,\Omega X_C \\
160\,\Omega^2 &= -8\,\Omega(5\,\Omega + \frac{3}{8}X_C) + (5\,\Omega + \frac{3}{8}X_C)X_C + 8\,\Omega X_C \\
160\,\Omega^2 &= -40\,\Omega^2 - 3\,\Omega X_C + 5\,\Omega X_C + \frac{3}{8}X_C^2 + 8\,\Omega X_C | + 40\,\Omega^2 \\
200\,\Omega^2 &= 10\,\Omega X_C + \frac{3}{8}X_C^2 | \cdot \frac{8}{3} \\
\frac{1600}{3}\Omega^2 &= \frac{80}{3}\Omega X_C + X_C^2 | - \frac{1600}{3}\Omega^2 \\
0 &= X_C^2 + \frac{80}{3}\Omega X_C - \frac{1600}{3}\Omega^2 \\
X_{C1/2} &= -\frac{40}{3}\Omega \pm \sqrt{\left(\frac{40}{3}\Omega\right)^2 + \frac{1600}{3}\Omega^2} \\
&= -\frac{40}{3}\Omega \pm \sqrt{\frac{1600}{9}\Omega^2 + \frac{4800}{9}\Omega^2} \\
&= -\frac{40}{3}\Omega \pm \sqrt{\frac{6400}{9}\Omega^2} \\
&= -\frac{40}{3}\Omega \pm \frac{80}{3}\Omega \\
X_{C1} &= \frac{40}{3}\Omega \\
X_{C2} &= -\frac{120}{3}\Omega = -40\,\Omega
\end{aligned}
$$

Die Lösung $X_{C2} = -40\,\Omega$ entfällt, denn es können nur positive Werte eingesetzt werden. Sonst wäre C eine Spule! Die Lösung $X_{C2} = \frac{40}{3}\Omega$ setze ich in die umgeformte Imaginärteil-Gleichung ein.

$$X_L = 5\,\Omega + \frac{3}{8}X_C = 5\,\Omega + \frac{3}{8} \cdot \frac{40}{3}\Omega = 10\,\Omega$$

Die Lösungen lauten also: $\boxed{X_L = 10\,\Omega}$ $\boxed{X_C = \frac{40}{3}\Omega \approx 13{,}3\,\Omega}$

Aufgabe 4 Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand R_2 so, dass der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung reell wird! Folgende Werte sind bekannt:
$X_C = 2\,\Omega \quad X_L = 8\,\Omega \quad R_1 = 4\,\Omega$
Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



Lösung: Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe $\underline{Z}$ aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größe $\underline{R}_2$ an mit:

$$\underline{R}_2 = R$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur eine **reelle** Größe – nämlich R – bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht damit dann so aus:

$$\begin{aligned}
\underline{R}_1 &= 4\,\Omega \\
\underline{R}_2 &= R \\
\underline{X}_L &= j8\,\Omega \\
\underline{X}_C &= -j2\,\Omega
\end{aligned}$$

Beginnen wir mit der Zusammenfassung der Parallelschaltung aus R_1 und X_C. Den Ersatzwiderstand nenne ich Z_1.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_1 \cdot \underline{X}_C}{\underline{R}_1 + \underline{X}_C} \\
&= \frac{4\,\Omega \cdot (-j2\,\Omega)}{4\,\Omega + (-j2\,\Omega)} \\
&= \frac{-j8\,\Omega^2}{4\,\Omega - j2\,\Omega} \\
\underline{Z}_1 &= \frac{-j4\,\Omega}{2-j}
\end{aligned}$$

Mit Z_1 in Reihe geschaltet ist R_2. Den Ersatzwiderstand dieser Reihenschaltung nenne ich Z_2. Wir können $\underline{Z}_2$ berechnen.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \underline{Z}_1 + \underline{R}_2 \\
\underline{Z}_2 &= \frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R
\end{aligned}$$

Parallel zu Z_2 ist X_L geschaltet. Damit können wir nun den Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung $\underline{Z}$ aufstellen.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{X}_L} \\
\underline{Z} &= \frac{\left(\frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R\right) \cdot j8\,\Omega}{\left(\frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R\right) + j8\,\Omega}
\end{aligned}$$

Bevor wir weiterrechnen, sollten wir diesen Term vereinfachen. Dazu fassen wir im Zähler und im Nenner des Hauptbruches die Teilbrüche zusammen, damit wir anschließend die Nenner der Teilbrüche herauskürzen können.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{\left(\frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R\right) \cdot j8\,\Omega}{\left(\frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R\right) + j8\,\Omega} \\
&= \frac{\left(\frac{-j4\,\Omega + R(2-j)}{2-j}\right) \cdot j8\,\Omega}{\frac{-j4\,\Omega + R(2-j) + j8\,\Omega(2-j)}{2-j}} \\
&= \frac{(-j4\,\Omega + R(2-j)) \cdot j8\,\Omega}{-j4\,\Omega + R(2-j) + j8\,\Omega(2-j)} \\
&= \frac{(-j4\,\Omega + 2R - jR) \cdot j8\,\Omega}{-j4\,\Omega + 2R - jR + j16\,\Omega - j^2 8\,\Omega} \\
&= \frac{-j^2 32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R - j^2 8\,\Omega R}{-j4\,\Omega + 2R - jR + j16\,\Omega + 8\,\Omega} \\
\underline{Z} &= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega}
\end{aligned}$$

Nachdem wir nun den Term für $\underline{Z}$ vereinfacht haben, gibt zwei grundsätzlich verschiedene Wege, wie man weiterarbeiten kann.

1. Wir können den Term für $\underline{Z}$ in einen Realteil und einen Imaginärteil aufspalten. Dann können wir den Imaginärteil gleich Null setzen, um dadurch R zu bestimmen.

2. Da $\underline{Z}$ laut Aufgabenstellung als *reelle* Größe bekannt ist, können wir $\underline{Z} = Z$ setzen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, die Gleichung in Real- und Imaginärteile aufzuspalten. Wir bekommen dann *zwei* Gleichungen mit *zwei* Variablen, nämlich Z und R.

Um die Vor- und Nachteile der beiden Verfahren besser unterscheiden zu können, führe ich nacheinander beide vor.

Lösungsweg 1

$$
\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega} \\
&= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{(2R + 8\,\Omega) - j(R - 12\,\Omega)} \\
&= \frac{(32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R) \cdot ((2R + 8\,\Omega) + j(R - 12\,\Omega))}{((2R + 8\,\Omega) - j(R - 12\,\Omega)) \cdot ((2R + 8\,\Omega) + j(R - 12\,\Omega))} \\
&= \frac{(32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R) \cdot (2R + 8\,\Omega + jR - j12\,\Omega)}{(2R + 8\,\Omega)^2 + (R - 12\,\Omega)^2} \\
&= \frac{64\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3 + j32\,\Omega^2 R - j384\,\Omega^3 + j32\,\Omega R^2 + j128\,\Omega^2 R - 16\,\Omega R^2}{4R^2 + 32\,\Omega R + 64\,\Omega^2 + R^2 - 24\,\Omega R + 144\,\Omega^2} \ldots \\
&\qquad \ldots \frac{+192\,\Omega^2 R + 16\,\Omega R^2 + 64\,\Omega^2 R + j8\,\Omega R^2 - j96\,\Omega^2 R}{\ldots} \\
&= \frac{320\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3 + j64\,\Omega^2 R - j384\,\Omega^3 + j40\,\Omega R^2}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} \\
\underline{Z} &= \frac{320\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} + j\frac{64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 + 40\,\Omega R^2}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2}
\end{aligned}
$$

Da $\underline{Z}$ reell sein soll, ist der Imaginärteil von $\underline{Z}$ gleich Null. Damit bekommen wir eine Gleichung zur Bestimmung von R.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\underline{Z}) &= 0 \\
\frac{64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 + 40\,\Omega R^2}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} &= 0 \quad | \cdot \text{Nenner} \\
64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 + 40\,\Omega R^2 &= 0 \\
40\,\Omega R^2 + 64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 &= 0 \quad | : 40\,\Omega \\
R^2 + 1{,}6\,\Omega R - 9{,}6\,\Omega^2 &= 0 \quad | \text{ p-q-Formel} \\
R_{1/2} &= -0{,}8\,\Omega \pm \sqrt{0{,}64\,\Omega^2 + 9{,}6\,\Omega^2} \\
&= -0{,}8\,\Omega \pm 3{,}2\,\Omega \\
R_1 &= 2{,}4\,\Omega \\
R_2 &= -4\,\Omega \quad \text{(entfällt)}
\end{aligned}
$$

Die Lösung lautet also $\boxed{R = 2{,}4\,\Omega}$, denn negative Widerstände gibt es nicht.

Lösungsweg 2 Als alternative Lösungsmethode können wir $\underline{Z} = Z$ setzen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, die Gleichung in Real- und Imaginärteile aufzuspalten. Wir bekommen dann *zwei* Gleichungen mit *zwei reellen* Variablen, nämlich Z und R.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega} \\
Z &= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega} \quad \big| \cdot (2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega) \\
2RZ - jRZ + j12\,\Omega Z + 8\,\Omega Z &= 32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R
\end{aligned}$$

Aus dieser komplexen Gleichung können wir nun ***zwei*** reelle Gleichungen machen, indem wir die Gleichung in eine Gleichung für die Realteile und eine andere für die Imaginärteile aufspalten.

$$\begin{aligned}
& & 2RZ - jRZ + j12\,\Omega Z + 8\,\Omega Z &= 32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R \\
&\text{Re:} & 2RZ + 8\,\Omega Z &= 32\,\Omega^2 + 8\,\Omega R \\
&\text{Im:} & -RZ + 12\,\Omega Z &= 16\,\Omega R
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem lösen wir, indem wir die Gleichung aus den reellen Anteilen nach Z auflösen und in die andere Gleichung einsetzen.

$$\begin{aligned}
2RZ + 8\,\Omega Z &= 32\,\Omega^2 + 8\,\Omega R \\
Z \cdot (2R + 8\,\Omega) &= 32\,\Omega^2 + 8\,\Omega R \quad \big| : (2R + 8\,\Omega) \\
Z &= \frac{32\,\Omega^2 + 8\,\Omega R}{2R + 8\,\Omega} \\
Z &= \frac{8\,\Omega \cdot (4\,\Omega + R)}{2 \cdot (R + 4\,\Omega)} \\
Z &= 4\,\Omega
\end{aligned}$$

Das Ergebnis setzen wir in die Gleichung aus den Imaginärteilen ein.

$$\begin{aligned}
-RZ + 12\,\Omega Z &= 16\,\Omega R \\
-R \cdot 4\,\Omega + 12\,\Omega \cdot 4\,\Omega &= 16\,\Omega R \\
-4\,\Omega R + 48\,\Omega^2 &= 16\,\Omega R \quad \big| + 4\,\Omega R \\
48\,\Omega^2 &= 20\,\Omega R \quad \big| : 20\,\Omega \\
2{,}4\,\Omega &= R
\end{aligned}$$

$$\boxed{R = 2{,}4\,\Omega}$$

Jeder mag für sich selbst entscheiden, welchen Lösungsweg er einfacher findet.

Zum ersten Lösungsweg müsste noch die fehlende Größe $\underline{Z}$ bestimmt werden. (Im zweiten Lösungsweg entfällt das, weil die Lösung $\underline{Z} = 4\,\Omega$ quasi nebenbei angefallen ist.) Dazu setzen wir den gefundenen Wert $R = 2{,}4\,\Omega$ in die gefundene Formel für $\underline{Z}$ ein.

$$\underline{Z} = \frac{320\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} + j\frac{64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 + 40\,\Omega R^2}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2}$$

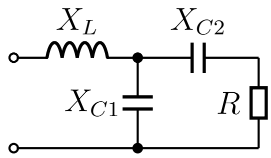
Laut Aufgabenstellung ist der Imaginärteil $\mathrm{Im}\underline{Z} = 0$. (Das ist der Bruch hinter dem j.) Daher können wir ihn der Einfachheit halber auch gleich weglassen. In den so vereinfachten Term setzen wir dann $R = 2{,}4\,\Omega$ ein.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{320\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} \\
&= \frac{320\,\Omega^2 \cdot 2{,}4\,\Omega + 256\,\Omega^3}{5 \cdot (2{,}4\,\Omega)^2 + 8\,\Omega \cdot 2{,}4\,\Omega + 208\,\Omega^2} \\
&= \frac{768\,\Omega^3 + 256\,\Omega^3}{28{,}8\,\Omega^2 + 19{,}2\,\Omega^2 + 208\,\Omega^2} \\
&= \frac{1024\,\Omega^3}{256\,\Omega^2} \\
&= 4\,\Omega
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Gesamtwiderstand } \underline{Z} = 4\,\Omega}$$

Aufgabe 5

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand X_{C2} so, dass der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung reell wird! Bekannt sind die Werte:
$X_{C1} = 50\,\Omega \quad X_L = 12{,}5\,\Omega \quad R_1 = 20\,\Omega$.
Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



Lösung: Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe $\underline{Z}$ aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größe $\underline{X}_{C2}$ an mit:

$$\underline{X}_{C2} = -jX$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur eine **reelle** Größe – nämlich X – bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht damit dann so aus:

$$\begin{aligned} \underline{X}_{C1} &= -j50\,\Omega \\ \underline{X}_L &= j12{,}5\,\Omega \\ \underline{R} &= 20\,\Omega \\ \underline{X}_{C2} &= -jX \end{aligned}$$

Ich beginne mit der Zusammenfassung aus X_{C2} und R. Diese nenne ich $\underline{Z}_1$.

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_{C2} + \underline{R} = -jX + 20\,\Omega$$

Parallel zu Z_1 liegt X_{C1}. Diese Parallelschaltung nenne ich $\underline{Z}_2$.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C1}} \\ \underline{Z}_2 &= \frac{(-jX + 20\,\Omega) \cdot (-j50\,\Omega)}{-jX + 20\,\Omega - j50\,\Omega} \\ \underline{Z}_2 &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)} \end{aligned}$$

In Reihe zu Z_2 liegt X_L. Damit erhalte ich den Gesamtwiderstand $\underline{Z}$:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_2 + \underline{X}_L \\ \underline{Z} &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)} + j12{,}5\,\Omega \end{aligned}$$

Ab hier gibt es wieder – wie bei den vorangehenden Aufgaben auch – zwei unterschiedliche Lösungswege.

Lösungsweg 1

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X+50\,\Omega)} + j12{,}5\,\Omega \quad | \text{ Konjugiert Komplex erweitern} \\
&= \frac{(-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2)\cdot(20\,\Omega + jX + j50\,\Omega)}{[20\,\Omega - j(X+50\,\Omega)]\cdot[(20\,\Omega + j(X+50\,\Omega)]} + j12{,}5\,\Omega \\
&= \frac{-1000\,\Omega^2 X - j50\,\Omega X^2 - j2500\,\Omega^2 X - j20000\,\Omega^3 + 1000\,\Omega^2 X + 50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j12{,}5\,\Omega \\
\underline{Z} &= \frac{-j50\,\Omega X^2 - j2500\,\Omega^2 X - j20000\,\Omega^3 + 50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j2{,}5\,\Omega
\end{aligned}$$

Der Bruch kann nun in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden. Das geht dann auch mit dem gesamten $\underline{Z}$.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j\frac{-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j12{,}5\,\Omega \\
\underline{Z} &= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j\left(\frac{-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + 12{,}5\,\Omega\right)
\end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung ist $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = 0$. Daraus können wir eine Gleichung zur Bestimmung von X machen.

$$\begin{aligned}
\frac{-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + 12{,}5\,\Omega &= 0 \quad | \cdot \text{Nenner} \\
-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3 + 12{,}5\,\Omega\cdot\left(400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2\right) &= 0 \\
-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3 + 12{,}5\,\Omega\cdot\left(400\,\Omega^2 + X^2 + 100\,\Omega X + 2500\,\Omega^2\right) &= 0 \\
-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3 + 12{,}5\,\Omega\cdot\left(2900\,\Omega^2 + X^2 + 100\,\Omega X\right) &= 0 \\
-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3 + 36250\,\Omega^3 + 12{,}5\,\Omega X^2 + 1250\,\Omega^2 X &= 0 \\
-37{,}5\,\Omega X^2 - 1250\,\Omega^2 X + 16250\,\Omega^3 &= 0
\end{aligned}$$

Wir haben eine Quadratische Gleichung erhalten, die wir nun mit der $p-q-$Formel lösen können.

$$
\begin{aligned}
-37{,}5\,\Omega X^2 - 1250\,\Omega^2 X + 16250\,\Omega^3 &= 0 \quad |:(-37{,}5\,\Omega)\\
X^2 + \frac{100}{3}\Omega X - \frac{1300}{3}\Omega^2 &= 0\\
X_{1/2} &= -\frac{50}{3}\Omega \pm \sqrt{\frac{2500}{9}\Omega^2 + \frac{3900}{9}\Omega^2}\\
X_{1/2} &= -\frac{50}{3}\Omega \pm \sqrt{\frac{6400}{9}\Omega^2}\\
X_{1/2} &= -\frac{50}{3}\Omega \pm \frac{80}{3}\Omega\\
X_1 &= \frac{30}{3}\Omega = 10\,\Omega\\
X_2 &= -\frac{130}{3}\Omega \text{ (entfällt)}
\end{aligned}
$$

Ergebnis: $\boxed{\underline{X}_{C2} = -j10\,\Omega}$ oder: $\boxed{X_{C2} = 10\,\Omega}$

Fehlt noch $\underline{Z}$. Da $\mathrm{Im}\underline{Z} = 0$ ist, ist $\underline{Z} = Z = \mathrm{Re}\underline{Z}$.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X + 50\,\Omega)^2} + j\left(\frac{-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X + 50\,\Omega)^2} + 12{,}5\,\Omega\right)\\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X + 50\,\Omega)^2}\\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (10\,\Omega + 50\,\Omega)^2}\\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (60\,\Omega)^2}\\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + 3600\,\Omega^2}\\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{4000\,\Omega^2}\\
\underline{Z} &= 12{,}5\,\Omega
\end{aligned}
$$

Ergebnis: $\boxed{\underline{Z} = Z = 12{,}5\,\Omega}$

Lösungsweg 2 Alternativ ergibt sich auch hier wieder die Möglichkeit, aus **einer Komplexen** Gleichung **zwei Reelle** Gleichungen zu machen. Das allerdings geht nur, weil $\underline{Z} = Z$ ist!

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)} + j12{,}5\,\Omega \\
Z &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)} + j12{,}5\,\Omega \quad | \cdot \text{Nenner} \\
Z \cdot [20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)] &= -50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2 + j12{,}5\,\Omega \cdot [20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)] \\
Z \cdot (20\,\Omega - jX - j50\,\Omega) &= -50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2 + j12{,}5\,\Omega \cdot (20\,\Omega - jX - j50\,\Omega) \\
20\,\Omega Z - jXZ - j50\,\Omega Z &= -50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2 + j250\,\Omega^2 + 12{,}5\,\Omega X + 625\,\Omega^2 \\
20\,\Omega Z - jXZ - j50\,\Omega Z &= -37{,}5\,\Omega X - j750\,\Omega^2 + 625\,\Omega^2
\end{aligned}$$

Diese Gleichung können wir nun ein eine Gleichung mit den Realteilen und in eine mit den Imaginärteilen zerlegen. Das ist der eigentliche „Trick“ bei diesem Verfahren.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Realteile:} & 20\,\Omega Z &=& -37{,}5\,\Omega X + 625\,\Omega^2 \\
\text{Imaginärteile:} & -XZ - 50\,\Omega Z &=& -750\,\Omega^2
\end{array}$$

Da dieses Gleichungssystem **nichtlinear** ist, kommt als Lösungsverfahren wohl nur das Einsetzungsverfahren in Frage. Dazu löse ich die Realteilgleichung nach Z auf und setze das Ergebnis in die Imaginärteilgleichung ein.

$$\begin{aligned}
20\,\Omega Z &= -37{,}5\,\Omega X + 625\,\Omega^2 \quad | : 20\,\Omega \\
Z &= -1{,}875 X + 31{,}25\,\Omega
\end{aligned}$$

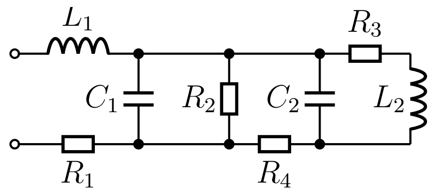
Eingesetzt in die Imaginärteilgleichung:

$$\begin{aligned}
-XZ - 50\,\Omega Z &= -750\,\Omega^2 \\
-X \cdot (-1{,}875X + 31{,}25\,\Omega) - 50\,\Omega \cdot (-1{,}875X + 31{,}25\,\Omega) &= -750\,\Omega^2 \\
1{,}875X^2 - 31{,}25\,\Omega X + 93{,}75\,\Omega X - 1562{,}5\,\Omega^2 &= -750\,\Omega^3 \quad | + 750\,\Omega^2 \\
1{,}875X^2 + 62{,}5\,\Omega X - 812{,}5\,\Omega^2 &= 0 \quad | : 1{,}875 \\
x^2 + \frac{100}{3}\Omega X - \frac{1300}{3}\Omega^2 &= 0
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung auch schon beim ersten Lösungsweg auftrat, kann man den Rest der Lösung dort nachlesen; der restliche Lösungsweg ist identisch.

Aufgabe 6

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung! Bekannt sind folgende Werte:
$\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ $\quad L_1 = 0{,}5\,\mathrm{H}$ $\quad L_2 = 1\,\mathrm{H}$
$C_1 = 500\,\mu\mathrm{F}$ $\quad C_2 = 100\,\mu\mathrm{F}$ $\quad R_1 = 20\,\Omega$
$R_2 = 50\,\Omega$ $\quad R_3 = 50\,\Omega$ $\quad R_4 = 30\,\Omega$



Lösung: Zur Lösung bestimme ich zunächst die entsprechenden Blindwiderstände aus der Kreisfrequenz und den L- und C-Werten.

$$\begin{aligned}
X_{L1} = \omega \cdot L_1 = 100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}5\,\mathrm{H} = 50\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{X}_{L1} = j50\,\Omega \\
X_{L2} = \omega \cdot L_2 = 100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1\,\mathrm{H} = 100\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{X}_{L2} = j100\,\Omega \\
X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 500\,\mu\mathrm{F}} = 20\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{X}_{C1} = -j20\,\Omega \\
X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 100\,\mu\mathrm{F}} = 100\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{X}_{C2} = -j100\,\Omega \\
R_1 = 20\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{R}_1 = 20\,\Omega \\
R_2 = 50\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{R}_2 = 50\,\Omega \\
R_3 = 50\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{R}_3 = 50\,\Omega \\
R_4 = 30\,\Omega &\quad\Rightarrow\quad \underline{R}_4 = 30\,\Omega
\end{aligned}$$

Ich beginne bei der Reihenschaltung aus R_3 und L_2. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_1.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2} \\
\underline{Z}_1 &= 50\,\Omega + j100\,\Omega
\end{aligned}$$

Parallel zu Z_1 ist C_2 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_2.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \frac{\underline{X}_{C2} \cdot \underline{Z}_1}{\underline{X}_{C2} + \underline{Z}_1} \\
&= \frac{-j100\,\Omega \cdot (50\,\Omega + j100\,\Omega)}{-j100\,\Omega + 50\,\Omega + j100\,\Omega} \\
&= \frac{-j5000\,\Omega^2 + 10000\,\Omega^2}{50\,\Omega} \\
\underline{Z}_2 &= -j100\,\Omega + 200\,\Omega
\end{aligned}$$

In Reihe zu Z_2 ist R_4 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_3.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \underline{R}_4 + \underline{Z}_2 \\
&= 30\,\Omega - j100\,\Omega + 200\,\Omega \\
\underline{Z}_3 &= 230\,\Omega - j100\,\Omega
\end{aligned}$$

Parallel zu Z_3 ist R_2 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_4.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_4 &= \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{R}_2}{\underline{Z}_3 + \underline{R}_2} \\
&= \frac{(230\,\Omega - j100\,\Omega) \cdot 50\,\Omega}{230\,\Omega - j100\,\Omega + 50\,\Omega} \\
&= \frac{11500\,\Omega^2 - j5000\,\Omega^2}{280\,\Omega - j100\,\Omega} \\
&= \frac{(11500\,\Omega^2 - j5000\,\Omega^2) \cdot (280\,\Omega + j100\,\Omega)}{(280\,\Omega - j100\,\Omega) \cdot (280\,\Omega + j100\,\Omega)} \\
&= \frac{3220000\,\Omega^3 + j1150000\,\Omega^3 - j1400000\,\Omega^3 + 500000\Omega^3}{78400\,\Omega^2 + 10000\,\Omega^2} \\
&= \frac{3720000\,\Omega^3 - j250000\,\Omega^3}{88400\,\Omega^2} \\
\underline{Z}_4 &\approx 42{,}081\,\Omega - j2{,}828\,\Omega
\end{aligned}$$

Parallel zu Z_4 ist C_1 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_5.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_5 &= \frac{\underline{Z}_4 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_4 + \underline{X}_{C1}} \\
&\approx \frac{(42{,}081\,\Omega - j2{,}828\,\Omega) \cdot (-j20\,\Omega)}{42{,}081\,\Omega - j2{,}828\,\Omega - j20\,\Omega} \\
&= \frac{-j841,62\,\Omega^2 - 56{,}56\,\Omega^2}{42{,}081\,\Omega - j22{,}828\,\Omega} \\
&= \frac{(-j841{,}62\,\Omega^2 - 56{,}56\,\Omega^2)\,(42{,}081\,\Omega + j22{,}828\,\Omega)}{(42{,}081\,\Omega - j22{,}828\,\Omega)(42{,}081\,\Omega + j22{,}828\,\Omega)} \\
&\approx \frac{-j35416\,\Omega^3 + 19212\,\Omega^3 - 2380\,\Omega^3 - j1291\,\Omega^3}{1771\,\Omega^2 + 521\,\Omega^2} \\
&= \frac{6832\,\Omega^3 - j36707\,\Omega^3}{2292\,\Omega^2} \\
\underline{Z}_5 &\approx 7{,}344\,\Omega - j16{,}02\,\Omega
\end{aligned}$$

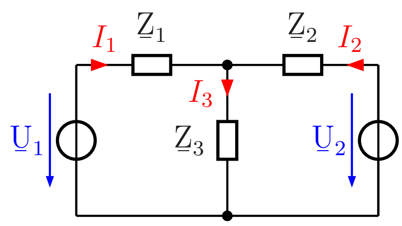
In Reihe zu Z_5 sind R_1 und L_1 geschaltet. Damit ergibt sich der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{X}_{L1} + \underline{Z}_5 + \underline{R}_1 \\ \underline{Z} &\approx j50\,\Omega + 7{,}344\,\Omega - j16{,}02\,\Omega + 20\,\Omega\end{aligned}$$

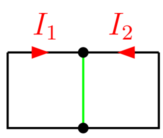
$$\boxed{\underline{Z} \approx 27{,}344\,\Omega + j33{,}98\,\Omega}$$

Aufgabe 7

Die Ströme in nebenstehende Schaltung können durch ein Lineargleichungssystem beschrieben werden. Stellen Sie das Gleichungssystem auf und berechnen Sie die Komplexen Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$. Bekannt sind die Werte:
$\underline{Z}_1 = 1\,\Omega - j3\,\Omega$; $\underline{Z}_2 = 2\,\Omega - j4\,\Omega$;
$\underline{Z}_3 = j2\,\Omega$; $\underline{U}_1 = j4\,\mathrm{V}$; $\underline{U}_2 = 4\,\mathrm{V}$



Lösung: Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren** arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in grüner Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme I_1 und I_2, mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft über Z_1, Z_3 und U_1, Masche 2 entsprechend über Z_2, U_2 und Z_3.



$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) - \underline{U}_1 & = & 0 \\
(2) & \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot (\underline{I}_2 + \underline{I}_1) - \underline{U}_2 & = & 0 \\
\hline
(1) & \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\
(2) & \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 & = & \underline{U}_2 \\
\hline
(1) & (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\
(2) & +\underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_2
\end{array}$$

Nun können die gegebenen Werte eingesetzt werden.

$$\begin{array}{lrrcl}
(1) & (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_1 & +\underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\
(2) & +\underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_2 \\
\hline
(1) & (1\,\Omega - j3\,\Omega + j2\,\Omega) \cdot \underline{I}_1 & +j2\,\Omega \cdot \underline{I}_2 & = & j4\,\mathrm{V} \\
(2) & j2\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(2\,\Omega - j4\,\Omega + j2\,\Omega) \cdot \underline{I}_2 & = & 4\,\mathrm{V} \\
\hline
(1) & (1\,\Omega - j1\,\Omega) \cdot \underline{I}_1 & +j2\,\Omega \cdot \underline{I}_2 & = & j4\,\mathrm{V} \\
(2) & j2\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(2\,\Omega - j2\,\Omega) \cdot \underline{I}_2 & = & 4\,\mathrm{V} \\
\hline
\end{array}$$

Zur Lösung kann man natürlich jedes beliebige Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme verwenden.[1]

Ich möchte gern das Additions-/Subtraktionsverfahren verwenden. Damit beim Subtrahieren die Variable $\underline{I}_1$ wegfällt, multipliziere ich Gleichung (1) mit $j2$ und Gleichung (2) mit $(1 - j1)$.

$$
\begin{array}{lrrcll}
(1) & (1\,\Omega - j1\,\Omega)\cdot\underline{I}_1 & +j2\,\Omega\cdot\underline{I}_2 & = & j4\,\mathrm{V} & |\cdot(j2)\\
(2) & j2\,\Omega\cdot\underline{I}_1 & +(2\,\Omega - j2\,\Omega)\cdot\underline{I}_2 & = & 4\,\mathrm{V} & |\cdot(1-j1)\\
\hline
(1) & (j2\,\Omega - j^2 2\,\Omega)\cdot\underline{I}_1 & +j^2 4\,\Omega\cdot\underline{I}_2 & = & j^2 8\,\mathrm{V} & \\
(2) & (j2\,\Omega - j^2 2\,\Omega)\cdot\underline{I}_1 & +(2\,\Omega - j2\,\Omega - j2\,\Omega + j^2 2\,\Omega)\cdot\underline{I}_2 & = & 4\,\mathrm{V} - j4\,\mathrm{V} & \\
\hline
(1) & (j2\,\Omega + 2\,\Omega)\cdot\underline{I}_1 & +4\,\Omega\cdot\underline{I}_2 & = & 8\,\mathrm{V} & \\
(2) & (j2\,\Omega + 2\,\Omega)\cdot\underline{I}_1 & +(2\,\Omega - j2\,\Omega - j2\,\Omega - 2\,\Omega)\cdot\underline{I}_2 & = & -4\,\mathrm{V} + j4\,\mathrm{V} & \\
\hline
(1) & (j2\,\Omega + 2\,\Omega)\cdot\underline{I}_1 & +4\,\Omega\cdot\underline{I}_2 & = & 8\,\mathrm{V} & |\\
(2) & (j2\,\Omega + 2\,\Omega)\cdot\underline{I}_1 & -j4\,\Omega\cdot\underline{I}_2 & = & -4\,\mathrm{V} + j4\,\mathrm{V} & |-\\
\hline
 & & (4\,\Omega - j4\,\Omega)\cdot\underline{I}_2 & = & 12\,\mathrm{V} - j4\,\mathrm{V} & |:(4\,\Omega - j4\,\Omega)\\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{12\,\mathrm{V} - j4\,\mathrm{V}}{4\,\Omega - j4\,\Omega} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{3-j1}{1-j1}\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{(3-j1)\cdot(1+j1)}{(1-j1)\cdot(1+j1)}\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{3+j3-j-j^2}{1-j^2}\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{3+j3-j+1}{1+1}\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{4+j2}{2}\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & 2\,\mathrm{A} + j1\,\mathrm{A} &
\end{array}
$$

[1]In Frage kommt beispielsweise das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren, die Cramersche Regel oder das Gauß-Jordan-Verfahren. Einzelheiten zu den verschiedenen Verfahren sind hier zu finden:
Einsetzungsverfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf
Additions-/Subtraktionsverfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf
Cramersche Regel: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf
Gauß-Jordan-Verfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gauss.pdf

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein, um $\underline{I}_1$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
j2\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + (2\,\Omega - j2\,\Omega) \cdot \underline{I}_2 &= 4\,\mathrm{V} \\
j2\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + (2\,\Omega - j2\,\Omega) \cdot (2\,\mathrm{A} + j1\,\mathrm{A}) &= 4\,\mathrm{V} \\
j2\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + 4\,\mathrm{V} + j2\,\mathrm{V} - j4\,\mathrm{V} - j^2 2\,\mathrm{V} &= 4\,\mathrm{V} \\
j2\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + 4\,\mathrm{V} + j2\,\mathrm{V} - j4\,\mathrm{V} + 2\,\mathrm{V} &= 4\,\mathrm{V} \\
j2\,\Omega \cdot \underline{I}_1 + 6\,\mathrm{V} - j2\,\mathrm{V} &= 4\,\mathrm{V} \quad | - 6\,\mathrm{V} + j2\,\mathrm{V} \\
j2\,\Omega \cdot \underline{I}_1 &= -2\,\mathrm{V} + j2\,\mathrm{V} \quad | : j2\,\Omega \\
\underline{I}_1 &= \frac{-2\,\mathrm{V} + j2\,\mathrm{V}}{j2\,\Omega} \cdot \frac{j}{j} \\
\underline{I}_1 &= \frac{-j2\,\mathrm{V} + j^2 2\,\mathrm{V}}{j^2 2\,\Omega} \\
\underline{I}_1 &= \frac{-j2\,\mathrm{V} - 2\,\mathrm{V}}{-2\,\Omega} \\
\underline{I}_1 &= 1\,\mathrm{A} + j1\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

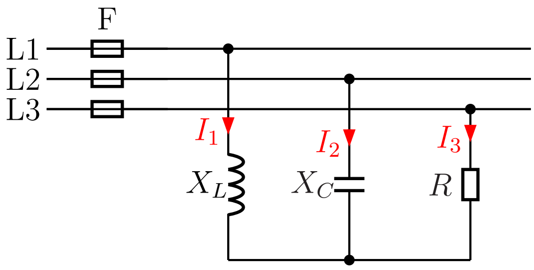
Damit kann nun I_3 bestimmt werden:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 1\,\mathrm{A} + j1\,\mathrm{A} + 2\,\mathrm{A} + j1\,\mathrm{A} = 3\,\mathrm{A} + j2\,\mathrm{A}$$

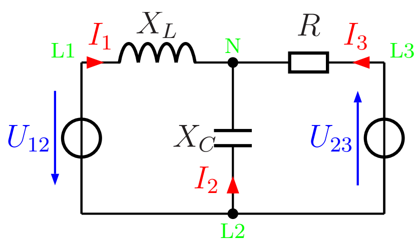
Zusammengefasstes Ergebnis: $\boxed{\underline{I}_1 = 1\,\mathrm{A} + j1\,\mathrm{A}}$ $\boxed{\underline{I}_2 = 2\,\mathrm{A} + j1\,\mathrm{A}}$ $\boxed{\underline{I}_3 = 3\,\mathrm{A} + j2\,\mathrm{A}}$

Aufgabe 8

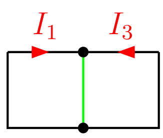
Bestimmen Sie die Ströme I_1, I_2 und I_3 in den Außenleitern des nebenstehend dargestellten Dreiphasenwechselstromnetzes mit $U_L = 400\text{V}$! Stellen Sie dazu ein Lineargleichungssystem für die drei Komplexen Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Berechnen Sie anschließend die gesuchten Beträge der Ströme I_1, I_2 und I_3. Bekannt sind die Werte:
$X_L = 100\,\Omega$; $\quad X_C = 200\,\Omega$; $\quad R = 50\,\Omega$



Lösung: Um einen besseren Überblick zu erhalten, wird die Schaltung zunächst etwas umgezeichnet. Dabei werden aus dem Dreiphasen-Wechselspannungsnetz nur die Spannungen U_{12} und U_{23} verwendet; mit diesen wird aber trotzdem das komplette Netz vollständig beschrieben. Zur besseren Orientierung habe ich die Punkte, die die Außenleiter L1, L2 und L3 sowie den Sternpunkt N bezeichnen, mit in die Schaltung eingetragen.



Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren** arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in grüner Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme I_1 und I_3, mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft über X_L, X_C und U_{12}, Masche 3 entsprechend über R, X_C und U_{23}.



Bevor wir beginnen können, sollten wir die komplexen Spannungen festlegen. Ich lege $\underline{U}_{12}$ in die reelle Richtung. Damit ist:

$$\underline{U}_{12} = 400\,\text{V}$$

Die Spannung $\underline{U}_{23}$ eilt der Spannung $\underline{U}_{12}$ um 120° nach. Damit ergibt sich für $\underline{U}_{23}$:

$$\underline{U}_{23} = 400\,\text{V} \cdot e^{-j120^\circ} = 400\,\text{V} \cdot \Big(\cos(-120^\circ) + j\sin(-120^\circ)\Big) \approx -200\,\text{V} - j346{,}4\,\text{V}$$

Weiterhin ist:

$$\underline{X}_L = jX_L = j100\,\Omega$$

$$\underline{X}_C = -jX_C = -j200\,\Omega$$

Jetzt können wir einen Maschenumlauf für Masche 1 und Masche 3 aufstellen.

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_3) - \underline{U}_{12} & = & 0 \\
(3) & \underline{R} \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot (\underline{I}_2 + \underline{I}_1) + \underline{U}_{23} & = & 0 \\
\hline
(1) & \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = & \underline{U}_{12} \\
(3) & \underline{R} \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 & = & -\underline{U}_{23} \\
\hline
(1) & (\underline{X}_L + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = & \underline{U}_{12} \\
(3) & \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 + (\underline{R} + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_2 & = & -\underline{U}_{23}
\end{array}
$$

Nun können die gegebenen Werte eingesetzt werden.

$$
\begin{array}{lrrcl}
(1) & (\underline{X}_L + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_1 & +\underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = & \underline{U}_{12} \\
(3) & \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{R} + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_3 & = & -\underline{U}_{23} \\
\hline
(1) & (j100\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_1 & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_3 & = & 400\,\mathrm{V} \\
(3) & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(50\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & 200\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V} \\
\hline
(1) & -j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_3 & = & 400\,\mathrm{V} \\
(3) & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(50\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & 200\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V}
\end{array}
$$

Multipliziert man Gleichung (1) mit -2, dann können die beiden Gleichungen einfach addiert werden. $\underline{I}_1$ fällt dann weg.

$$
\begin{array}{lrrcll}
(1) & -j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_3 & = & 400\,\mathrm{V} & |\cdot(-2) \\
(3) & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(50\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & 200\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V} & \\
\hline
(1) & j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +j400\,\Omega \cdot \underline{I}_3 & = & -800\,\mathrm{V} & | \\
(3) & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(50\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & 200\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V} & |+ \\
\hline
 & & (50\,\Omega + j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & -600\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{-600\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V}}{50\,\Omega + j200\,\Omega} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{-12 + j6{,}928}{1 - j4}\,\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{-12 + j6{,}928}{1 - j4} \cdot \frac{1 + j4}{1 + j4}\,\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{-12 + j48 + j6{,}928 + 27{,}712}{1 + 16}\,\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{15{,}712 + j54{,}928}{17}\,\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_3 & \approx & 0{,}9242\,\mathrm{A} + j3{,}231\,\mathrm{A} &
\end{array}
$$

Zur Bestimmung von $\underline{I}_1$ setze ich das Ergebnis in Gleichung (1) ein.

$$
\begin{aligned}
-j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 - j200\,\Omega \cdot (0{,}9242\,\mathrm{A} + j3{,}231\,\mathrm{A}) &= 400\,\mathrm{V} \\
-j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 - j184{,}84\,\mathrm{V} + 646{,}2\,\mathrm{V} &= 400\,\mathrm{V} \quad | + j184{,}84\,\mathrm{V} - 646{,}2\,\mathrm{V} \\
-j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 &= j184{,}84\,\mathrm{V} - 246{,}2\,\mathrm{V} \quad | : (-j100\,\Omega) \\
\underline{I}_1 &= \frac{j184{,}84\,\mathrm{V} - 246{,}2\,\mathrm{V}}{-j100\,\Omega} \cdot \frac{j}{j} \\
\underline{I}_1 &= \frac{-184{,}84\,\mathrm{V} - j246{,}2\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} \\
\underline{I}_1 &\approx -1{,}8484\,\mathrm{A} - j2{,}462\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Mit diesen Ergebnissen kann nun auch $\underline{I}_2$ bestimmt werden. Nach der Kirchhoffschen Knotenregel gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0 \quad | - \underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\
\underline{I}_2 &= -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\
\underline{I}_2 &= -(-1{,}8484\,\mathrm{A} - j2{,}462\,\mathrm{A}) - (0{,}9242\,\mathrm{A} + j3{,}231\,\mathrm{A}) \\
\underline{I}_2 &= 1{,}8484\,\mathrm{A} + j2{,}462\,\mathrm{A} - 0{,}9242\,\mathrm{A} - j3{,}231\,\mathrm{A} \\
\underline{I}_2 &\approx 0{,}9242\,\mathrm{A} - j0{,}769\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Mit diesen Daten können wir nun die Beträge der drei Ströme bestimmen. Zur Erinnerung vorweg die zugehörige Grundformel:

$$I = \sqrt{(\mathrm{Re}\underline{I})^2 + (\mathrm{Im}\underline{I})^2}$$

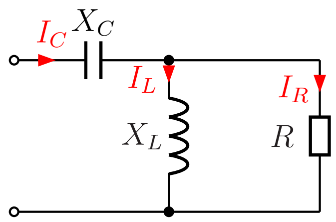
$$I_1 = \sqrt{(1{,}8484\,\mathrm{A})^2 + (2{,}462\,\mathrm{A})^2} \approx 3{,}079\,\mathrm{A}$$

$$I_2 = \sqrt{(0{,}9242\,\mathrm{A})^2 + (0{,}769\,\mathrm{A})^2} \approx 1{,}202\,\mathrm{A}$$

$$I_3 = \sqrt{(0{,}9242\,\mathrm{A})^2 + (3{,}231\,\mathrm{A})^2} \approx 3{,}361\,\mathrm{A}$$

Aufgabe 9

Nebenstehende Schaltung ist an eine Wechselspannung von $U = 100\,\mathrm{V}$ angschlossen. Die Bauteilwerte sind:
$X_C = 20\,\Omega$
$X_L = 25\,\Omega$
$R = 50\,\Omega$
Gesucht sind die Ströme I_C im Kondensator, I_L in der Spule und I_R im ohmschen Widerstand.



Lösung: Zunächst stelle ich die verschiedenen angegebenen Größen im komplexer Form dar:

$$
\begin{aligned}
X_C &= 20\,\Omega &\Rightarrow\quad \underline{X}_C &= -j20\,\Omega \\
X_L &= 25\,\Omega &\Rightarrow\quad \underline{X}_L &= j25\,\Omega \\
R &= 50\,\Omega &\Rightarrow\quad \underline{R} &= 50\,\Omega \\
U &= 100\,\mathrm{V} &\Rightarrow\quad \underline{U} &= 100\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Ich fasse X_L und R zum Ersatzwiderstand Z_1 zusammen.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= \frac{\underline{X}_L \cdot \underline{R}}{\underline{X}_L + \underline{R}} \\
&= \frac{j25\,\Omega \cdot 50\,\Omega}{j25\,\Omega + 50\,\Omega} \\
&= \frac{j1250\,\Omega^2}{50\,\Omega + j25\,\Omega} \\
&= \frac{(j1250\,\Omega^2)(50\,\Omega - j25\,\Omega)}{(50\,\Omega + j25\,\Omega)(50\,\Omega - j25\,\Omega)} \\
&= \frac{j62500\,\Omega^3 + 31250\,\Omega^3}{2500\,\Omega^2 + 625\,\Omega^2} \\
&= \frac{31250\,\Omega^3 + j62500\,\Omega^3}{3125\,\Omega^2} \\
\underline{Z}_1 &= 10\,\Omega + j20\,\Omega
\end{aligned}
$$

In Reihe zu Z_1 ist X_C geschaltet. Ich erhalte den Gesamt-Ersatzwiderstand der Schaltung:

$$
\begin{aligned}
\underline{Z} &= \underline{X}_C + \underline{Z}_1 \\
&= -j20\,\Omega + 10\,\Omega + j20\,\Omega \\
\underline{Z} &= 10\,\Omega
\end{aligned}
$$

Als nächstes bestimme ich den Gesamtstrom, der durch Z fließt. Da dies zugleich der Strom im Kondensator ist, nenne ich ihn I_C.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_C &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \\
&= \frac{100\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} \\
\underline{I}_C &= 10\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Mit diesem Strom kann ich die Spannung an der Spule und dem Widerstand berechnen. Er fließt durch den Ersatzwiderstand Z_1. Ich nenne die Spannung deshalb U_1.

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_C \\
&= (10\,\Omega + j20\,\Omega) \cdot 10\,\mathrm{A} \\
\underline{U}_1 &= 100\,\mathrm{V} + j200\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Spannung kann ich den Strom I_L in der Spule berechnen.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{X}_L} \\
&= \frac{100\,\mathrm{V} + j200\,\mathrm{V}}{j25\,\Omega} \qquad | \text{ erweitern mit } j \\
&= \frac{j100\,\mathrm{V} - 200\,\mathrm{V}}{-25\,\Omega} \\
\underline{I}_L &= 8\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Ebenso geht es mit dem Strom I_R im Widerstand.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{R}} \\
&= \frac{100\,\mathrm{V} + j200\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} \\
\underline{I}_R &= 2\,\mathrm{A} + j4\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Gesucht sind aber nicht die komplexen Ströme $\underline{I}_R$, $\underline{I}_C$ und $\underline{I}_L$, sondern deren Beträge I_R, I_C und I_L. Diese können wir mit der Wurzelformel $|\underline{z}| = z = \sqrt{(\mathrm{Re}\underline{z})^2 + (\mathrm{Im}\underline{z})^2}$ berechnen.

$$I_R = \sqrt{(2\,\mathrm{A})^2 + (4\,\mathrm{A})^2} \approx 4{,}472\,\mathrm{A}$$
$$I_C = \sqrt{(10\,\mathrm{A})^2} = 10\,\mathrm{A}$$
$$I_L = \sqrt{(8\,\mathrm{A})^2 + (-4\,\mathrm{A})^2} \approx 8{,}944\,\mathrm{A}$$