

# Flächenberechnung mit Integralen

W. Kippels

24. Mai 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>2</b>
1.1	Aufgabe 1 . . . . .	2
1.2	Aufgabe 2 . . . . .	2
1.3	Aufgabe 3 . . . . .	2
1.4	Aufgabe 4 . . . . .	2
1.5	Aufgabe 5 . . . . .	2
1.6	Aufgabe 6 . . . . .	2
1.7	Aufgabe 7 . . . . .	2
1.8	Aufgabe 8 . . . . .	2
1.9	Aufgabe 9 . . . . .	3
1.10	Aufgabe 10 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>	<b>4</b>
2.1	Aufgabe 1 . . . . .	4
2.2	Aufgabe 2 . . . . .	6
2.3	Aufgabe 3 . . . . .	8
2.4	Aufgabe 4 . . . . .	10
2.5	Aufgabe 5 . . . . .	12
2.6	Aufgabe 6 . . . . .	14
2.7	Aufgabe 7 . . . . .	16
2.8	Aufgabe 8 . . . . .	18
2.9	Aufgabe 9 . . . . .	21
2.10	Aufgabe 10 . . . . .	24

# 1 Übungsaufgaben

## 1.1 Aufgabe 1

Der Graph der Funktion  $f_1(x) = 0,5(x - 2)^2 + 3,5$  wird vom Graphen der Funktion  $f_2(x) = x + 3$  geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

## 1.2 Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^2 - x - 12$ . Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der  $x$ -Achse!

## 1.3 Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 3x^2 + 18x + 24$ . Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen, der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse!

## 1.4 Aufgabe 4

Der Graph der Funktion  $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$  wird vom Graphen der Funktion  $f_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$  geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

## 1.5 Aufgabe 5

Der Graph der Funktion  $f_1(x) = x^4 - 4x^2 + 3$  wird vom Graphen der Funktion  $f_2(x) = -x^2 + 7$  geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

## 1.6 Aufgabe 6

Der Graph der Funktion  $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 3$  wird vom Graphen der Funktion  $f_2(x) = x^2 + 2x - 1$  geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

## 1.7 Aufgabe 7

Ein Polynom 4. Grades hat zwei Tiefpunkte auf der  $x$ -Achse bei  $T_1(0|0)$  und  $T_2(4|0)$ . Der Funktionsgraph verläuft außerdem noch durch den Punkt  $P(2|240)$ . Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Tiefpunkten von dem Graphen von  $f(x)$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird!

## 1.8 Aufgabe 8

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei  $H(0|4)$  und einen Tiefpunkt bei  $T(2|0)$ . Berechnen Sie die Fläche, die von der positiven  $x$ -Achse, der  $y$ -Achse und dem Funktionsgraphen des Polynoms eingeschlossen wird!

## 1.9 Aufgabe 9

Eine Parabel (Polynom 2. Grades) verläuft durch die Punkte  $P_1(1|-15)$ ,  $P_2(4|12)$  und  $P_3(5|9)$ . Berechnen Sie die Fläche, die die  $x$ -Achse mit dem Parabelbogen als Begrenzung bildet.

## 1.10 Aufgabe 10

Ein Polynom 3. Grades  $f(x)$  hat einen Wendepunkt bei  $x_w = 3$  mit der Wendetangente  $y = -6x + 22$ . Die  $y$ -Achse schneidet der Graph des Polynoms bei  $y_0 = -32$ . Berechnen Sie die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $f(x)$ .

## 2 Lösungen der Übungsaufgaben

### 2.1 Aufgabe 1

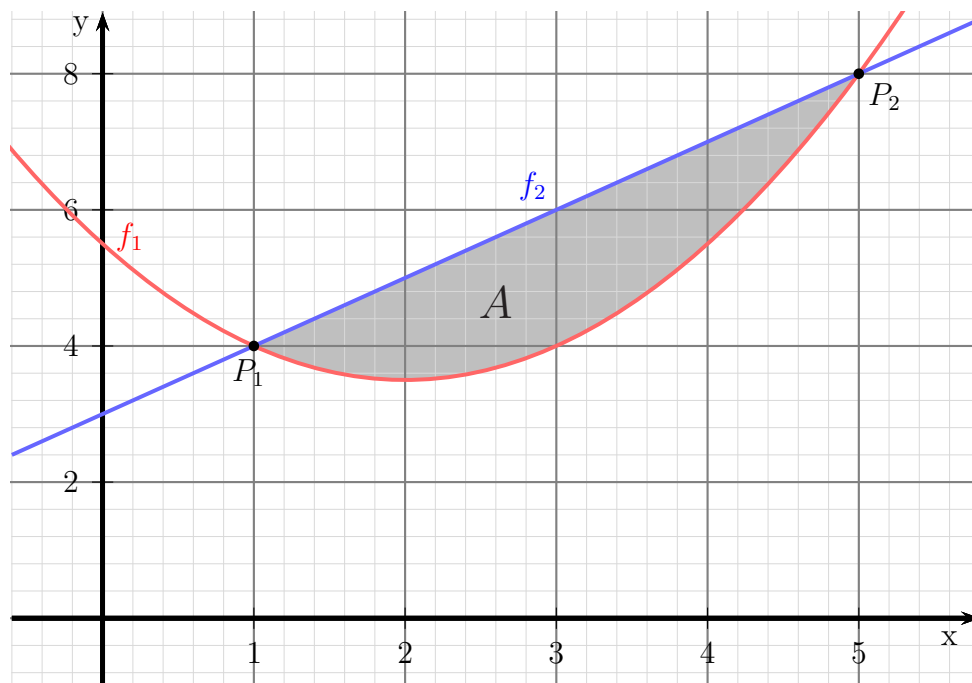
Der Graph der Funktion  $f_1(x) = 0,5(x - 2)^2 + 3,5$  wird vom Graphen der Funktion  $f_2(x) = x + 3$  geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned}f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\0,5(x_s - 2)^2 + 3,5 &= x_s + 3 \\0,5(x_s^2 - 4x_s + 4) + 3,5 &= x_s + 3 \\0,5x_s^2 - 2x_s + 2 + 3,5 &= x_s + 3 \quad | - x_s - 3 \\0,5x_s^2 - 3x_s + 2,5 &= 0 \quad | \cdot 2 \\x_s^2 - 6x_s + 5 &= 0 \\x_{s1/2} &= 3 \pm \sqrt{9 - 5} \\x_{s1/2} &= 3 \pm 2 \\x_1 = 1 \quad x_2 &= 5\end{aligned}$$

Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt.

**Skizze der gesuchten Fläche:**



Ein Blick auf die Skizze zeigt, dass im Bereich zwischen 1 und 5  $f_2$  die obere und  $f_1$  die untere Funktion ist. Damit können wir die gesuchte Fläche als bestimmtes Integral ansetzen.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x) \, dx \\
 &= \int_1^5 (x + 3) - (0,5(x - 2)^2 + 3,5) \, dx \\
 &= \int_1^5 x + 3 - (0,5x^2 - 2x + 2 + 3,5) \, dx \\
 &= \int_1^5 x + 3 - 0,5x^2 + 2x - 5,5 \, dx \\
 &= \int_1^5 -0,5x^2 + 3x - 2,5 \, dx \\
 &= \left[ -\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2,5x \right]_1^5 \\
 &= \left[ -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x \right]_1^5 \\
 &= \left[ -\frac{1}{6} \cdot 5^3 + \frac{3}{2} \cdot 5^2 - \frac{5}{2} \cdot 5 \right] - \left[ -\frac{1}{6} \cdot 1^3 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 - \frac{5}{2} \cdot 1 \right] \\
 &= \frac{25}{6} - \left( -\frac{7}{6} \right) \\
 &= \frac{32}{6} \approx 5,333 \\
 A &= \frac{16}{3} \text{ FE}
 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt ca. 5,333 Flächeneinheiten.

## 2.2 Aufgabe 2

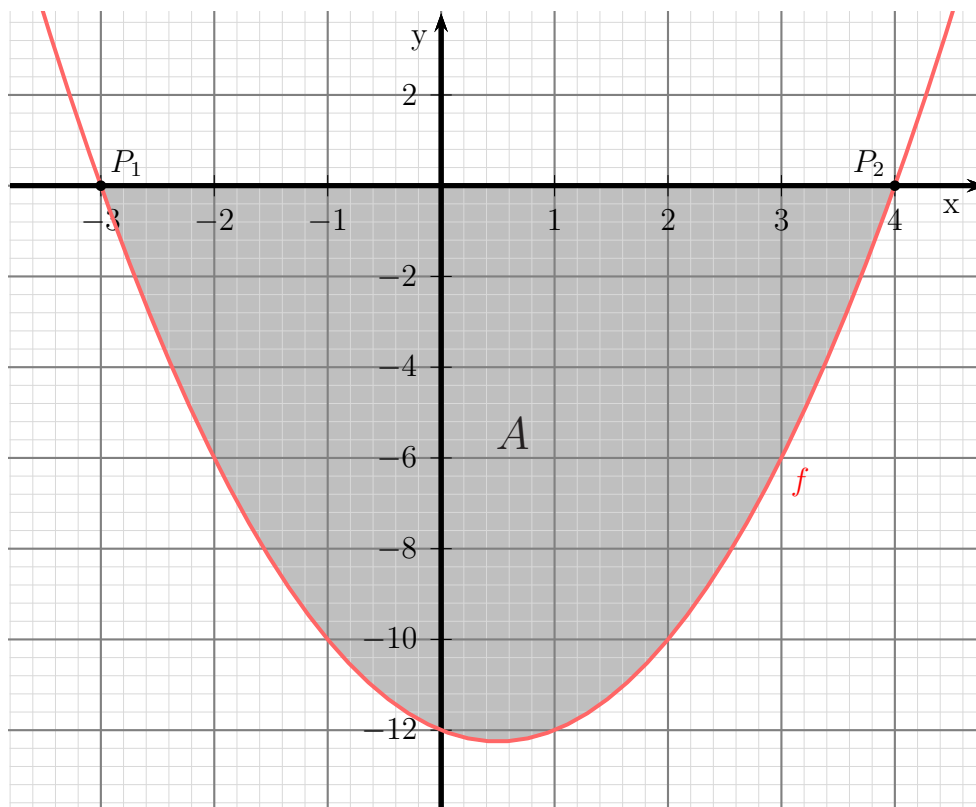
Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^2 - x - 12$ . Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der  $x$ -Achse!

Zunächst müssen die Schnittstellen des Funktionsgraphen mit der  $x$ -Achse berechnet werden.

$$\begin{aligned}f(x_0) &= 0 \\x_0^2 - x_0 - 12 &= 0 \\x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} \\x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} \\x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\x_{01/2} &= \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \\x_{01} &= -3 & x_{02} &= 4\end{aligned}$$

Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt.

**Skizze der gesuchten Fläche:**



Der Formfaktor  $a = +1$  ist positiv, die Parabel ist also nach oben geöffnet. Deshalb muss die Fläche **unterhalb** der  $x$ -Achse liegen. Daher ergibt der Ansatz mit dem bestimmten Integral einen **negativen** Wert. Wir müssen daher beim Ansatz ein Minuszeichen einfügen.

$$\begin{aligned}
 A &= - \int_{x_{01}}^{x_{02}} f(x) \, dx \\
 &= - \int_{-3}^4 x^2 - x - 12 \, dx \\
 &= - \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x \right]_{-3}^4 \\
 &= - \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 \right) - \left( \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) \right) \right] \\
 &= - \left( -\frac{104}{3} - \frac{45}{2} \right) \\
 &= \frac{343}{6} \approx 57,167 \\
 A &= \frac{343}{6} \text{ FE}
 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt ca. 57,167 Flächeneinheiten.

## 2.3 Aufgabe 3

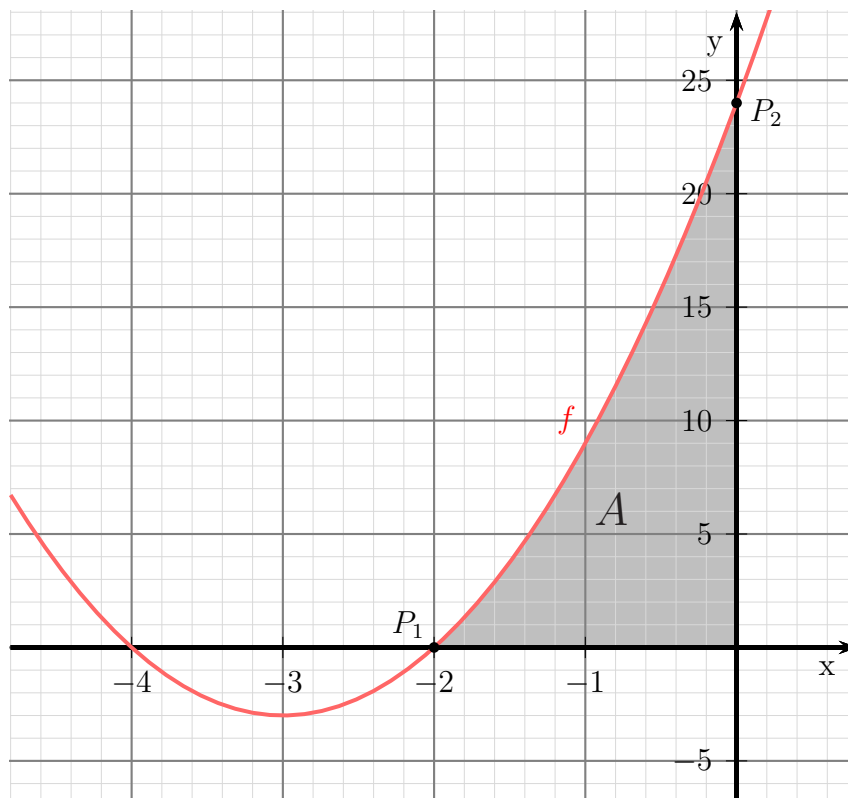
Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 3x^2 + 18x + 24$ . Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen, der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse!

Zunächst müssen die Schnittstellen des Funktionsgraphen mit der  $x$ -Achse berechnet werden.

$$\begin{aligned}f(x_0) &= 0 \\3x_0^2 + 18x_0 + 24 &= 0 \quad | : 3 \\x_0^2 + 6x_0 + 8 &= 0 \\x_{01/2} &= -3 \pm \sqrt{9 - 8} \\x_{01/2} &= -3 \pm 1 \\x_{01} &= -4 \quad x_{02} = -2\end{aligned}$$

Damit sind die möglichen Integrationsgrenzen bekannt. Ein Blick auf den Funktionsgraphen zeigt, dass der rechte Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse  $x_1 = -2$  als untere Integrationsgrenze verwendet werden muss. Die obere Grenze ist die  $y$ -Achse, also  $x_2 = 0$ . Die linke Nullstelle bei  $x_{01} = -4$  liegt zu weit ab.

**Skizze der gesuchten Fläche:**





Die Fläche liegt **oberhalb** der  $x$ -Achse. Daher ergibt das bestimmte Integral einen **positiven** Wert, es muss also kein Minuszeichen eingefügt werden.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 f(x) \, dx \\ &= \int_{-2}^0 3x^2 + 18x + 24 \, dx \\ &= \left[ x^3 + 9x^2 + 24x \right]_{-2}^0 \\ &= \left( 0^3 + 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 \right) - \left( (-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2) \right) \\ &= 0 - (-20) \\ A &= 20 \text{ FE} \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt 20 Flächeneinheiten.

## 2.4 Aufgabe 4

Der Graph der Funktion  $f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$  wird vom Graphen der Funktion  $f_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$  geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

**Schnittpunktberechnung:** Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned}f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\x_s^3 - 4x_s^2 + 5x_s - 3 &= 2x_s^2 - 4x_s + 1 \quad | - 2x_s^2 + 4x_s - 1 \\x_s^3 - 6x_s^2 + 9x_s - 4 &= 0\end{aligned}$$

Ein analytisches Lösungsverfahren für Kubische Gleichungen haben wir nicht zur Verfügung. Wir können jedoch durch **planvolles** Probieren eine Lösung bestimmen und dann den Funktionsterm faktorisieren. Wenn es ganzzahlige Lösungen gibt, dann sind das Teiler des absoluten Gliedes. Es kommt also nur  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  und  $\pm 4$  in Frage.

Wir finden schnell die Lösung  $x_{s1} = 1$ . Mit Hilfe der Polynomdivision können wir  $(x_s - 1)$  ausklammern.

$$x_s^3 - 6x_s^2 + 9x_s - 4 = (x_s^2 - 5x_s + 4) \cdot (x_s - 1)$$

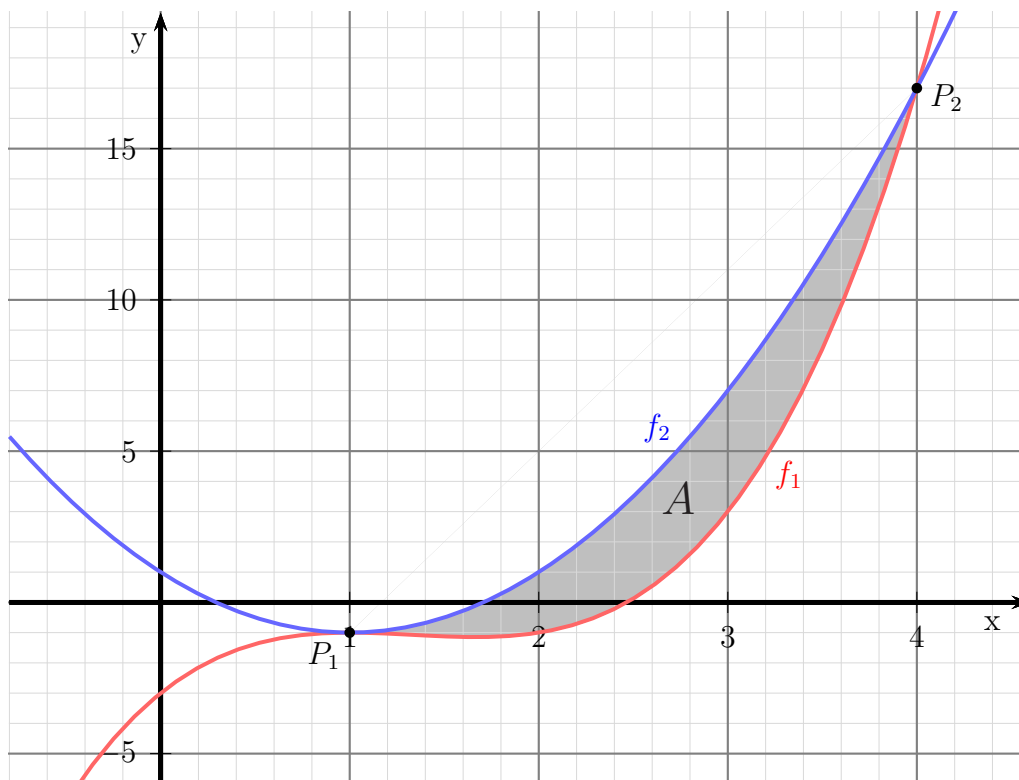
Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Wir müssen also für weitere Nullstellen nur noch den ersten Term untersuchen.

$$\begin{aligned}x_s^2 - 5x_s + 4 &= 0 \\x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \\x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\x_{s2/3} &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\x_{s2} = 1 & \quad x_{s3} = 4\end{aligned}$$

Bei  $x = 1$  liegt eine doppelte Nullstelle vor, wir haben also tatsächlich nur zwei gemeinsame Punkte der beiden Funktionsgraphen. Damit sind die Integrationsgrenzen als  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 4$  bekannt.

Werfen wir einen Blick auf die Funktionsgraphen, dann können wir sehen, dass in diesem Bereich der Graph der Funktion  $f_2$  oberhalb des Graphen der Funktion  $f_1$  liegt. Damit können wir das bestimmte Integral zur Flächenberechnung mit  $f_2(x) - f_1(x)$  ansetzen.

Skizze der gesuchten Fläche:



Flächenberechnung:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 f_2(x) - f_1(x) \, dx \\ &= \int_1^4 (2x^2 - 4x + 1) - (x^3 - 4x^2 + 5x - 3) \, dx \\ &= \int_1^4 2x^2 - 4x + 1 - x^3 + 4x^2 - 5x + 3 \, dx \\ &= \int_1^4 -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 \, dx \\ &= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 \\ &= \left( -\frac{1}{4} \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 - \frac{9}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \right) - \left( -\frac{1}{4} \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 - \frac{9}{2} \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \right) \\ &= 8 - 1,25 \\ A &= 6,75 \text{FE} \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt 6,75 Flächeneinheiten.

## 2.5 Aufgabe 5

Der Graph der Funktion  $f_1(x) = x^4 - 4x^2 + 3$  wird vom Graphen der Funktion  $f_2(x) = -x^2 + 7$  geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

**Schnittpunktbestimmung:** Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned}f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\x^4 - 4x^2 + 3 &= -x^2 + 7 \quad | + x^2 - 7 \\x^4 - 3x^2 - 4 &= 0\end{aligned}$$

Diese **Biquadratische Gleichung** löst man durch Substitution. Wir ersetzen vorübergehend:

$$x^2 = z$$

Dadurch erhalten wir eine Quadratische Gleichung mit  $z$ .

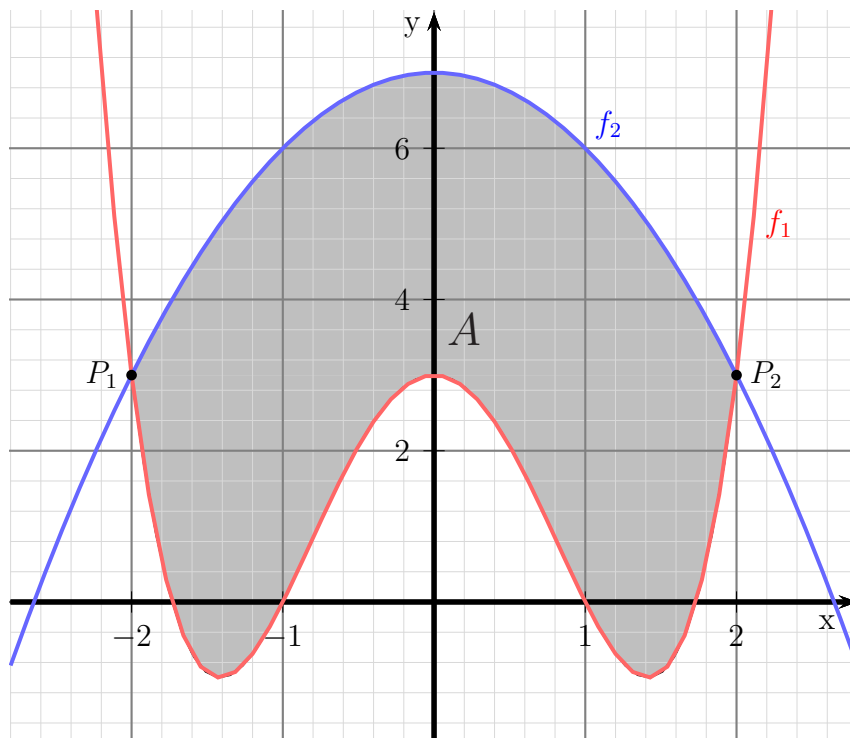
$$\begin{aligned}z^2 - 3z - 4 &= 0 \\z_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} \\z_{1/2} &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\z_1 = \frac{8}{2} = 4 & \quad z_2 = -\frac{2}{2} = -1\end{aligned}$$

Beim Zurück-Substituieren entfällt die Lösung für  $z_2 = -1$ , da die Quadratzahl einer Reellen Zahl nicht negativ sein kann. Führen wir das also für  $z_1$  durch.

$$\begin{aligned}x^2 &= z_1 \\x^2 &= 4 \quad | \sqrt{\phantom{x}} \\x_{1/2} &= \pm 2 \\x_1 = -2 & \quad x_2 = 2\end{aligned}$$

Zwischen diesen beiden Werten liegt also die zu bestimmende Fläche.

Skizze der gesuchten Fläche:



**Flächenberechnung:** Aus der Skizze erkennt man, dass die Fläche **unten** von  $f_1$  und **oben** von  $f_2$  begrenzt wird. Entsprechend ergibt sich folgender Ansatz:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x) \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 7) - (x^4 - 4x^2 + 3) \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 -x^2 + 7 - x^4 + 4x^2 - 3 \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 -x^4 + 3x^2 + 4 \, dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{5}x^5 + x^3 + 4x \right]_{-2}^2 \\
 &= \left( -\frac{1}{5} \cdot 2^5 + 2^3 + 4 \cdot 2 \right) - \left( -\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 + (-2)^3 + 4 \cdot (-2) \right) \\
 &= (-6,4 + 8 + 8) - (6,4 - 8 - 8) \\
 A &= 19,2 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

Die Fläche beträgt  $A = 19,2$  Flächeneinheiten

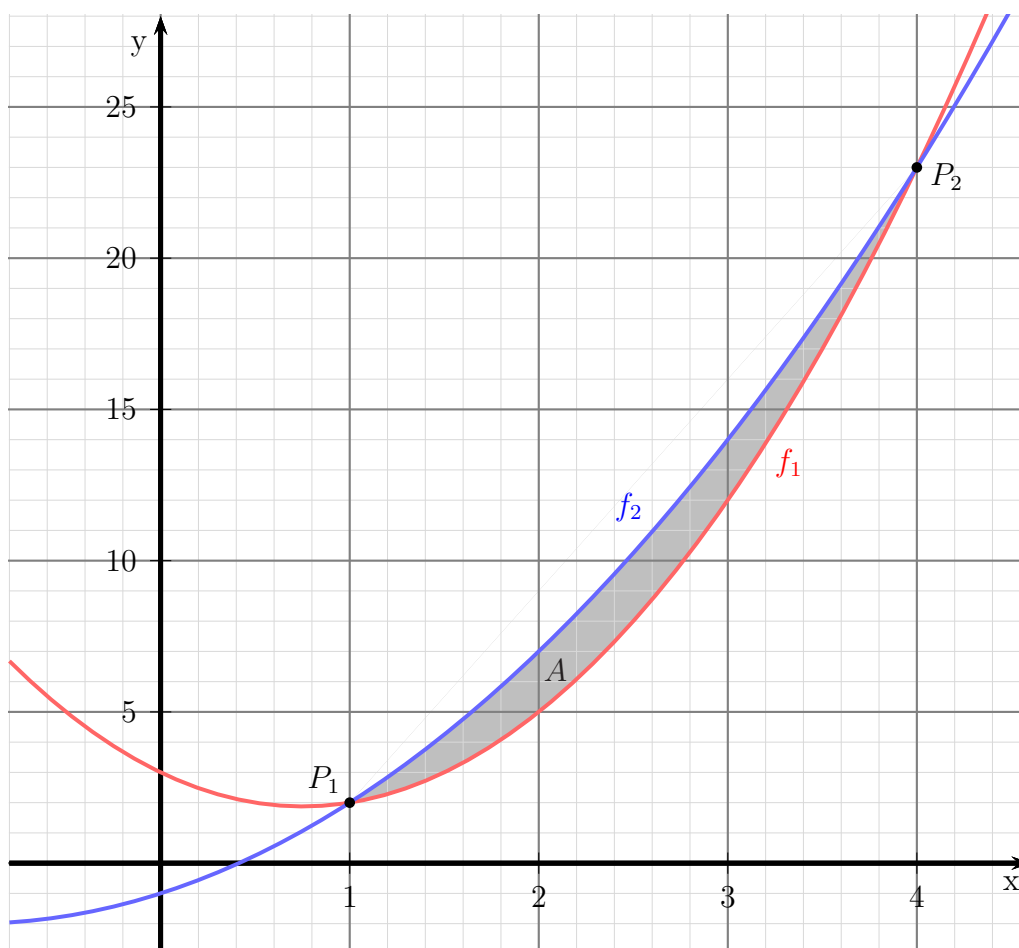
## 2.6 Aufgabe 6

Der Graph der Funktion  $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 3$  wird vom Graphen der Funktion  $f_2(x) = x^2 + 2x - 1$  geschnitten. Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen!

**Schnittpunktbestimmung:** Zunächst müssen wir die Schnittstellen der beiden Funktionsgraphen bestimmen. Dies geschieht durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned} f_1(x_s) &= f_2(x_s) \\ 2x^2 - 3x + 3 &= x^2 + 2x - 1 \quad | -x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_1 = 1 & \quad x_2 = 4 \end{aligned}$$

Skizze der gesuchten Fläche:



**Flächenberechnung:** Aus der Skizze erkennt man, dass die Fläche **unten** von  $f_1$  und **oben** von  $f_2$  begrenzt wird. Entsprechend ergibt sich folgender Ansatz:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x) \, dx \\ &= \int_1^4 (x^2 + 2x - 1) - (2x^2 - 3x + 3) \, dx \\ &= \int_1^4 x^2 + 2x - 1 - 2x^2 + 3x - 3 \, dx \\ &= \int_1^4 -x^2 + 5x - 4 \, dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4 \\ &= \left( -\frac{1}{3} \cdot 4^3 + \frac{5}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 \right) - \left( -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{5}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \right) \\ &= \left( -\frac{64}{3} + 40 - 16 \right) - \left( -\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4 \right) \\ &= \frac{8}{3} - \left( -\frac{7}{6} \right) \\ A &= 4,5 \text{ FE} \end{aligned}$$

Die Fläche beträgt  $A = 4,5$  Flächeneinheiten

## 2.7 Aufgabe 7

Ein Polynom 4. Grades hat zwei Tiefpunkte auf der  $x$ -Achse bei  $T_1(0|0)$  und  $T_2(4|0)$ . Der Funktionsgraph verläuft außerdem noch durch den Punkt  $P(2|240)$ . Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Tiefpunkten von dem Graphen von  $f(x)$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird!

**Aufstellen der Funktionsgleichung:** Ich stelle das Polynom in allgemeiner Form sowie die erste Ableitung dar, bevor die Bedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Punkt } (0|0) & \Rightarrow f(0) = 0 & \Rightarrow (1) & 0a + 0b + 0c + 0d + e = 0 \\ \text{Punkt } (4|0) & \Rightarrow f(4) = 0 & \Rightarrow (2) & 256a + 64b + 16c + 4d + e = 0 \\ \text{Tiefpunkt bei } x_1 = 0 & \Rightarrow f'(0) = 0 & \Rightarrow (3) & 0a + 0b + 0c + d = 0 \\ \text{Tiefpunkt bei } x_2 = 4 & \Rightarrow f'(4) = 0 & \Rightarrow (4) & 256a + 48b + 8c + d = 0 \\ \text{Punkt } (2|240) & \Rightarrow f(2) = 240 & \Rightarrow (5) & 16a + 8b + 4c + 2d + e = 240 \end{array}$$

Aus Gleichung (1) und (3) folgt sofort:

$$\begin{aligned}(1) \quad e &= 0 \\(3) \quad d &= 0\end{aligned}$$

Übrig bleibt ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung:

$$\begin{aligned}(2) \quad 256a + 64b + 16c &= 0 \\(4) \quad 256a + 48b + 8c &= 0 \\(5) \quad 16a + 8b + 4c &= 240\end{aligned}$$

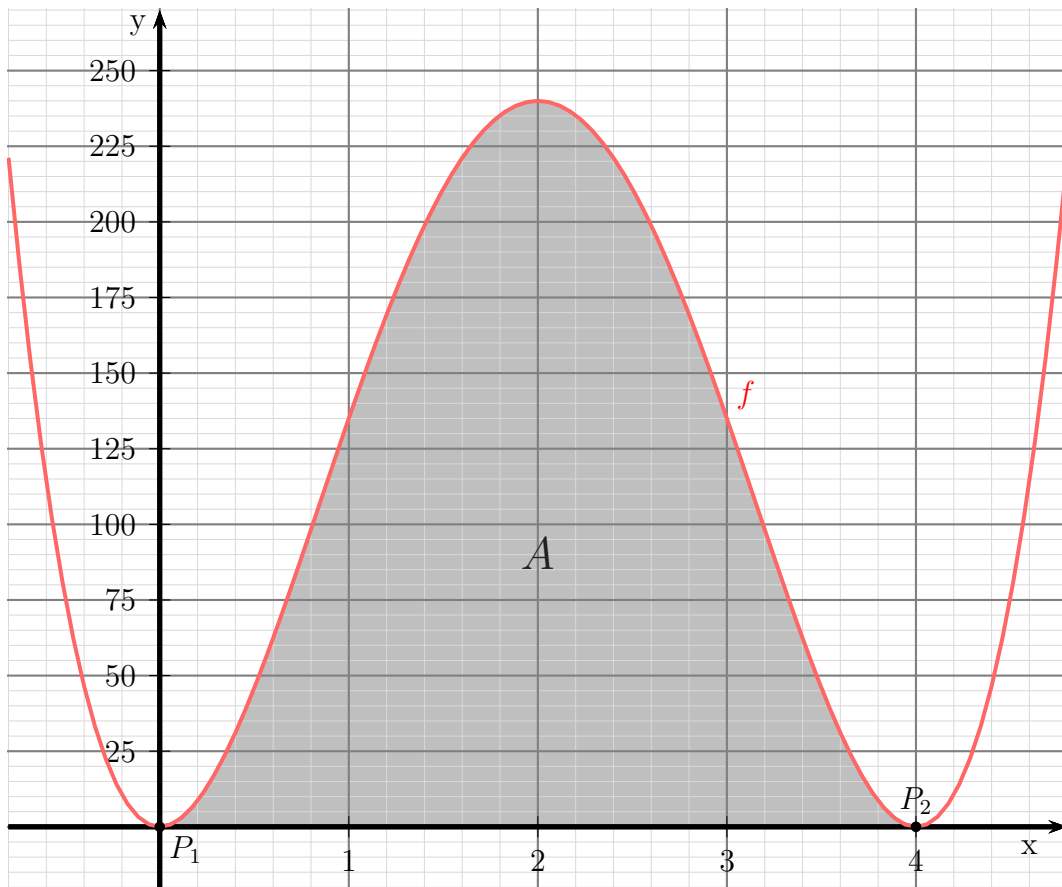
Mit einem beliebigen Lösungsverfahren erhält man:

$$\begin{aligned}a &= 15 \\b &= -120 \\c &= 240\end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung:  $f(x) = 15x^4 - 120x^3 + 240x^2$



Skizze der gesuchten Fläche:



**Flächenberechnung:** Die Integrationsgrenzen 0 und 4 sind bereits durch die  $x$ -Koordinaten der Tiefpunkte bekannt. Daher kann die Fläche direkt angesetzt werden.

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \\ &= \int_0^4 15x^4 - 120x^3 + 240x^2 \, dx \\ &= \left[ 3x^5 - 30x^4 + 80x^3 \right]_0^4 \\ &= \left( 3 \cdot 4^5 - 30 \cdot 4^4 + 80 \cdot 4^3 \right) - \left( 3 \cdot 0^5 - 30 \cdot 0^4 + 80 \cdot 0^3 \right) \\ &= (3072 - 7680 + 5120) - 0 \\ A &= 512 \end{aligned}$$

**A=512 Flächeneinheiten**

## 2.8 Aufgabe 8

Ein Polynom 3. Grades hat einen Hochpunkt bei  $H(0|4)$  und einen Tiefpunkt bei  $T(2|0)$ . Berechnen Sie die Fläche, die von der positiven  $x$ -Achse, der  $y$ -Achse und dem Funktionsgraphen des Polynoms eingeschlossen wird!

**Aufstellen der Funktionsgleichung:** Ich stelle das Polynom in allgemeiner Form sowie die erste Ableitung dar, bevor die Bedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Punkt } (0|4) & \Rightarrow f(0) = 4 & \Rightarrow (1) & 0a + 0b + 0c + d = 4 \\ \text{Punkt } (2|0) & \Rightarrow f(2) = 0 & \Rightarrow (2) & 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ \text{Hochpunkt bei } x_H = 0 & \Rightarrow f'(0) = 0 & \Rightarrow (3) & 0a + 0b + c = 0 \\ \text{Tiefpunkt bei } x_T = 2 & \Rightarrow f'(2) = 0 & \Rightarrow (4) & 12a + 4b + c = 0 \end{array}$$

Aus Gleichung (1) und (3) folgt sofort:

$$\begin{aligned}(1) \quad d &= 4 \\(3) \quad c &= 0\end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse in (2) und (4) ein, erhält man ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung, das ich anschließend mit einem beliebigen Verfahren, beispielsweise mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren lösen kann:

$$\begin{array}{rcll} (2) & 8a & +4b & = -4 & | \\ (4) & 12a & +4b & = 0 & | - \\ \hline (2) - (4) & -4a & & = -4 & | : (-4) \\ & a & & = 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (4) ein:

$$\begin{aligned}12 \cdot 1 + 4b &= 0 & | -12 \\ 4b &= -12 & | : 4 \\ b &= -3\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

**Nullstellenberechnung:**

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = 0$$

Durch **planvolles**<sup>1</sup> Probieren erhalte ich die Lösung:

$$x_{01} = 2$$

---

<sup>1</sup>Falls es ganzzahlige Nullstellen gibt, dann sind sie Teiler des **absoluten Gliedes**.

Weitere Nullstellen finde ich, nachdem der Funktionsterm mit Hilfe einer **Polynomdivision** faktorisiert wurde. Man kann immer  $(x - x_0)$  ausklammern, hier also  $(x - 2)$ .

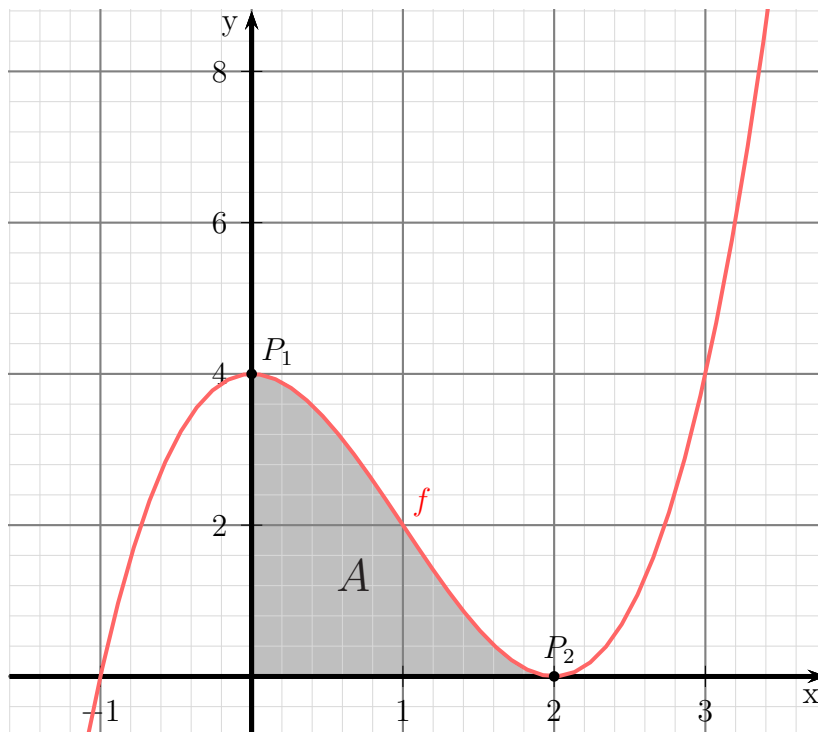
$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x^2 + 4) : (x - 2) = x^2 - x - 2 \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2)} \phantom{+ 4} \\
 -x^2 + 4 \\
 \underline{-(-x^2 + 2x)} \\
 -2x + 4 \\
 \underline{-(-2x + 4)} \\
 0
 \end{array}$$

Weitere Nullstellen finden wir als Nullstellen des Ergebnisterms.

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 2 &= 0 \\
 x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\
 x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\
 x_2 &= -1 & x_3 &= 2
 \end{aligned}$$

$x_3 = 2$  ist identisch mit  $x_1 = 2$ , wir haben tatsächlich also nur **zwei** Nullstellen. Da die **positive**  $x$ -Achse eine Begrenzungslinie ist, kommt nur  $x_1 = 2$  als Flächenbegrenzungspunkt in Frage, wie auch die Skizze erkennen lässt.

**Skizze der gesuchten Fläche:**



**Flächenberechnung:** Die Fläche stellt sich demnach als Integral unter der Kurve von 0 bis 2 dar.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 f(x) \, dx \\ &= \int_0^2 x^3 - 3x^2 + 4 \, dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_0^2 \\ &= \left( \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^3 + 4 \cdot 2 \right) - \left( \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 0^3 + 4 \cdot 0 \right) \\ &= (4 - 8 + 8) - 0 \\ A &= 4 \text{ FE} \end{aligned}$$

**A=4 Flächeneinheiten**

## 2.9 Aufgabe 9

Eine Parabel (Polynom 2. Grades) verläuft durch die Punkte  $P_1(1|-15)$ ,  $P_2(4|12)$  und  $P_3(5|9)$ . Berechnen Sie die Fläche, die die  $x$ -Achse mit dem Parabelbogen als Begrenzung bildet.

**Aufstellen der Funktionsgleichung:** Die allgemeine Form für ein Polynom 2. Grades lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die drei gegebenen Punkte ergeben drei Bedingungen, aus denen ein Linearsystem erstellt werden kann.

$$\begin{array}{l} (1) \quad f(1) = -15 \Rightarrow a + b + c = -15 \\ (2) \quad f(4) = 12 \Rightarrow 16a + 4b + c = 12 \\ (3) \quad f(5) = 9 \Rightarrow 25a + 5b + c = 9 \end{array}$$

Zusammengefasst sieht unser Linearsystem also so aus:

$$\begin{array}{l} (1) \quad a + b + c = -15 \\ (2) \quad 16a + 4b + c = 12 \\ (3) \quad 25a + 5b + c = 9 \end{array}$$

Zur Lösung kann nun jedes beliebige Lösungsverfahren verwendet werden. Da der Parameter  $c$  in jeder Gleichung allein vorkommt, bietet es sich an, die Gleichungen paarweise voneinander zu subtrahieren, damit wir zwei Gleichungen **ohne  $c$**  erhalten.

$$\begin{array}{l} (4) = (2) - (1) \quad 15a + 3b = 27 \\ (5) = (3) - (1) \quad 24a + 4b = 24 \end{array}$$

Für den nächsten Schritt verwende ich willkürlich das **Einsetzungsverfahren**. Ich löse Gleichung (4) nach  $b$  auf und setze den Term in (5) ein.

$$\begin{array}{l} (4) \quad 15a + 3b = 27 \quad | -15a \\ \quad \quad 3b = 27 - 15a \quad | :3 \\ \quad \quad b = 9 - 5a \end{array}$$

Eingesetzt in (5):

$$\begin{array}{l} (5) \quad 24a + 4b = 24 \\ \quad 24a + 4 \cdot (9 - 5a) = 24 \\ \quad 24a + 36 - 20a = 24 \quad | -36 \\ \quad \quad 4a = -12 \quad | :4 \\ \quad \quad a = -3 \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (4) eingesetzt.

$$b = 9 - 5a = 9 - 5 \cdot (-3) = 24$$

Nun werden beide Ergebnisse in (1) eingesetzt. (Auch jede andere Gleichung wäre hier möglich.)

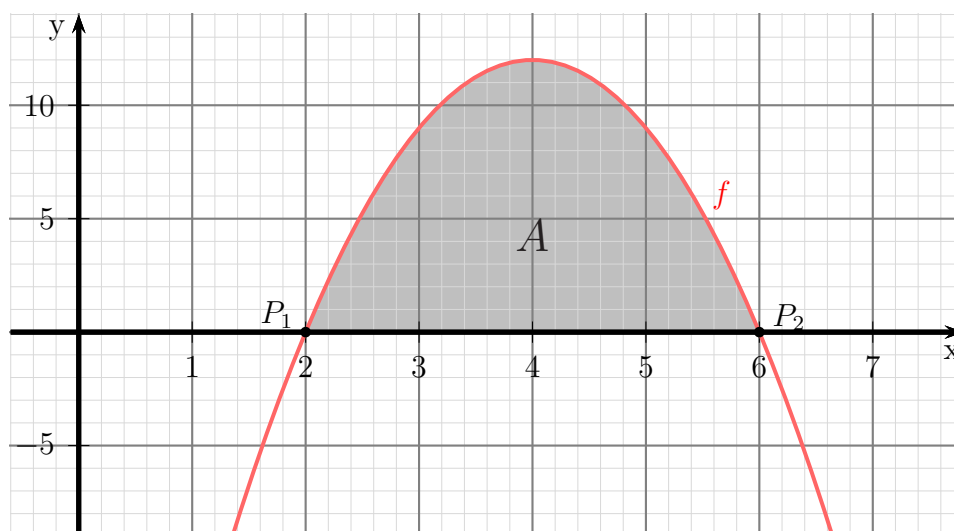
$$\begin{aligned} (1) \quad a + b + c &= -15 \\ -3 + 24 + c &= -15 \\ 21 + c &= -15 \quad | -21 \\ c &= -36 \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung:  $f(x) = -3x^2 + 24x - 36$

**Nullstellenbestimmung:** Zur Nullstellenbestimmung wird der Funktionsterm gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -3x_0^2 + 24x_0 - 36 &= 0 && | : (-3) \\ x_0^2 - 8x_0 + 12 &= 0 \\ x_{01/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 12} \\ x_{01/2} &= 4 \pm 2 \\ x_{01} = 2 & \quad x_{02} = 6 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten kann der Funktionsgraph skizziert werden.



**Berechnung der Fläche:** Die Funktionsgleichung und die Nullstellen sind bekannt. Damit kann das Integral zur Flächenberechnung aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_{01}}^{x_{02}} f(x) \, dx \\ &= \int_2^6 -3x^2 + 24x - 36 \, dx \\ &= \left[ -x^3 + 12x^2 - 36x \right]_2^6 \\ &= \left( -6^3 + 12 \cdot 6^2 - 36 \cdot 6 \right) - \left( -2^3 + 12 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 \right) \\ &= 0 - (-32) \\ A &= 32 \text{ FE} \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt:  $A = 32 \text{ FE}$

## 2.10 Aufgabe 10

Ein Polynom 3. Grades  $f(x)$  hat einen Wendepunkt bei  $x_w = 3$  mit der Wendetangente  $f_1(x) = -6x + 22$ . Die  $y$ -Achse schneidet der Graph des Polynoms bei  $y_0 = -32$ . Berechnen Sie die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $f(x)$ .

**Aufstellen der Funktionsgleichung:** Benötigt wird die Grundfunktion sowie die ersten beiden Ableitungen des Polynoms.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\f''(x) &= 6ax + 2b\end{aligned}$$

Aus dem Wendepunkt bei  $x_w = 3$  erhält man:

$$(1) \quad f''(3) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 3 + 2b = 0$$

Die Wendetangente liefert gleich zwei Bedingungen – den  $y$ -Wert am Wendepunkt und die Steigung dort. Diese Werte bestimme ich vorab.

$$f_1(3) = -6 \cdot 3 + 22 = 4$$

$$f'_1(3) = m = -6$$

Mit diesen Werten können nun die Bedingungen aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}(2) \quad f(3) &= f_1(3) \Rightarrow a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 4 \\(3) \quad f'(3) &= f'_1(3) \Rightarrow 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c = -6\end{aligned}$$

Die letzte Bedingung liefert der  $y$ -Achsenabschnitt.

$$(4) \quad f(0) = -32 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -32$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, erhält man folgendes Gleichungssystem 4. Ordnung:

(1)	$18a$	$+2b$		$= 0$
(2)	$27a$	$+9b$	$+3c$	$+d = 4$
(3)	$27a$	$+6b$	$+c$	$= -6$
(4)			$d$	$= -32$

Aus Gleichung (4) ist  $d$  schon bekannt. Der Wert wird sofort in (2) eingesetzt. Bringt man in Gleichung (2) den eingesetzten Wert von  $-32$  sofort auf die andere Gleichungsseite, erhält man folgendes Gleichungssystem 3. Ordnung:

(1)	$18a$	$+2b$		$= 0$
(2)	$27a$	$+9b$	$+3c$	$= 36$
(3)	$27a$	$+6b$	$+c$	$= -6$



Für die weitere Lösung ist es günstig, dass  $c$  nur in **zwei** Gleichungen vorkommt. Man sollte also versuchen, die Variable  $c$  zuerst zu eliminieren. Dies könnte mit dem Einsetzungsverfahren, aber auch mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren durchgeführt werden. Ich entscheide mich für letzteres und dividiere dazu Gleichung (2) durch 3. Dann kann (2) von (3) subtrahiert werden.

$$\begin{array}{rcl}
 (2) & 27a & +9b & +3c & = & 36 & | : 3 \\
 (3) & 27a & +6b & +c & = & -6 & \\
 \hline
 (2) & 9a & +3b & +c & = & 12 & | - \\
 (3) & 27a & +6b & +c & = & -6 & | \\
 \hline
 (5) & 18a & +3b & & = & -18 & 
 \end{array}$$

Mit Gleichung (1) und (5) bleibt nun ein Gleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\boxed{
 \begin{array}{rcl}
 (1) & 18a & +2b & = & 0 \\
 (5) & 18a & +3b & = & -18
 \end{array}
 }$$

Hier bietet sich sofort das Subtraktionsverfahren an, da die Koeffizienten von  $a$  gleich sind.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 18a & +2b & = & 0 & | - \\
 (5) & 18a & +3b & = & -18 & | \\
 \hline
 (6) & & & & b & = & -18
 \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (1) ein.

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & 18a & + 2b & = & 0 \\
 & 18a & + 2 \cdot (-18) & = & 0 \\
 & 18a & - 36 & = & 0 & | + 36 \\
 & 18a & = & 36 & | : 18 \\
 & a & = & 2 & 
 \end{array}$$

Zur Bestimmung von  $c$  verwende ich die umgestellte Gleichung (2).

$$\begin{array}{rcl}
 (2) & 9a & + 3b & + c & = & 12 \\
 & 9 \cdot 2 & + 3 \cdot (-18) & + c & = & 12 \\
 & 18 & - 54 & + c & = & 12 \\
 & -36 & + c & = & 12 & | + 36 \\
 & c & = & 48 & 
 \end{array}$$

Hiermit lautet die Funktionsgleichung:  $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 48x - 32$

**Nullstellenbestimmung:**

$$\begin{array}{rcl}
 & f(x_0) & = & 0 \\
 2x_0^3 & - 18x_0^2 & + 48x_0 & - 32 & = & 0 & | : 2 \\
 x_0^3 & - 9x_0^2 & + 24x_0 & - 16 & = & 0 & 
 \end{array}$$

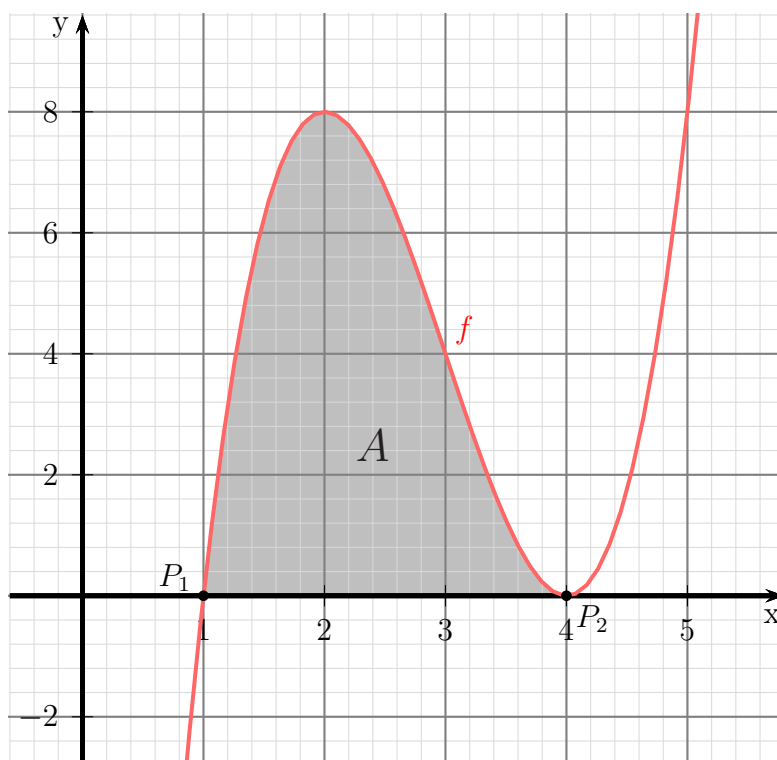
Da wir kein analytisches Lösungsverfahren für eine Kubische Gleichung haben, muss eine Lösung durch planvolles Raten ermittelt werden. Man erhält so z. B.  $x_{01} = 1$ . Damit ist eine **Polynomdivision** möglich.

$$\begin{array}{r}
 (x_0^3 - 9x_0^2 + 24x_0 - 16) : (x_0 - 1) = x_0^2 - 10x_0 + 16 \\
 \underline{-(x_0^3 - x_0^2)} \\
 -8x_0^2 + 24x_0 - 16 \\
 \underline{-(-8x_0^2 + 8x_0)} \\
 16x_0 - 16 \\
 \underline{-(16x_0 - 16)} \\
 0
 \end{array}$$

Alle weiteren Nullstellen liegen jetzt in dem Ergebnisterm.

$$\begin{aligned}
 x_0^2 - 8x_0 + 16 &= 0 \\
 x_{02/3} &= 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \\
 &= 4 \pm 0 \\
 x_{02} &= 4
 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten kann der Funktionsgraph skizziert werden.



**Berechnung der Fläche:** Die Funktionsgleichung und die Nullstellen sind bekannt. Damit kann das Integral zur Flächenberechnung aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_{01}}^{x_{02}} f(x) \, dx \\ &= \int_1^4 2x^3 - 18x^2 + 48x - 32 \, dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + 24x^2 - 32x \right]_1^4 \\ &= \left( \frac{1}{2} \cdot 4^4 - 6 \cdot 4^3 + 24 \cdot 4^2 - 32 \cdot 4 \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 24 \cdot 1^2 - 32 \cdot 1 \right) \\ &= 0 - (-13,5) \\ A &= 13,5 \text{ FE} \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt:  $A = 13,5 \text{ FE}$