

Gebrochen Rationale Funktionen

W. Kippels

21. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Polstellen und Lücken	2
3	Asymptote	7
4	Übungsaufgaben	8
4.1	Aufgabe 1	8
4.2	Aufgabe 2	8
4.3	Aufgabe 3	8
4.4	Aufgabe 4	8
4.5	Aufgabe 5	8
4.6	Aufgabe 6	8
4.7	Aufgabe 7	8
4.8	Aufgabe 8	9
4.9	Aufgabe 9	9
4.10	Aufgabe 10	9
4.11	Aufgabe 11	9
4.12	Aufgabe 12	9
4.13	Aufgabe 13	9
4.14	Aufgabe 14	9
5	Ergebnisse	10
6	Durchgerechnete Musterlösungen	11
6.1	Aufgabe 1	11
6.2	Aufgabe 2	13
6.3	Aufgabe 3	15
6.4	Aufgabe 4	17
6.5	Aufgabe 5	19

6.6	Aufgabe 6	21
6.7	Aufgabe 7	23
6.8	Aufgabe 8	26
6.9	Aufgabe 9	30
6.10	Aufgabe 10	33
6.11	Aufgabe 11	35
6.12	Aufgabe 12	38
6.13	Aufgabe 13	41
6.14	Aufgabe 14	44

1 Einführung

Eine **Gebrochen Rationale Funktion** ist eine Funktion, die sich als Bruch darstellen lässt:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Hierbei sind sowohl die **Zählerfunktion** $Z(x)$ als auch die **Nennerfunktion** $N(x)$ ein **Polynom**. Ein Polynom ist eine Funktion, die in folgender Form darstellen lässt:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

Gebrochen Rationale Funktionen haben ein paar Eigenschaften, die man bei den meisten anderen Funktionen nicht findet. Dies sind:

- Einschränkungen im Definitionsbereich
- Polstellen
- Lücken
- Asymptoten

Im weiteren Verlauf gehen wir auf diese Einzelheiten näher ein.

Im Folgenden werde ich die Zählerfunktion immer mit $Z(x)$ und die Nennerfunktion mit $N(x)$ bezeichnen.

2 Polstellen und Lücken

Gebrochen Rationale Funktionen haben immer einen Nenner. Da man bekanntlich nicht durch Null dividieren darf, sind alle x -Werte, für die ein Nenner gleich Null ist, aus dem Definitionsbereich auszuschließen. Ein Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8}$$

Der Nenner $(x^2 - 6x + 8)$ könnte für mehrere x Null werden. Welche das sind, bestimmt man in einer separaten Rechnung, indem man den Nenner gleich Null setzt.

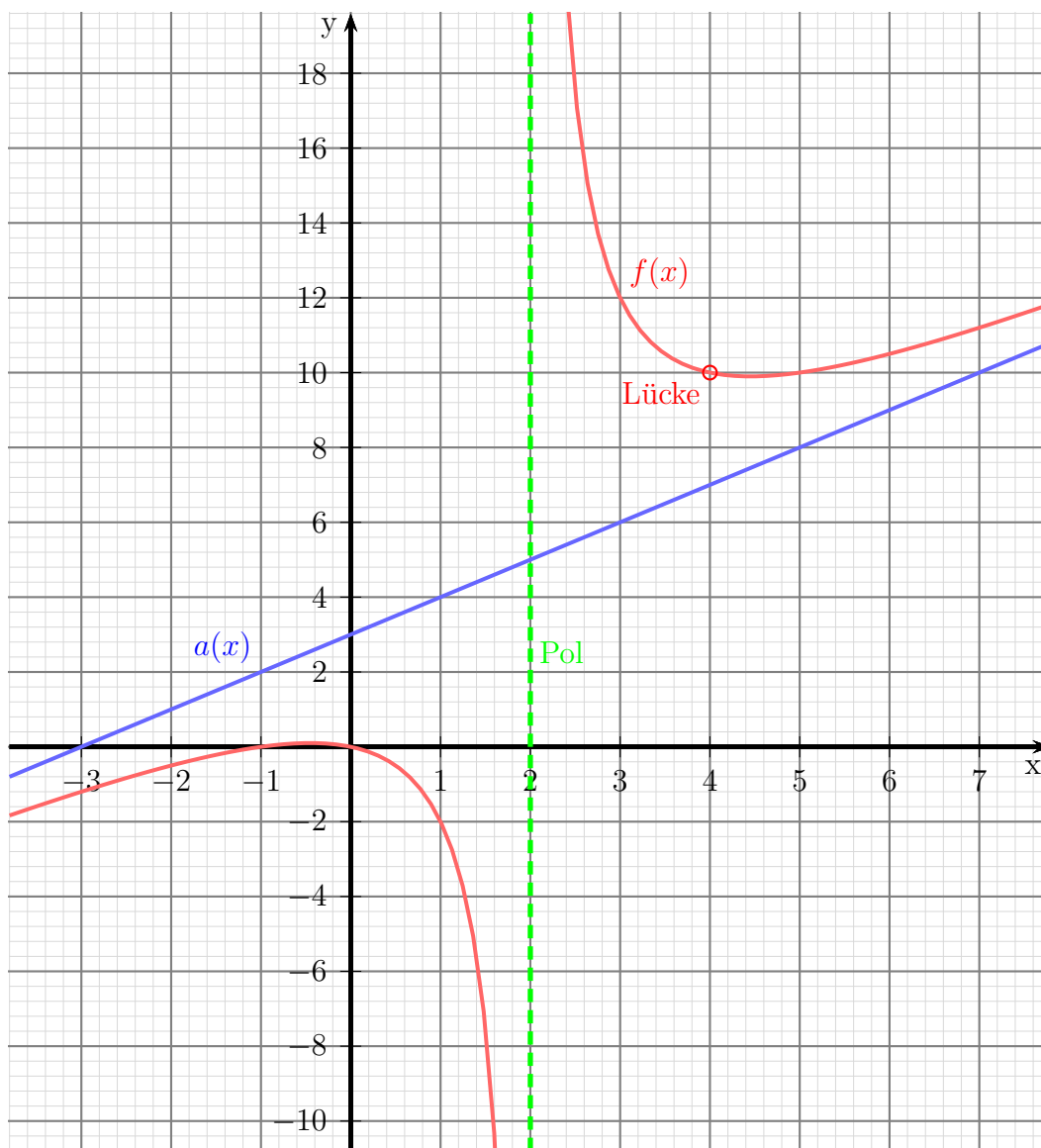
$$\begin{aligned} N(x) &= 0 \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\ &= 3 \pm \sqrt{1} \\ x_{1/2} &= 3 \pm 1 \\ x_1 &= 2 \quad x_2 = 4 \end{aligned}$$

Diese beiden Werte müssen wir aus der Definitionsmenge ausschließen: $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$

An diesen sogenannten „Definitionslücken“ kann die Funktion ein unterschiedliches Verhalten zeigen. Dies kann sein:

- eine Polstelle
- eine (hebbare) Lücke

Was ist eine Polstelle oder eine Lücke? Dazu sehen wir uns den Verlauf der Funktion in nachfolgendem Bild an.



Schauen wir uns zunächst den Bereich um die Definitionslücke bei $x_1 = 2$ an. Man erkennt, dass in diesem Bereich die Kurve nach oben bzw. unten „wegbiegt“, sich also Richtung $+\infty$ bzw. $-\infty$ bewegt. Eine Stelle, an der eine Funktion ein solches Verhalten zeigt, nennt man **Polstelle**. Dabei gibt es an genau dieser Stelle keinen Funktionswert.

Die Funktion ist nur in der Umgebung dieser Stelle definiert. Das Verhalten in der Umgebung wird aber trotzdem der Stelle zugeordnet.

Völlig anders sieht das Verhalten der Funktion an der Definitionslücke bei $x_2 = 4$ aus. An dieser Stelle ist sie nicht definiert, das ist klar, aber im Funktionsgraphen sieht es so aus, als ob es zu $x_2 = 4$ einen y -Wert gäbe, nämlich $y_2 = 10$. Das liegt daran, dass die Kurve von beiden Seiten auf diesen Funktionswert zustrebt. Daher spricht man hier von einer **Lücke**, die man „stopfen“ oder beheben kann, indem man einen passenden Funktionswert ergänzt. Der korrekte Fachausdruck hierfür ist **hebbare Lücke**, oder einfach nur **Lücke**. Das mag manchmal zu Missverständnissen führen, weil man die Fehlstellen im Definitionsbereich allgemein – also auch die Polstelle – als **Definitionslücke** bezeichnet. Die Begriffe „Definitionslücke“ und „Lücke“ muss man also sorgsam unterscheiden.

Halten wir also fest: An einer Definitionslücke kann eine **Polstelle** oder eine (hebbare) **Lücke** vorliegen. Wie findet man nun heraus, welches Verhalten die Funktion zeigt? Dazu untersuchen wir den Zähler an dieser Stelle, indem wir den x -Wert der Definitionslücke in den Zähler einsetzen. Es gibt nun genau zwei Möglichkeiten. Entweder ist der Zähler dort *gleich* oder *ungleich* Null ($Z(x_1) = 0$ oder $Z(x_1) \neq 0$). Ist er *ungleich* Null, dann ist die Sache klar, wir haben eine Polstelle. Zu unserem Beispiel (bei $x_1 = 2$):

$$\begin{aligned} Z(2) &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \\ &= 8 - 12 - 8 \\ &= -12 \\ Z(2) &\neq 0 \end{aligned}$$

Daraus können wir also – wie oben erwähnt – sofort schlussfolgern, dass bei $x_1 = 2$ eine **Polstelle** vorliegt.

Polstelle bei $x_p = 2$

Es liegt nun nahe zu vermuten, dass im Fall von $Z(x_L) = 0$ eine Lücke bei x_L vorliegen muss. Das ist zwar möglich, aber sicher ist das leider nicht. Es könnte auch trotzdem eine Polstelle sein. Um das zu prüfen, ist etwas mehr Aufwand erforderlich. Da sowohl der Zähler, als auch der Nenner bei x_L eine Nullstelle hat, ist es möglich, im Zähler und im Nenner $(x - x_L)$ auszuklammern und dadurch den Bruch zu kürzen. Dies schauen wir uns in unserem Beispiel mal bei $x_L = x_2 = 4$ an.

$$\begin{aligned} Z(4) &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 \\ &= 64 - 48 - 16 \\ Z(4) &= 0 \end{aligned}$$

An dieser Stelle wissen wir nur, dass eine Lücke in Frage kommt. Wir wissen aber auch, dass sowohl im Zähler, als auch im Nenner der Faktor $(x - x_L)$ also $(x - 4)$ ausgeklammert werden kann. Dazu führen wir sowohl im Zähler als auch im Nenner eine Polynomdivision durch $(x - 4)$ durch. Beginnen wir mit dem Zähler.

$$\begin{array}{r} (x^3 \quad -3x^2 \quad -4x) : (x - 4) = x^2 + x \\ -(x^3 \quad -4x^2) \\ \hline (x^2 \quad -4x) \\ -(x^2 \quad -4x) \\ \hline 0 \end{array}$$

Der Zähler lässt sich also zerlegen als:

$$Z(x) = (x^2 + x) \cdot (x - 4)$$

Entsprechend verfahren wir mit dem Nenner. Auch hier führen wir die Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{r} (x^2 \quad -6x \quad +8) : (x - 4) = x - 2 \\ -(x^2 \quad -4x) \\ \hline (-2x \quad +8) \\ -(-2x \quad +8) \\ \hline 0 \end{array}$$

Den Nenner können wir also in faktorisierte Form darstellen als:

$$N(x) = (x - 2) \cdot (x - 4)$$

Damit sieht die gesamte Funktion so aus:

$$f(x) = \frac{(x^2 + x) \cdot (x - 4)}{(x - 2) \cdot (x - 4)}$$

Man sieht, dass man offensichtlich durch $(x - 4)$ kürzen kann. Ganz so unproblematisch ist das allerdings nicht, denn Kürzen bedeutet, dass man Zähler und Nenner durch den gleichen Term **dividiert**. Da man bekanntermaßen nicht durch Null dividieren kann, muss sichergestellt sein, dass das auch nicht versehentlich passiert. Der Term $(x - 4)$ ist Null, wenn $x = 4$ ist. Können wir sicher sein, dass stets $x \neq 4$ ist? Der Blick auf den Definitionsbereich hilft weiter. Da steht: $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$. Hierdurch ist $x = 4$ ausdrücklich ausgeschlossen. *Innerhalb des Definitionsbereiches* dürfen wir also kürzen. Wir müssen uns allerdings darüber im klaren sein, dass sich *außerhalb des Definitionsbereiches* eine Veränderung der Funktion ergeben kann. Tatsächlich erhalten wir durch das Kürzen eine neue Funktion, die nun auch für $x = 4$ definiert ist. Aus diesem Grund gebe ich der Funktion, die durch das Kürzen entsteht, einen neuen Namen, nämlich $f^*(x)$. Ich erhalte demnach:

$$f^*(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2}$$

Wenn diese neue gekürzte Funktion einen Funktionswert für die zu untersuchende Definitionslücke liefert, dann haben wir eine (hebbare) Lücke. Ich muss also nur prüfen, ob der Nenner der neuen Funktion an der zu untersuchenden Stelle

ungleich Null ist. **Ist der neue Nenner an der zu untersuchenden Stelle immer noch gleich Null, dann muss man mit der gekürzten Funktion wieder ganz von vorn anfangen.** Man muss also wieder den (neuen) Zähler untersuchen und eventuell auch neu faktorisieren usw.

Die Prüfung führen wir an diesem Beispiel nun durch.

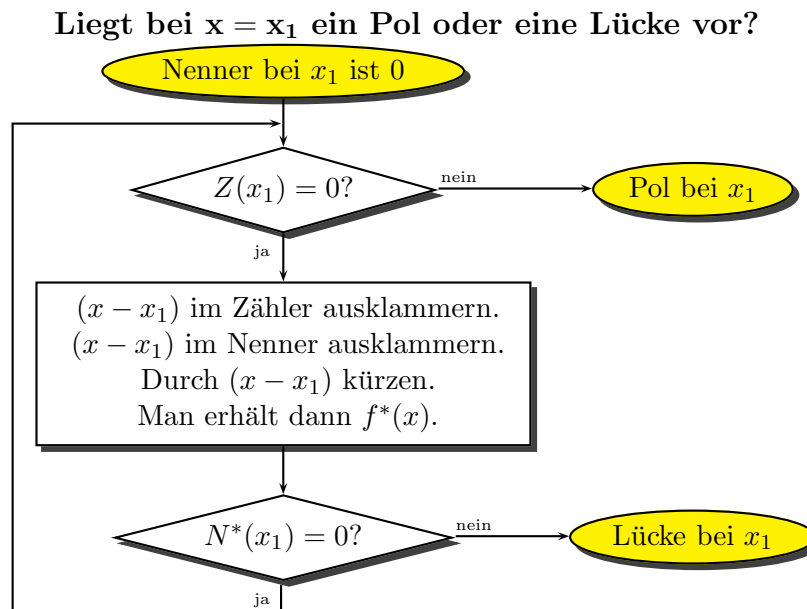
$$\begin{aligned} N^*(4) &= 4 - 2 \\ N^*(4) &= 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lücke bei } x_L = 4 \end{aligned}$$

Da eine Lücke durch einen konkreten Funktionswert geschlossen werden kann, können wir den berechnen. Die gekürzte Funktion $f^*(x_L)$ liefert diesen Wert.

$$\begin{aligned} y_L &= f^*(x_L) \\ &= \frac{4^2 + 4}{4 - 2} \\ &= \frac{20}{2} \\ y_L &= 10 \end{aligned}$$

Lücke bei $L(4|10)$

Zusammengefasst kann die Untersuchung nach folgendem Flussdiagramm vorgenommen werden:



Hierbei bedeutet $Z(x)$ den **Zähler** von $f(x)$ und $N(x)$ den **Nenner** von $f(x)$. Entsprechend bedeutet $N^*(x)$ den Nenner der **gekürzten** Funktion $f^*(x)$.

3 Asymptote

Eine andere Eigenschaft von Gebrochen Rationalen Funktionen ist die sogenannte Asymptote. Darunter versteht man eine Gerade oder eine Parabel, die sich dem Funktionsgraphen immer mehr annähert, je weiter man auf der x -Achse in Richtung $+\infty$ oder $-\infty$ geht.

Wie kann man die Funktionsgleichung der Asymptoten bestimmen? Dazu löst man die Funktionsgleichung auf, indem man so weit wie möglich eine Polynomdivision zwischen Zähler und Nenner durchführt. Das Divisionsergebnis stellt dann die Asymptotengleichung dar. Dabei bleibt natürlich ein „Rest“ übrig. Dieser wird für $x \rightarrow +\infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ dann sehr klein, er geht gegen Null. Für das genaue Verständniss dieses Zusammenhangs sind allerdings Kenntnisse über Grenzwerte erforderlich. Anschaulich kann man aber sagen, dass der Abstand zwischen dem Funktionsgraphen und der Asymptoten sehr klein wird, wenn man nur auf der x -Achse weit genug nach links oder rechts geht. Wir sehen uns das mal an dem Beispiel an.

$$\begin{array}{r} (x^3 \quad -3x^2 \quad -4x \quad) \\ -(x^3 \quad -6x^2 \quad +8x \quad) \\ \hline (3x^2 \quad -12x \quad) \\ -(3x^2 \quad -18x \quad +24) \\ \hline 6x \quad -24 \end{array} : (x^2 - 6x + 8) = x + 3$$

Schreibt man den „Rest“ korrekt auf, dann erhält man für die Funktion folgende Form:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8} = \underbrace{x + 3}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{6x - 24}{x^2 - 6x + 8}}_{\text{geht gegen 0}}$$

Das Divisionsergebnis stellt die Asymptote dar, der Restanteil mit dem Bruch geht gegen 0, wenn x sehr groß (stark positiv) oder sehr klein (stark negativ) wird. Das Ergebnis lautet also:

$$\text{Asymptote: } a(x) = x + 3$$

4 Übungsaufgaben

Bestimmen Sie den Definitionsbereich, Polstellen, Lücken und Achsenschnittpunkte sowie die Asymptote der nachfolgenden Funktionen:

4.1 Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 3}$$

4.2 Aufgabe 2

$$f(x) = \frac{(2x + 6) \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x + 8)}$$

4.3 Aufgabe 3

$$f(x) = \frac{(2x - 7) \cdot (x - 3)}{(x - 3)^2}$$

4.4 Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$$

4.5 Aufgabe 5

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 7x + 10}$$

4.6 Aufgabe 6

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

4.7 Aufgabe 7

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 3x + 2}$$

4.8 Aufgabe 8

$$f(x) = \frac{x^3 - 15x^2 + 74x - 120}{x^3 - 12x^2 + 47x - 60}$$

4.9 Aufgabe 9

$$f(x) = \frac{2x^3 + 8x^2 - 22x - 60}{x^2 - x - 6}$$

4.10 Aufgabe 10

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{x^2 + 2x - 15}$$

4.11 Aufgabe 11

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 5x + 6}$$

4.12 Aufgabe 12

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15}$$

4.13 Aufgabe 13

$$f(x) = \frac{2x^3 - 18x^2 + 48x - 40}{x^2 - 6x + 8}$$

4.14 Aufgabe 14

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - 32x - 40}{x^2 - 2x - 8}$$

5 Ergebnisse

Die Bedeutungen der Symbole:

D : Definitionsbereich

x_p : Polstelle

x_0 : Nullstelle

y_0 : y -Achsenabschnitt

L : Lücke mit $L(x_L|y_L)$

$a(x)$: Asymptote

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $x_p = 3$; $x_0 = -3$; $y_0 = -1$; keine Lücke ; $a(x) = 1$
2. $D = \mathbb{R} \setminus \{-8; 2\}$; $x_p = -8$; $x_0 = -3$; $y_0 = \frac{3}{4}$; $L(2|1)$; $a(x) = 2$
3. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $x_p = 3$; $y_0 = \frac{7}{3}$; $x_0 = 3, 5$; keine Lücke ; $a(x) = 2$
4. $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$; $x_p = 4$; $x_0 = 3$; $y_0 = \frac{3}{4}$; $L(2|\frac{1}{2})$; $a(x) = 1$
5. $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$; $x_p = 5$; keine Nullstelle ; $y_0 = \frac{2}{5}$; $L(2|0)$; $a(x) = 1$
6. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $x_p = -2$; $x_0 = 2$; $y_0 = -1$; keine Lücke ; $a(x) = 1$
7. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$; $x_p = 1$; keine Nullstelle ; $y_0 = -1$; $L(-2|-\frac{1}{3})$; $a(x) = 0$
8. $D = \mathbb{R} \setminus \{3; 4; 5\}$; $x_p = 3$; $x_0 = 6$; $y_0 = 2$; $L_1(4|-2)$; $L_2(5|-\frac{1}{2})$; $a(x) = 1$
9. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$; keine Polstelle ; $x_0 = -5$; $y_0 = 10$; $L_1(-2|6)$; $L_2(3|16)$;
 $a(x) = 2x + 10$
10. $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 3\}$; $x_{p1} = -5$; $x_{p2} = 3$; $x_{01} = 1$; $x_{02} = 2$; $x_{03} = 4$; $y_0 = \frac{8}{15}$; keine
Lücke ; $a(x) = x - 9$
11. $D = \mathbb{R} \setminus \{3; 3\}$; $x_p = 2$; $L(3|8)$; $x_0 = -5$; $y_0 = -2,5$; $a(x) = 1$
12. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 5\}$; $x_p = 5$; $L(-3|0,875)$; $x_0 = 4$; $y_0 = 0,8$; $a(x) = 1$
13. $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$; $x_p = 4$; $L(2|0)$; $x_0 = 5$; $y_0 = -5$; $a(x) = 2x - 6$
14. $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$; $x_p = 4$; $L(-2|0)$; $x_0 = 5$; $y_0 = 5$; $a(x) = 2x + 2$

6 Durchgerechnete Musterlösungen

6.1 Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet:

$$\begin{aligned}x_n - 3 &= 0 \\x_n &= 3\end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Untersuchung für $x = 3$:

$$Z(3) = 3 + 3 = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x_p = 3$$

Die **Nullstellen** werden berechnet, indem man den **Zähler** der Funktion gleich Null setzt.

$$Z(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -3$$

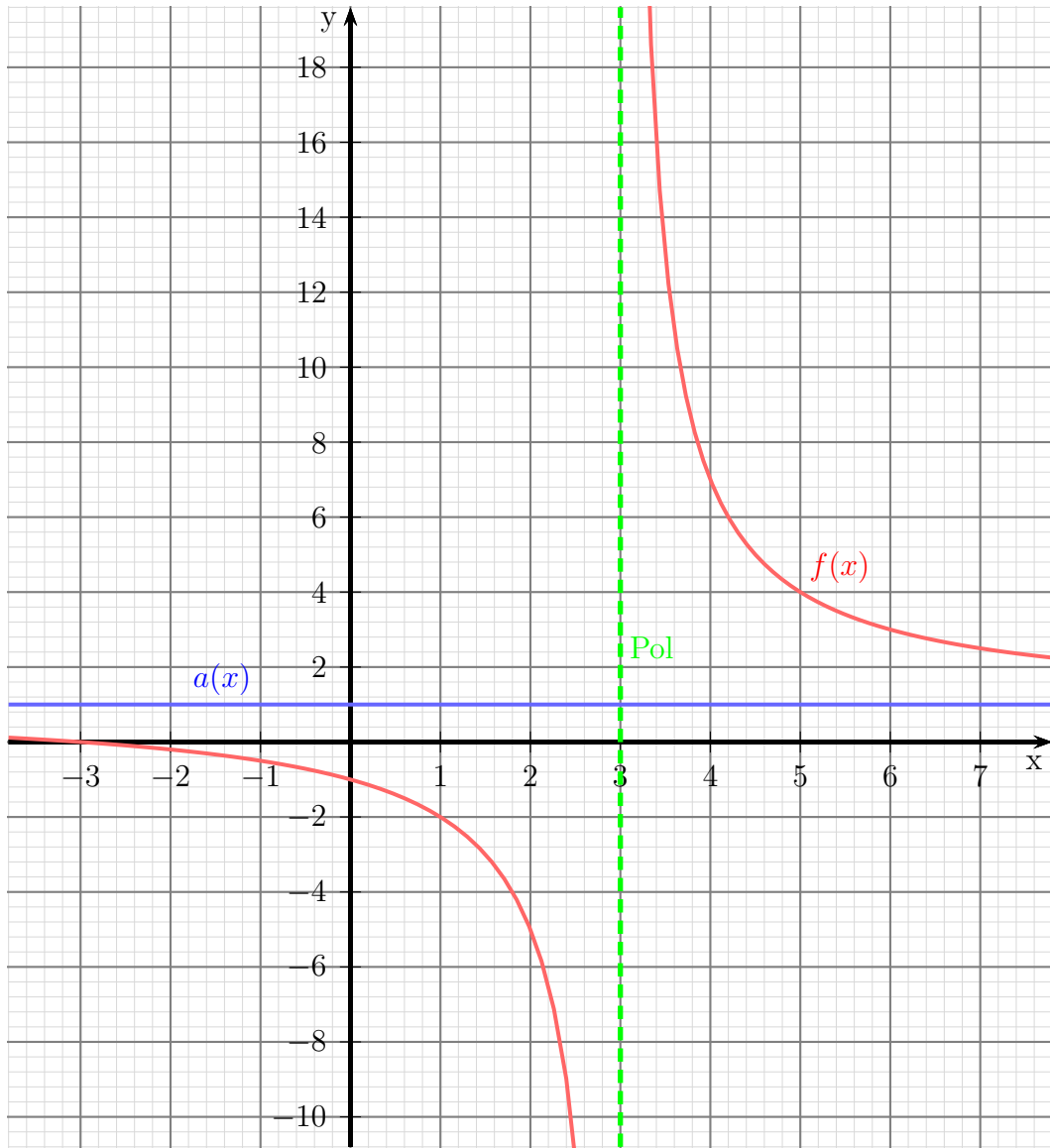
Der y -Achsenabschnitt wird bestimmt, indem man in die Funktion für x die 0 einsetzt.

$$y_0 = f(0) = \frac{0+3}{0-3} = -1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = -1$$

Die **Asymptotengleichung** wird bestimmt, indem man die Division entsprechend der Funktionsgleichung durchführt und den „Rest“ weglässt.

$$\begin{array}{r} (x+3) : (x-3) = 1 + \frac{6}{x-3} \\ \underline{-(x-3)} \\ 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Die Asymptotengleichung lautet: } a(x) = 1$$



6.2 Aufgabe 2

$$f(x) = \frac{(2x + 6) \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x + 8)}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet.

Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren = 0 ist.

$$\begin{array}{lcl} x_1 - 2 = 0 & \vee & x_2 + 8 = 0 \\ x_1 = 2 & \vee & x_2 = -8 \end{array}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-8; 2\}$$

Untersuchung für $x_1 = 2$:

$$Z(2) = (2 \cdot 2 + 6) \cdot (2 - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Durch } (x - 2) \text{ kürzen!}$$

$$f(x) = \frac{(2x + 6) \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x + 8)}$$

$$f^*(x) = \frac{2x + 6}{x + 8}$$

Ist der neue Nenner = 0?

$$N^*(2) = 2 + 8 = 10 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lücke bei } x_1 = 2$$

$$y_L = f^*(x_1) = \frac{2 \cdot 2 + 6}{2 + 8} = 1$$

$$\text{Lücke bei } L(2|1)$$

Untersuchung für $x_2 = -8$:

$$Z(-8) = (2 \cdot (-8) + 6) \cdot (-8 - 2) = 100 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x_2 = -8$$

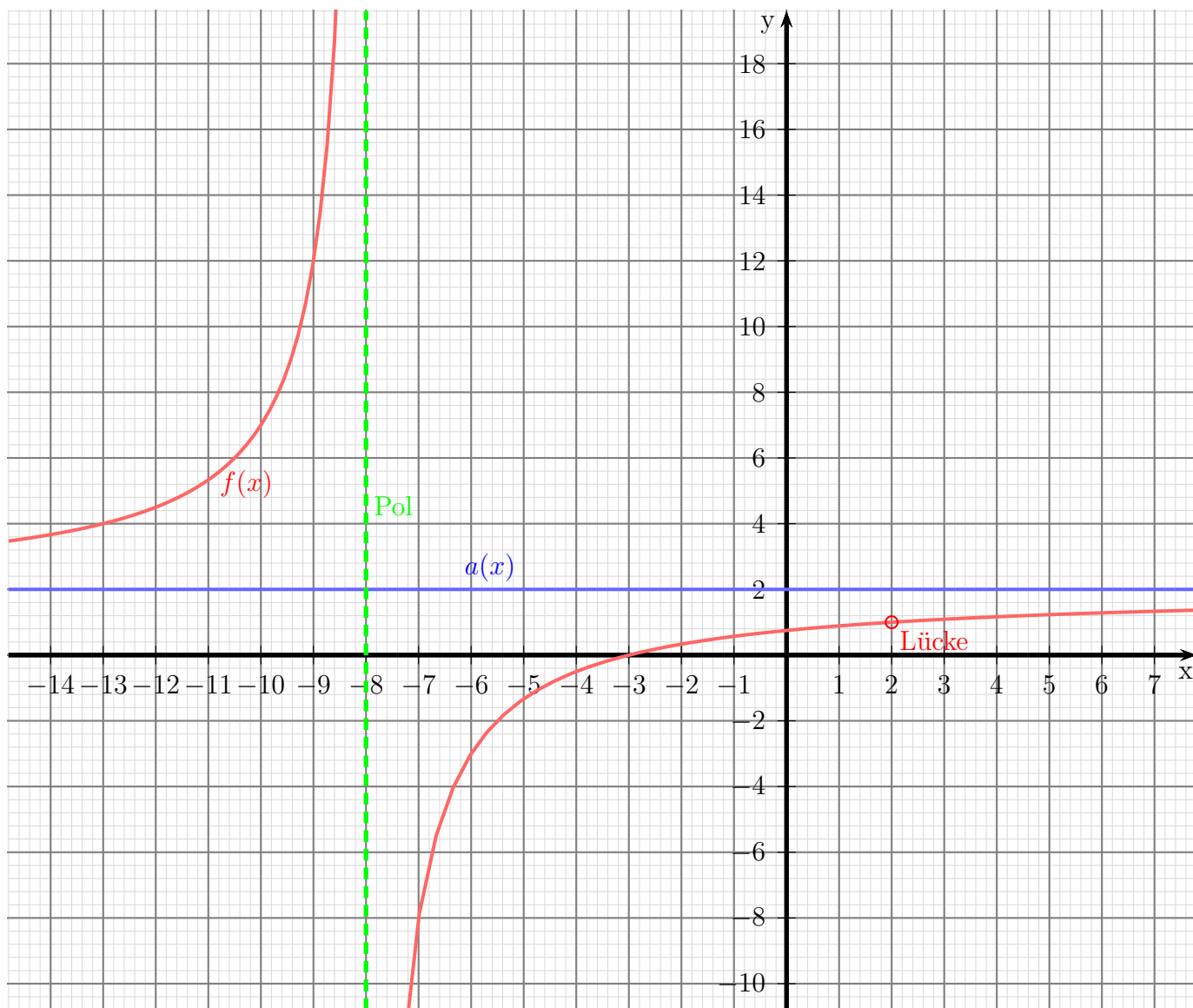
Die **Nullstellen** werden berechnet, indem man den **Zähler** der Funktion gleich Null setzt. Dabei kann auch die vereinfachte Funktion $f^*(x)$ verwendet werden.

$$Z^*(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 = -6 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -3$$

Die **Asymptotengleichung** wird bestimmt, indem man die Division entsprechend der Funktionsgleichung durchführt und den „Rest“ weglässt. Dabei darf auch die einfachere Funktion $f^*(x)$ anstelle von $f(x)$ verwendet werden.

$$\begin{array}{r} (2x + 6) : (x + 8) = 2 - \frac{10}{x+8} \\ \underline{-(2x + 16)} \\ -10 \end{array}$$

⇒ Die Asymptotengleichung lautet: $a(x) = 2$



6.3 Aufgabe 3

$$f(x) = \frac{(2x - 7) \cdot (x - 3)}{(x - 3)^2}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet.

$$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Untersuchung für $x = 3$:

$$Z(3) = (2 \cdot 3 - 7) \cdot (3 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Durch } (x - 3) \text{ kürzen!}$$

$$f(x) = \frac{(2x - 7) \cdot (x - 3)}{(x - 3)^2}$$

$$f^*(x) = \frac{(2x - 7)}{(x - 3)}$$

$$N^*(3) = 3 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Neuen Zähler prüfen!}$$

$$Z^*(3) = 2 \cdot 3 - 7 = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x = 3$$

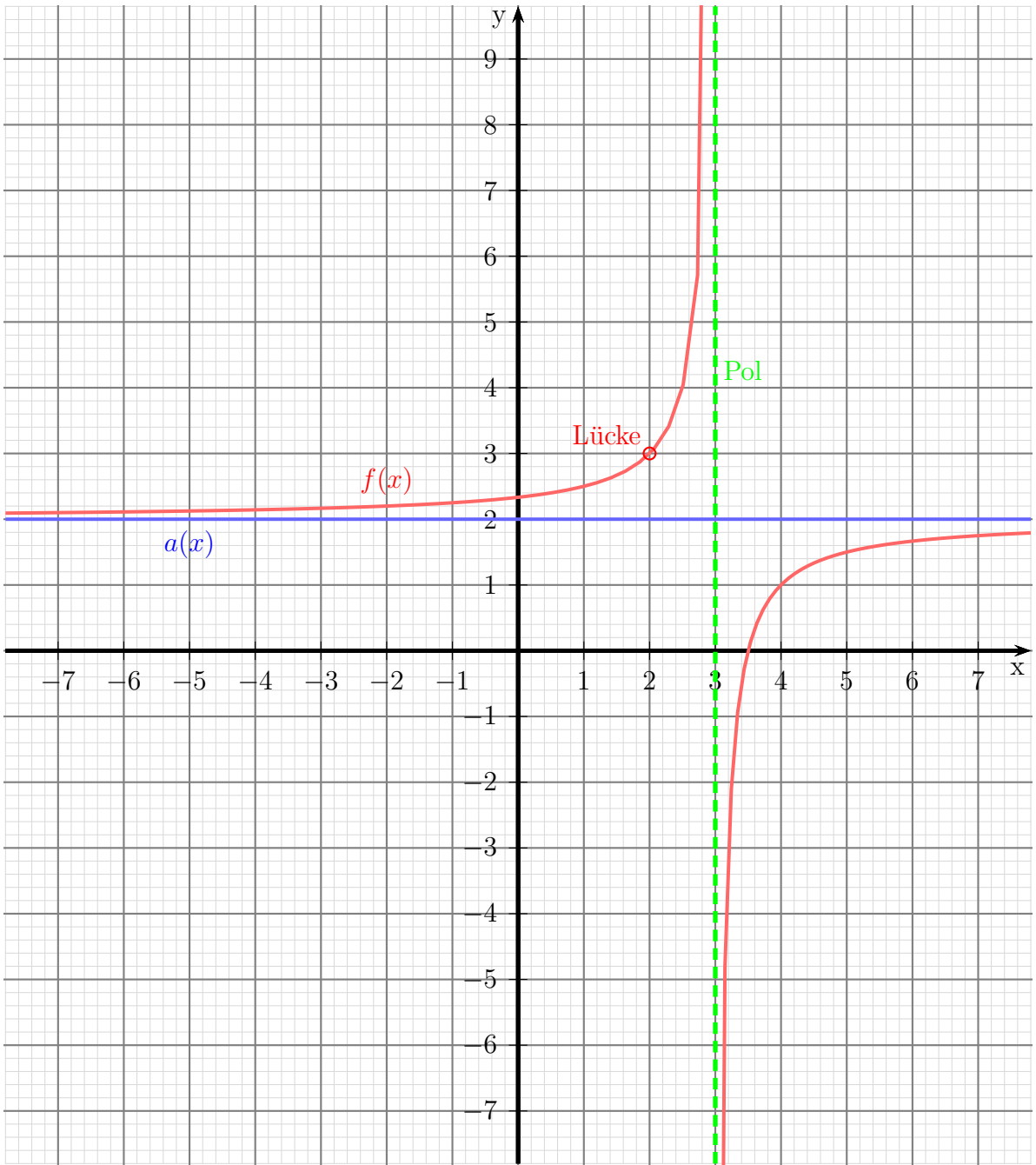
Die **Nullstellen** werden berechnet, indem man den **Zähler** der Funktion gleich Null setzt. Dabei kann auch die vereinfachte Funktion $f^*(x)$ verwendet werden.

$$Z^*(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_0 = 7 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 3,5$$

Die **Asymptotengleichung** wird bestimmt, indem man die Division entsprechend der Funktionsgleichung durchführt und den „Rest“ weglässt. Dabei darf auch die einfachere Funktion $f^*(x)$ anstelle von $f(x)$ verwendet werden.

$$\begin{array}{r} (2x - 7) : (x - 3) = 2 - \frac{1}{x-3} \\ \underline{-(2x - 6)} \\ -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Die Asymptotengleichung lautet: } a(x) = 2$$



6.4 Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad | \text{ p-q-Formel anwenden}$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$$

$$x_{1/2} = 3 \pm 1$$

$$x_1 = 3 + 1 = 4$$

$$x_2 = 3 - 1 = 2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$$

Untersuchung für $x_1 = 4$:

$$Z(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x_1 = 4$$

Untersuchung für $x_2 = 2$:

$$Z(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 2) \text{ ausklammern, kürzen}$$

$$\begin{array}{r} \text{Zunächst der Zähler: } (x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x - 3 \\ \underline{-(x^2 - 2x)} \\ -3x + 6 \\ \underline{-(-3x + 6)} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Dann der Nenner: } (x^2 - 6x + 8) : (x - 2) = x - 4 \\ \underline{-(x^2 - 2x)} \\ -4x + 8 \\ \underline{-(-4x + 8)} \\ 0 \end{array}$$

Hiermit können wir die Funktion in faktorisierte Form schreiben und kürzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - 2) \cdot (x - 3)}{(x - 2) \cdot (x - 4)} \quad | \text{ Kürzen} \\ f^*(x) &= \frac{x - 3}{x - 4} \end{aligned}$$

Die neue Funktion $f^*(x)$ stimmt **innerhalb** des Definitionsbereiches mit der gegebenen Funktion $f(x)$ überein, hat aber einen erweiterten Definitionsbereich. Ich prüfe, ob der neue Nenner bei $x_2 = 2$ auch $= 0$ ist oder nicht.

$$N^*(2) = 2 - 4 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lücke bei } x_2 = 2$$

$$y_L = f^*(2) = \frac{2-3}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad L(2|0,5)$$

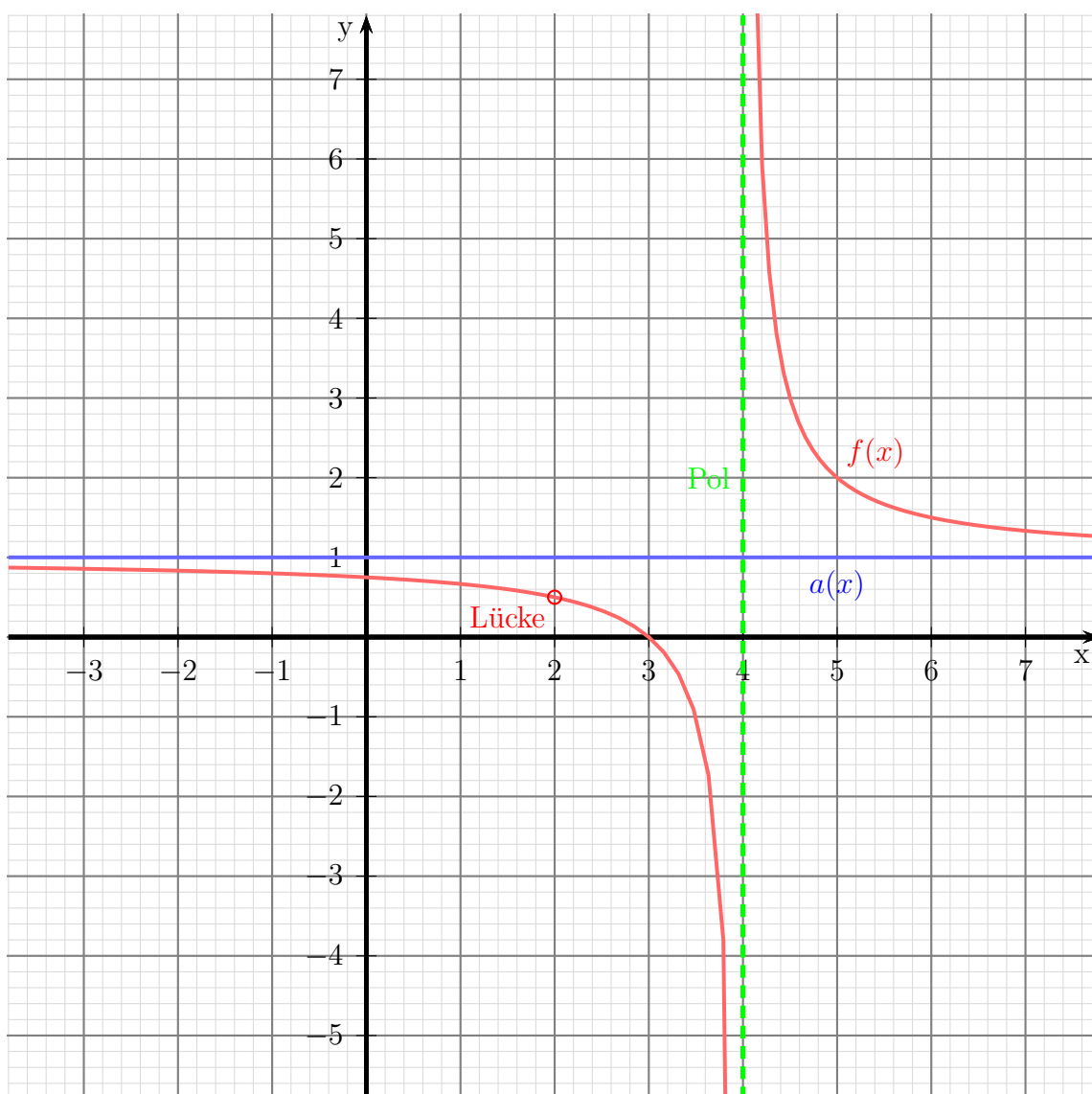
Die **Nullstellen** werden berechnet, indem man den **Zähler** der Funktion gleich Null setzt. Dabei kann auch die vereinfachte Funktion $f^*(x)$ verwendet werden.

$$Z^*(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = 3$$

Die **Asymptotengleichung** wird bestimmt, indem man die Division entsprechend der Funktionsgleichung durchführt und den „Rest“ weglässt. Dabei darf auch die einfachere Funktion $f^*(x)$ anstelle von $f(x)$ verwendet werden.

$$\begin{array}{r} (x - 3) : (x - 4) = 1 + \frac{1}{x-4} \\ \underline{-(x - 4)} \\ 1 \end{array}$$

⇒ Die Asymptotengleichung lautet: $a(x) = 1$



6.5 Aufgabe 5

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 7x + 10}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad | \text{ p-q-Formel anwenden}$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}}$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$$

Untersuchung für $x_1 = 5$:

$$Z(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 4 = 9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x_1 = 5$$

Untersuchung für $x_2 = 2$:

$$Z(4) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 2) \text{ ausklammern, kürzen}$$

Klammert man im Zähler und Nenner $(x - 2)$ aus, erhält man:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x - 2)^2}{(x - 2)(x - 5)}$$

$$f^*(x) = \frac{x - 2}{x - 5}$$

$$N^*(2) = 2 - 5 = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lücke bei } x_2 = 2$$

$$y_L = f^*(2) = \frac{2-2}{2-5} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad L(2|0)$$

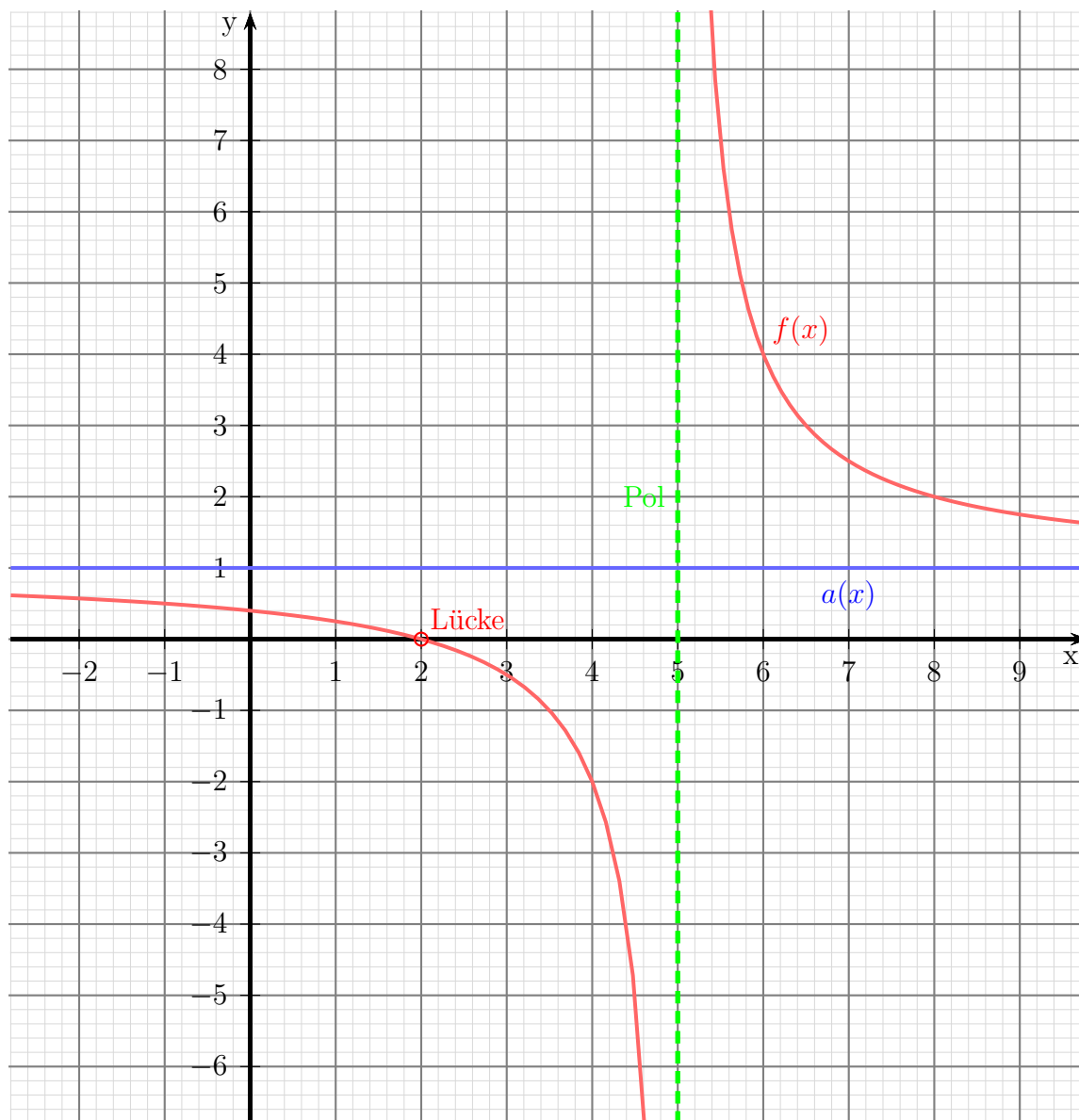
Die **Nullstellen** werden berechnet, indem man den **Zähler** der Funktion gleich Null setzt. Dabei kann auch die vereinfachte Funktion $f^*(x)$ verwendet werden.

$$Z^*(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2$$

Die **Asymptotengleichung** wird bestimmt, indem man die Division entsprechend der Funktionsgleichung durchführt und den „Rest“ weglässt. Dabei darf auch die einfachere Funktion $f^*(x)$ anstelle von $f(x)$ verwendet werden.

$$\begin{array}{r} (x - 2) : (x - 5) = 1 + \frac{3}{x-5} \\ \underline{-(x - 5)} \\ 3 \end{array}$$

⇒ Die Asymptotengleichung lautet: $a(x) = 1$



6.6 Aufgabe 6

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet.

$$\begin{aligned}x^2 + 4x + 4 &= 0 && | \text{ p-q-Formel anwenden} \\x_{1/2} &= -2 \pm \sqrt{4 - 4} \\x_{1/2} &= -2 \pm 0 \\x &= -2\end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Untersuchung für $x = -2$:

$$Z(-2) = (-2)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 2) \text{ ausklammern, kürzen}$$

Klammert man im Zähler und Nenner $(x + 2)$ aus, erhält man:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{(x + 2)^2} \\f^*(x) &= \frac{x - 2}{x + 2} \\N^*(-2) &= -2 + 2 = 0 \\Z^*(-2) &= -2 - 2 = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\text{Polstelle bei } x = -2$$

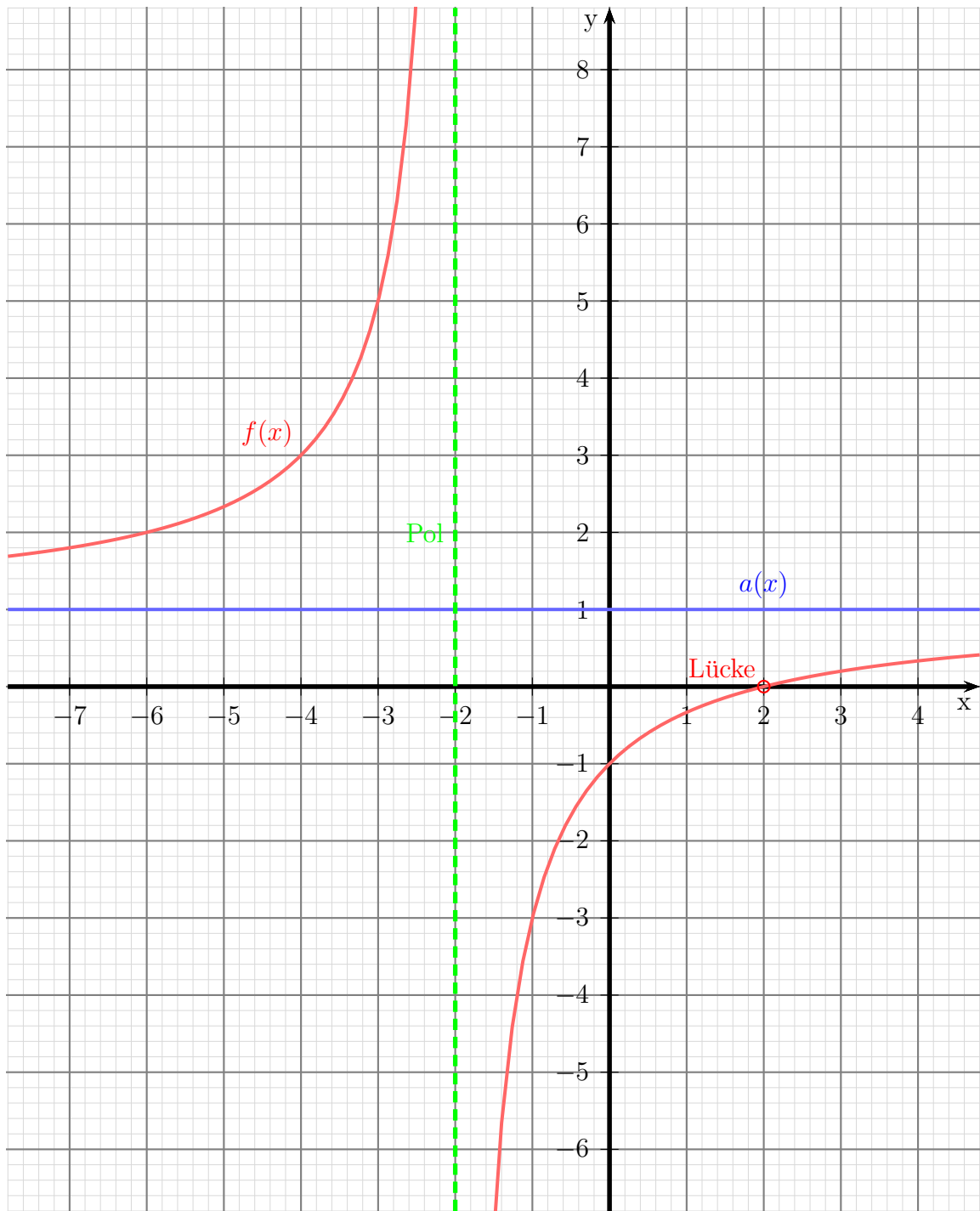
Die **Nullstellen** werden berechnet, indem man den **Zähler** der Funktion gleich Null setzt. Dabei kann auch die vereinfachte Funktion $f^*(x)$ verwendet werden.

$$Z^*(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2$$

Zur Bestimmung der Asymptote kann ebenfalls $f^*(x)$ anstelle von $f(x)$ verwendet werden.

$$\frac{(x - 2) : (x + 2) = 1 - \frac{4}{x+2}}{-4}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Die Asymptotengleichung lautet: } a(x) = 1$$



6.7 Aufgabe 7

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 3x + 2}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet. Leider ist der Nenner ein Polynom 3. Grades. Dessen Nullstellen können nicht analytisch berechnet werden. Durch **planvolles** Raten erhalte ich die Nennernullstelle:

$$x_1 = 1$$

Im Nenner kann $(x - x_1)$ – hier also $(x - 1)$ – ausgeklammert werden. Wir lösen das mit einer **Polynomdivision**.

$$\begin{array}{r} (x^3 \quad -3x \quad +2) \quad : \quad (x - 1) = x^2 + x - 2 \\ -(x^3 \quad -x^2) \\ \hline \quad \quad x^2 \quad -3x \quad +2 \\ \quad - \quad (x^2 \quad -x) \\ \hline \quad \quad \quad -2x \quad +2 \\ \quad \quad - \quad (-2x \quad +2) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Der Nenner lässt sich also wie folgt faktorisieren:

$$x^3 - 3x + 2 = (x^2 + x - 2) \cdot (x - 1)$$

Die Nullstellen des Nenners werden bestimmt.

$$(x^2 + x - 2) \cdot (x - 1) = 0$$

Ein Produkt ist bekanntlich 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Der rechte Faktor hat bereits die Lösung $x_1 = 1$ geliefert, also muss nur noch der linke Term untersucht werden.

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0 \\ x_{2/3} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ x_{2/3} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_2 = 1 \quad x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$$

Untersuchung für $x_1 = 1$:

$$Z(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow (x - 1) \text{ ausklammern, kürzen}$$

Klammert man im Zähler und Nenner $(x - 1)$ aus, erhält man:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x + 2) \cdot (x - 1)}{(x^2 + x - 2) \cdot (x - 1)} \\ f^*(x) &= \frac{x + 2}{x^2 + x - 2} \\ N^*(1) &= 1^2 + 1 - 2 = 0 \\ Z^*(1) &= 1 + 2 \neq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Polstelle bei: $x_1 = 1$

Untersuchung für $x_2 = -2$:

$$Z^*(-2) = -2 + 2 = 0 \Rightarrow (x + 2) \text{ ausklammern, kürzen}$$

Der Nenner kann noch weiter faktorisiert werden. Es sollte auffallen, dass der gekürzte Nenner mit dem ursprünglichen Zähler übereinstimmt. Daher kann die Zerlegung gleich übernommen werden.

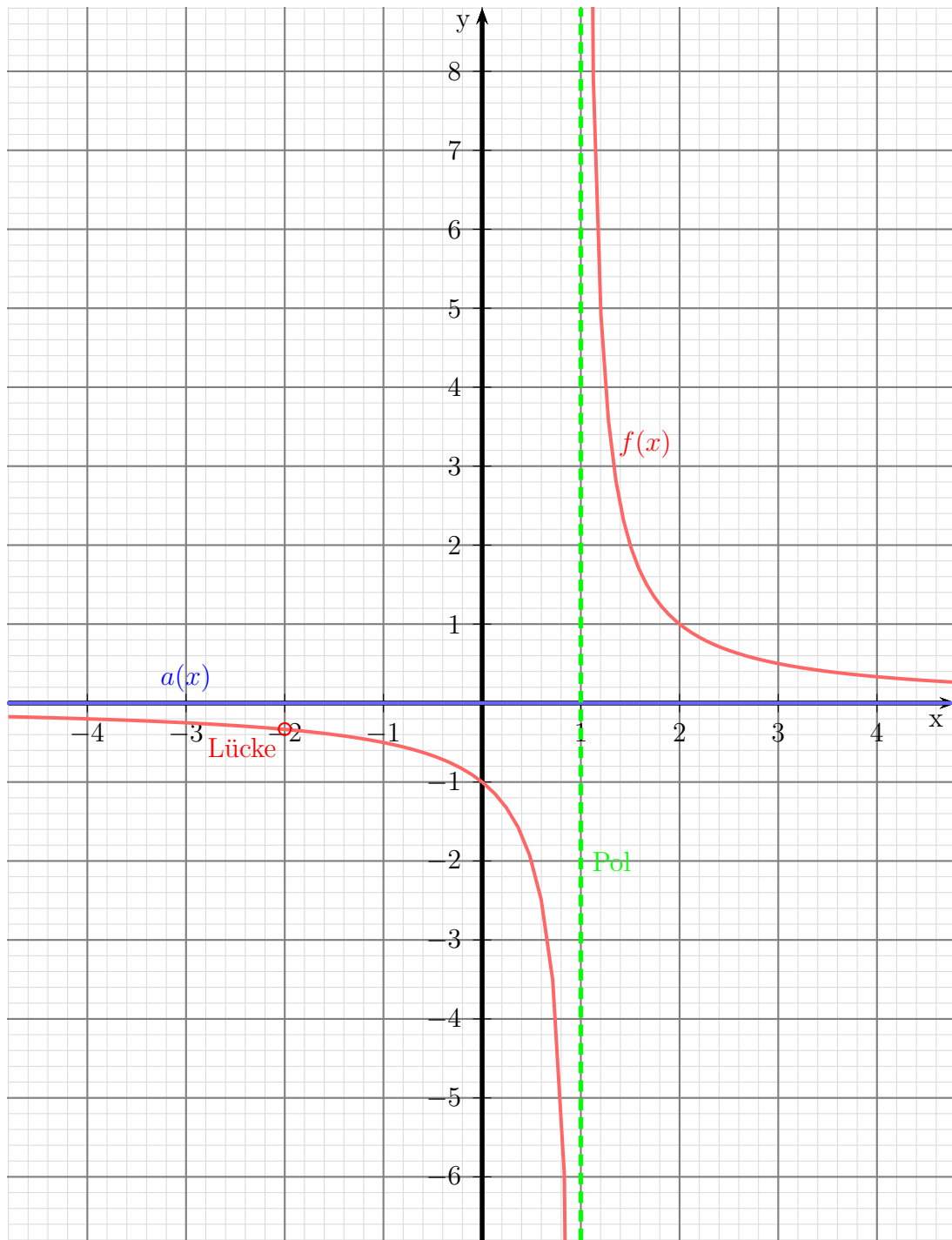
$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{x + 2}{x^2 + x - 2} = \frac{x + 2}{(x + 2) \cdot (x - 1)} \\ f^{**}(x) &= \frac{1}{x - 1} \\ N^{**}(-2) &= -2 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Lücke bei } x_2 = -2 \\ y_L &= f^{**}(-2) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Zusammengefasst: $L(-2 | -\frac{1}{3})$

Die **Nullstellen** werden berechnet, indem man den **Zähler** der Funktion gleich Null setzt. Dabei kann auch die vereinfachte Funktion $f^{**}(x)$ verwendet werden. Da der Zähler hier kein x enthält, er also nie Null werden kann, gibt es **keine Nullstelle**.

Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner, als der Grad des Nennerpolynoms. Daher lautet die Asymptote:

$$a(x) = 0$$



6.8 Aufgabe 8

$$f(x) = \frac{x^3 - 15x^2 + 74x - 120}{x^3 - 12x^2 + 47x - 60}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet. Leider ist der Nenner ein Polynom 3. Grades. Dessen Nullstellen können nicht analytisch berechnet werden. Durch **planvolles** Raten erhalte ich die Nennernullstelle:

$$x_1 = 3$$

Im Nenner kann $(x - x_1)$ – hier also $(x - 3)$ – ausgeklammert werden. Wir lösen das mit einer **Polynomdivision**.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 12x^2 + 47x - 60) : (x - 3) = x^2 - 9x + 20 \\ -(x^3 - 3x^2) \\ \hline -9x^2 + 47x - 60 \\ - (-9x^2 + 27x) \\ \hline 20x - 60 \\ - (20x - 60) \\ \hline 0 \end{array}$$

Der Nenner lässt sich also wie folgt faktorisieren:

$$N(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = (x - 3) \cdot (x^2 - 9x + 20)$$

Die Nullstellen des Nenners werden bestimmt.

$$(x - 3) \cdot (x^2 - 9x + 20) = 0$$

Ein Produkt ist bekanntlich 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Der linke Faktor hat bereits die Lösung $x_1 = 3$ geliefert, also muss nur noch der rechte Term untersucht werden.

$$\begin{aligned} x^2 - 9x + 20 &= 0 \\ x_{2/3} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 20} \\ &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{80}{4}} \\ &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ x_{2/3} &= \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_2 = 4 & \quad x_3 = 5 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3; 4; 5\}$$

Untersuchung für $x_1 = 3$:

$$Z(3) = 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 74 \cdot 3 - 120 = -6 \Rightarrow \text{Polstelle bei } x_1 = 3$$

Untersuchung für $x_2 = 4$:

$$Z(4) = 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 74 \cdot 4 - 120 = 0 \Rightarrow (x - 4) \text{ ausklammern, kürzen}$$

Der Faktor $(x - 4)$ muss also im Zähler enthalten sein. Ich kann ihn durch eine Polynomdivision zerlegen.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 15x^2 + 74x - 120) : (x - 4) = x^2 - 11x + 30 \\ -(x^3 - 4x^2) \\ \hline -11x^2 + 74x - 120 \\ - (-11x^2 + 44x) \\ \hline 30x - 120 \\ - (30x - 120) \\ \hline 0 \end{array}$$

Hiermit kann der Zähler wie folgt zerlegt werden:

$$Z(x) = x^3 - 15x^2 + 74x - 120 = (x - 4) \cdot (x^2 - 11x + 30)$$

Auch im Nenner kann man $(x - 4)$ ausklammern. Ich verwende dazu schon den teilweise zerlegten Nenner.

$$\begin{array}{r} (x^2 - 9x + 20) : (x - 4) = x - 5 \\ -(x^2 - 4x) \\ \hline -5x + 20 \\ - (-5x + 20) \\ \hline 0 \end{array}$$

Hiermit sieht die komplette Nennerzerlegung so aus:

$$N(x) = (x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x - 5)$$

Hiermit kann ich $f(x)$ wie folgt zerlegen und anschließend durch $(x - 4)$ kürzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 15x^2 + 74x - 120}{x^3 - 12x^2 + 47x - 60} = \frac{(x - 4) \cdot (x^2 - 11x + 30)}{(x - 3) \cdot (x - 4) \cdot (x - 5)} \\ f^*(x) &= \frac{x^2 - 11x + 30}{(x - 3) \cdot (x - 5)} \end{aligned}$$

Ich untersuche den neuen Nenner an dieser Stelle.

$$N^*(4) = (4 - 3) \cdot (4 - 5) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Lücke bei } x_2 = 4$$

$$y_{L1} = f^*(4) = \frac{4^2 - 11 \cdot 4 + 30}{(4 - 3) \cdot (4 - 5)} = -2$$

Ergebnis: $L_1(4 | -2)$

Untersuchung für $x_3 = 5$:

$$Z^*(5) = 5^2 - 11 \cdot 5 + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 5) \text{ ausklammern, kürzen}$$

Ich zerlege den Zähler Z^* mit einer Polynomdivision.

$$\begin{array}{r} (x^2 - 11x + 30) : (x - 5) = x - 6 \\ -(x^2 - 5x) \\ \hline -6x + 30 \\ -(-6x + 30) \\ \hline 0 \end{array}$$

Damit lautet $f^*(x)$ in der zerlegten Form wie folgt:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{x^2 - 11x + 30}{(x - 3) \cdot (x - 5)} = \frac{(x - 5) \cdot (x - 6)}{(x - 3) \cdot (x - 5)} \\ f^{**}(x) &= \frac{x - 6}{x - 3} \end{aligned}$$

Ich prüfe den neuen Nenner bei $x_3 = 5$.

$$N^{**}(5) = 5 - 3 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lücke bei } x_3 = 5$$

$$y_{L2} = f^{**}(5) = \frac{5 - 6}{5 - 3} = -0,5$$

Ergebnis: $L_2(5 | -0,5)$

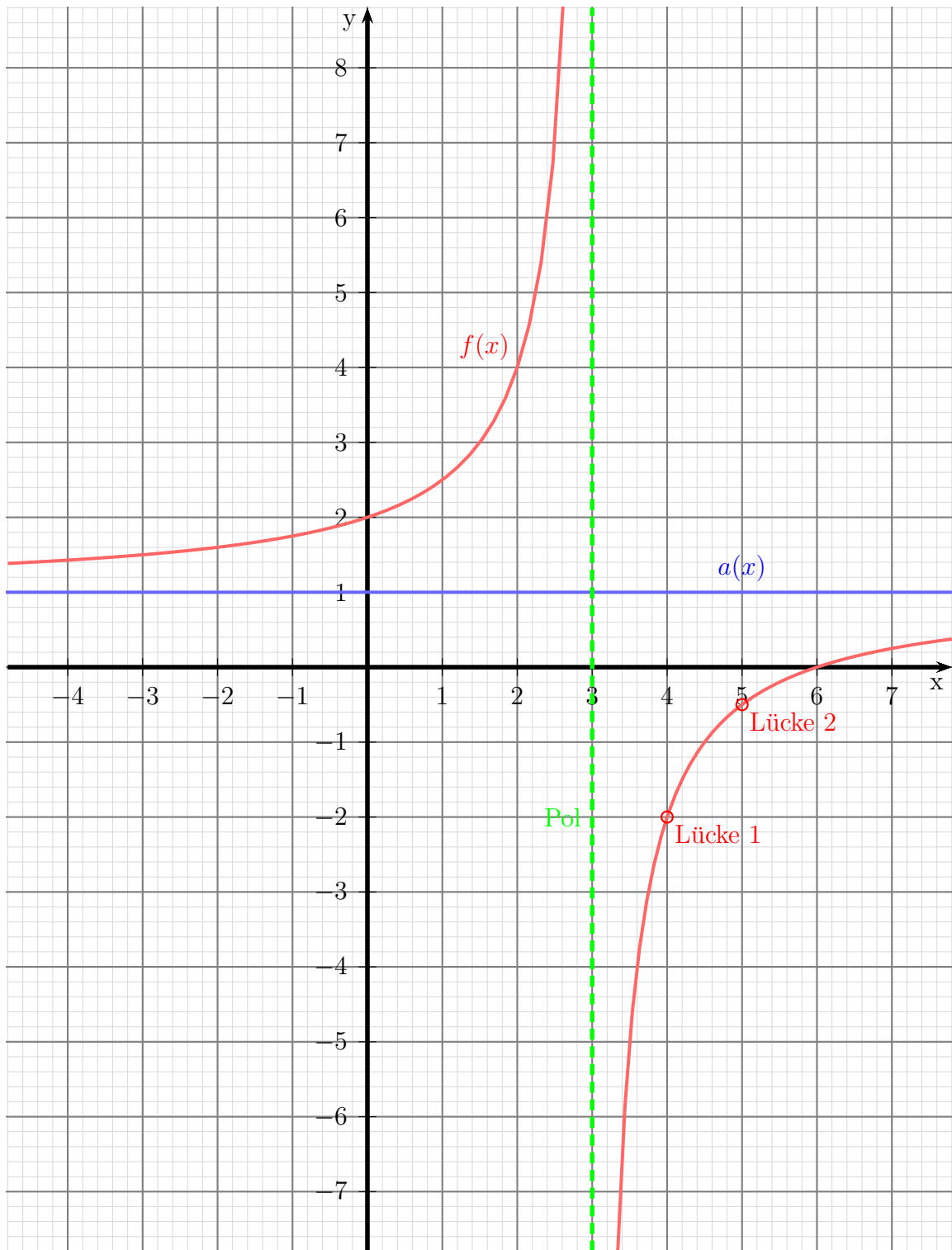
Zur **Nullstellenbestimmung** wird der **Zähler** gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned} Z^{**}(x_0) &= 0 \\ x_0 - 6 &= 0 \\ x_0 &= 6 \end{aligned}$$

Die **Asymptotengleichung** wird bestimmt, indem man die Division entsprechend der Funktionsgleichung durchführt und den „Rest“ weglässt. Dazu kann auch die vereinfachte Funktionsgleichung verwendet werden.

$$\begin{array}{r} (x - 6) : (x - 3) = 1 + \frac{-3}{x-3} \\ -(x - 3) \\ \hline -3 \end{array}$$

\Rightarrow Die Asymptotengleichung lautet: $a(x) = 1$



6.9 Aufgabe 9

$$f(x) = \frac{2x^3 + 8x^2 - 22x - 60}{x^2 - x - 6}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= 0 \\ x_{1/2} &= -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\ x_1 &= -2 & x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$$

Untersuchung für $x_1 = -2$:

$$Z(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 8 \cdot (-2)^2 - 22 \cdot (-2) - 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 2) \text{ ausklammern, kürzen}$$

Der Faktor $(x + 2)$ muss also im Zähler enthalten sein. Ich kann ihn durch eine Polynomdivision zerlegen.

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 8x^2 - 22x - 60) : (x + 2) = 2x^2 + 4x - 30 \\ -(2x^3 + 4x^2) \\ \hline 4x^2 - 22x - 60 \\ - (4x^2 + 8x) \\ \hline -30x - 60 \\ - (-30x - 60) \\ \hline 0 \end{array}$$

Hiermit kann der Zähler wie folgt zerlegt werden:

$$Z(x) = 2x^3 + 8x^2 - 22x - 60 = (x + 2) \cdot (2x^2 + 4x - 30)$$

Auch im Nenner kann man $(x + 2)$ ausklammern. Nach dem Satz von Vieta erhalte ich aus den beiden bekannten Nennernullstellen:

$$Z(x) = x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Hiermit kann ich $f(x)$ wie folgt zerlegen und anschließend durch $(x - 4)$ kürzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^3 + 8x^2 - 22x - 60}{x^2 - x - 6} = \frac{(x + 2) \cdot (2x^2 + 4x - 30)}{(x + 2) \cdot (x - 3)} \\ f^*(x) &= \frac{2x^2 + 4x - 30}{x - 3} \end{aligned}$$

Ich untersuche den neuen Nenner an dieser Stelle.

$$N^*(-2) = -2 - 3 = -5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lücke bei } x_1 = -2$$

$$y_{L1} = f^*(-2) = \frac{2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 30}{-2 - 3} = 6$$

Ergebnis: $L_1(-2|6)$

Untersuchung für $x_2 = 3$:

$$Z^*(3) = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 3) \text{ ausklammern, kürzen}$$

Der Faktor $(x - 3)$ muss also im Zähler enthalten sein. Ich kann ihn durch eine Polynomdivision zerlegen.

$$\begin{array}{r} (2x^2 + 4x - 30) : (x - 3) = 2x + 10 \\ -(2x^2 - 6x) \\ \hline 10x - 30 \\ - (10x - 30) \\ \hline 0 \end{array}$$

Hiermit kann der Zähler wie folgt zerlegt werden:

$$Z^*(x) = 2x^2 + 4x - 30 = (x - 3) \cdot (2x + 10)$$

Die Funktion $f^*(x)$ kann damit erneut gekürzt werden:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{2x^2 + 4x - 30}{x - 3} = \frac{(x - 3) \cdot (2x + 10)}{x - 3} \\ f^{**}(x) &= \frac{2x + 10}{1} = 2x + 10 \end{aligned}$$

Ohne Rechnung ist der neue Nenner $N^{**}(3) \neq 0$, es liegt also bei $x_2 = 3$ eine weitere Lücke vor.

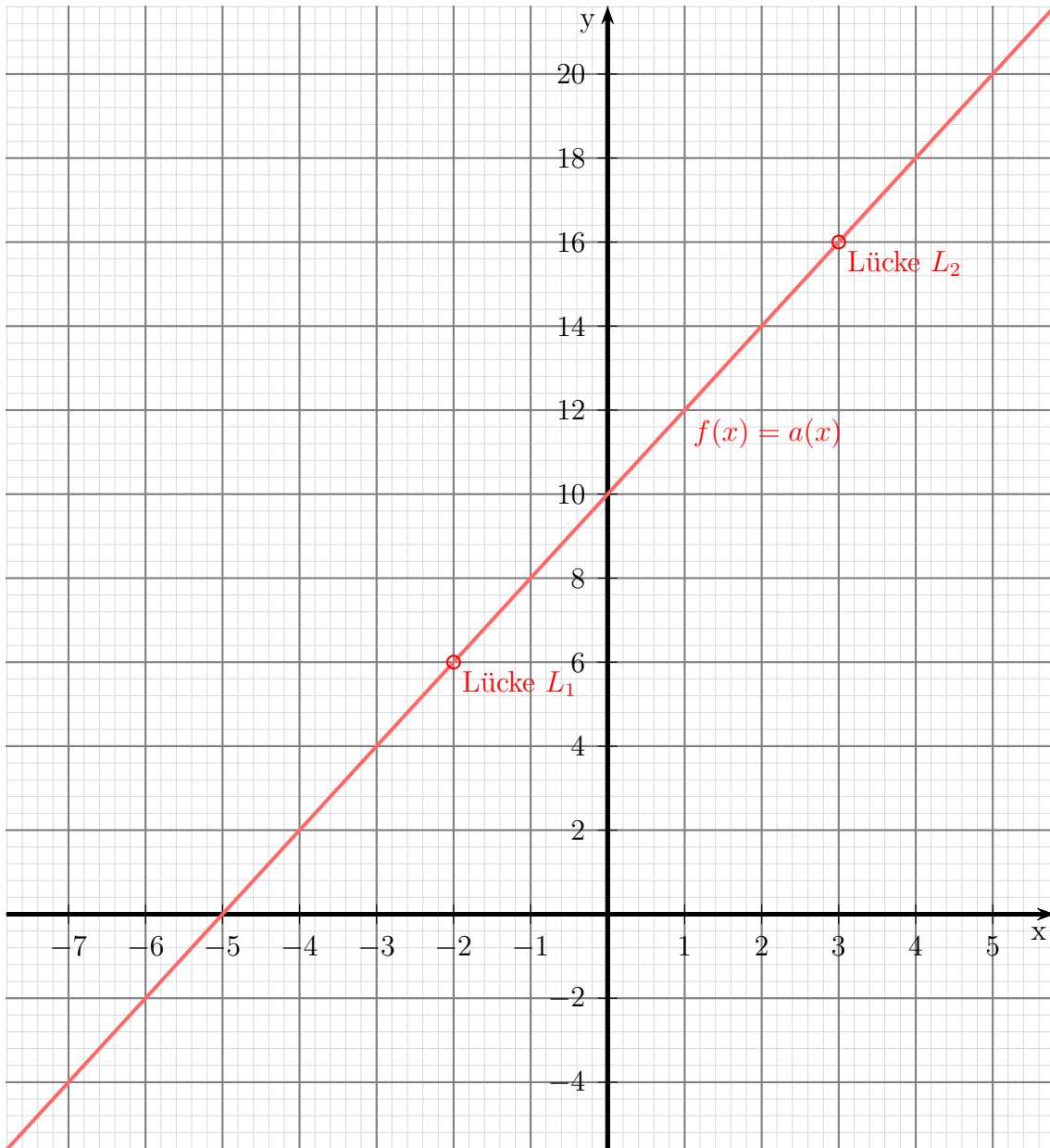
$$y_{L2} = f^{**}(3) = 2 \cdot 3 + 10 = 16$$

Ergebnis: $L_2(3|16)$

Zur Nullstellenbestimmung kann $f^{**}(x)$ verwendet werden.

$$\begin{aligned} 2x_0 + 10 &= 0 \\ 2x_0 &= -10 \\ x_0 &= -5 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Asymptote wird bekanntlich der Zähler durch den Nenner dividiert. Verwende ich dafür $f^{**}(x)$, was erlaubt ist, dann wird die Division ganz einfach, ich dividiere ja durch 1. Es bleibt kein Rest. Die Asymptotengleichung ist dann identisch mit $f^{**}(x)$. Ich erhalte die Asymptotengleichung: $a(x) = 2x + 10$



6.10 Aufgabe 10

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{x^2 + 2x - 15}$$

Definitionsbereich bestimmen – dazu werden die Nennernullstellen berechnet.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 15 &= 0 \\ x_{1/2} &= -1 \pm \sqrt{1 + 15} \\ x_{1/2} &= -1 \pm 4 \\ x_1 &= -5 & x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 3\}$$

Untersuchung für $x_1 = -5$:

$$Z(-5) = (-5)^3 - 7 \cdot (-5)^2 + 14 \cdot (-5) - 8 = -378 \neq 0 \Rightarrow \text{Polstelle bei } x_1 = -5$$

Untersuchung für $x_2 = 3$:

$$Z(3) = 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 8 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Polstelle bei } x_2 = 3$$

Die **Nullstellen** werden berechnet, indem man den **Zähler** der Funktion gleich Null setzt. Da der Zähler ein Polynom 3. Grades darstellt, können die Nullstellen des Zählers nicht analytisch bestimmt werden. Durch **planvolles** Probieren erhalte ich $x_{01} = 1$. Durch eine Polynomdivision kann ich $(x - x_{01})$ ausklammern.

$$\begin{array}{r} (x^3 \quad -7x^2 \quad +14x \quad -8) \quad : \quad (x - 1) = x^2 - 6x + 8 \\ -(x^3 \quad \quad -x^2) \\ \hline \quad \quad -6x^2 \quad +14x \quad -8 \\ - \quad (-6x^2 \quad \quad +6x) \\ \hline \quad \quad \quad \quad 8x \quad -8 \\ \quad \quad \quad - \quad (8x \quad -8) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

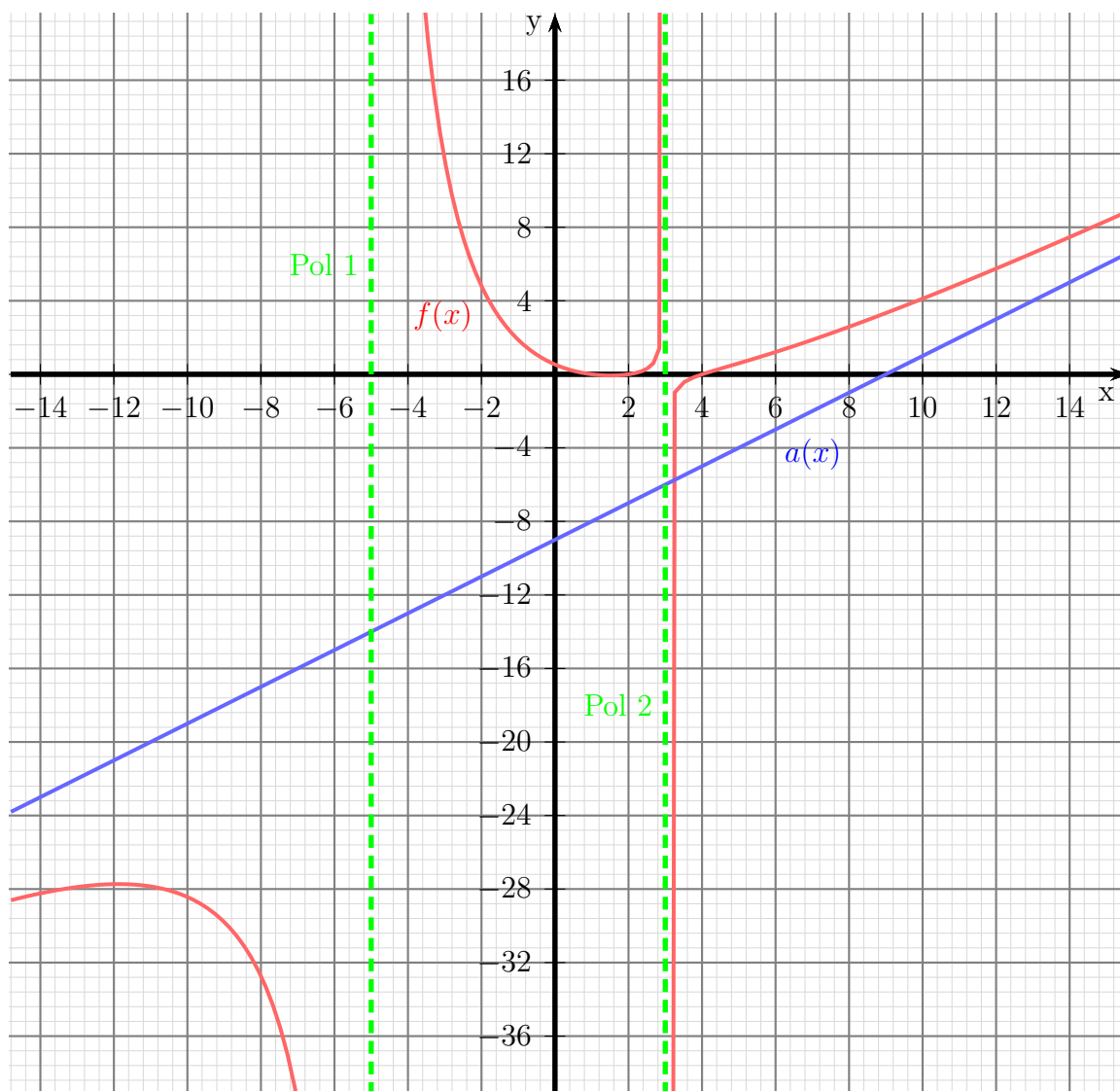
Die weiteren Nullstellen finden wir, indem wir den Ergebnisterm gleich Null setzen.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ x_{02/03} &= 3 \pm \sqrt{9 - 8} \\ &= 3 \pm 1 \\ x_{02} &= 2 & x_{03} &= 4 \end{aligned}$$

Fehlt nur noch die Asymptote. Die **Asymptotengleichung** wird bestimmt, indem man die Division entsprechend der Funktionsgleichung durchführt und den „Rest“ weglässt.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (x^2 + 2x - 15) = x - 9 + \frac{47x - 143}{x^2 + 2x - 15} \\
 \underline{-(x^3 + 2x^2 - 15x)} \\
 -9x^2 + 29x - 8 \\
 - \quad \underline{-(-9x^2 - 18x + 135)} \\
 47x - 143
 \end{array}$$

Die Asymptotengleichung lautet: $a(x) = x - 9$



6.11 Aufgabe 11

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 5x + 6}$$

Lücken im Definitionsbereich gibt es bei einer Gebrochen Rationalen Funktion dort, wo der Nenner Nullstellen hat.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_1 &= 2 \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$$

Was ist bei $x_1 = 2$?

$$Z(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 15 = -7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x_1 = 2$$

Was ist bei $x_2 = 3$?

$$Z(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{weiter untersuchen!}$$

Im Zähler und im Nenner kann $(x - 3)$ ausgeklammert werden. Dazu führe ich im Zähler eine **Polynomdivision** durch:

$$\begin{array}{r} (x^2 + 2x - 15) : (x - 3) = x + 5 \\ -(x^2 - 3x) \\ \hline 5x - 15 \\ -(5x - 15) \\ \hline 0 \end{array}$$

Da die Nennernullstellen bekannt sind, kann der Nenner mit Hilfe des Satzes von **Vieta** zerlegt werden. Die Zerlegung sieht dann wie folgt aus. Anschließend kann durch $(x - 3)$ gekürzt werden. Dadurch erhält man dann $f^*(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 5x + 6} \\ &= \frac{(x - 3) \cdot (x + 5)}{(x - 3) \cdot (x - 2)} \\ f^*(x) &= \frac{x + 5}{x - 2} \end{aligned}$$

$$N^*(3) = 3 - 2 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lücke bei } x_2 = 2$$

Den zugehörigen y -Wert erhalten wir als Funktionswert von $f^*(x)$.

$$y_2 = f^*(x_2) = \frac{3 + 5}{3 - 2} = 8$$

Ergebnis: **Lücke $L(3|8)$**

$$y_0 = f^*(0) = \frac{0 + 5}{0 - 2} = -2,5$$

Ergebnis: **y -Achsenabschnitt: $y_0 = -2,5$**

Zur **Nullstellenbestimmung** reicht es, nur den **Zähler** zu untersuchen, denn nur, wenn der Zähler Null ist, kann der ganze Bruch Null sein. Man darf mit der vereinfachten Funktion rechnen.

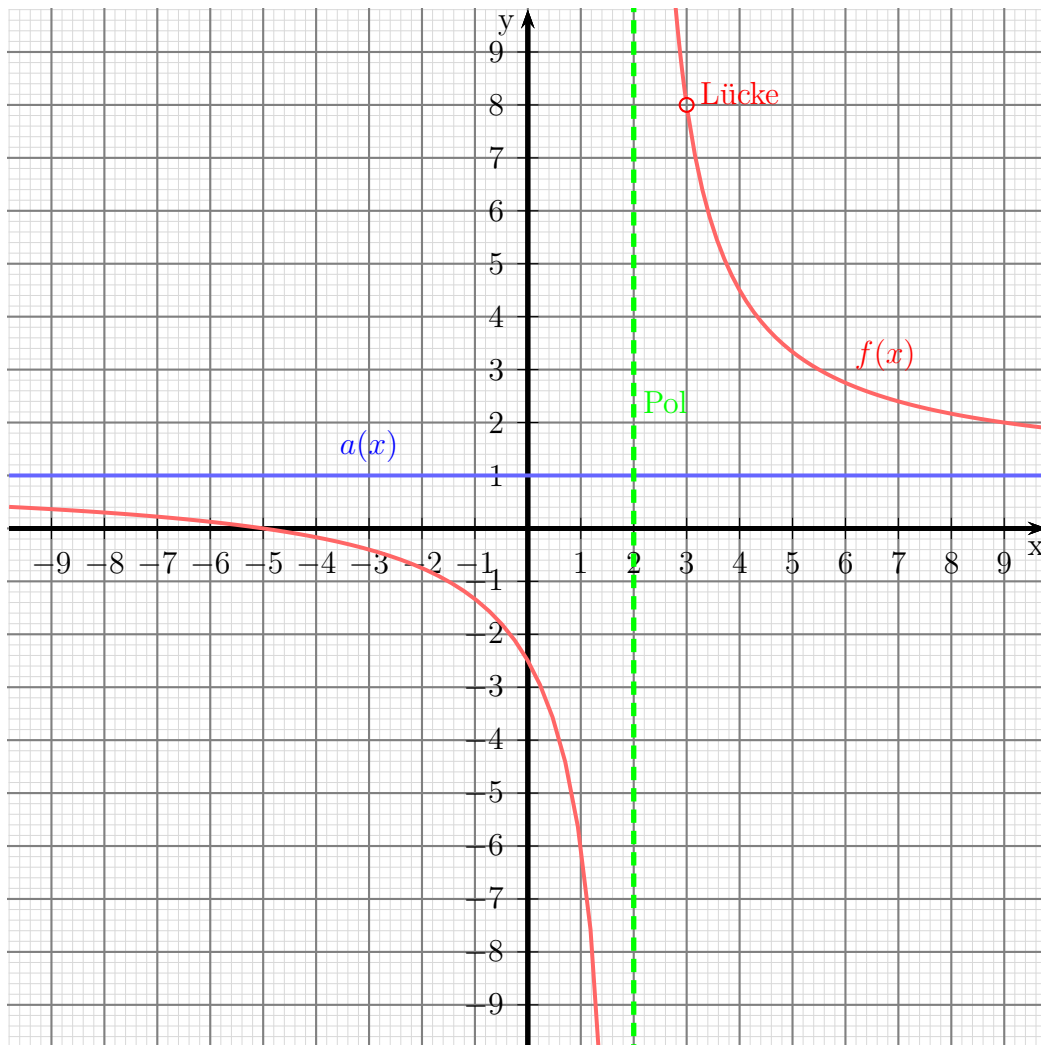
$$\begin{aligned} x_0 + 5 &= 0 & | -5 \\ x_0 &= -5 \end{aligned}$$

Ergebnis: **Nullstelle $x_0 = -5$**

Zur Bestimmung der **Asymptote** wird eine Polynomdivision entsprechend der Funktionsgleichung durchgeführt. Auch hier darf die vereinfachte Funktion verwendet werden.

$$\begin{array}{r} (x + 5) : (x - 2) = 1 + \frac{7}{x-2} \\ -(x - 2) \\ \hline 7 \end{array}$$

Damit erhalten wir die Asymptote: **$a(x) = 1$**



6.12 Aufgabe 12

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15}$$

Lücken im Definitionsbereich gibt es bei einer Gebrochen Rationalen Funktion dort, wo der Nenner Nullstellen hat.

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 15 &= 0 \\x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1 + 15} \\x_{1/2} &= 1 \pm 4 \\x_1 = 5 &\quad x_2 = -3\end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 5\}$$

Was ist bei $x_1 = 5$?

$$Z(5) = 5^2 - 5 - 12 = 8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x_1 = 5$$

Was ist bei $x_2 = -3$?

$$Z(-3) = (-3)^2 + 3 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{weiter untersuchen!}$$

Im Zähler und im Nenner kann $(x+3)$ ausgeklammert werden. Dazu führe ich im Zähler eine **Polynomdivision** durch:

$$\begin{array}{r} (x^2 \quad -x \quad -12) : (x+3) = x-4 \\ -(x^2 \quad +3x) \\ \hline \quad -4x \quad -12 \\ \quad - (-4x \quad -12) \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Da die Nennernullstellen bekannt sind, kann der Nenner mit Hilfe des Satzes von **Vieta** zerlegt werden. Die Zerlegung sieht dann wie folgt aus. Anschließend kann durch $(x+3)$ gekürzt werden. Dadurch erhält man dann $f^*(x)$.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 15} \\ &= \frac{(x+3) \cdot (x-4)}{(x+3) \cdot (x-5)} \\ f^*(x) &= \frac{x-4}{x-5}\end{aligned}$$

$$N^*(-3) = -3 - 4 = -7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Lücke bei } x_2 = -3$$

Den zugehörigen y -Wert erhalten wir als Funktionswert von $f^*(x)$.

$$y_2 = f^*(x_2) = \frac{-3-4}{-3-5} = \frac{7}{8} = 0,875$$

Ergebnis: **Lücke $L(-3|0,875)$**

$$y_0 = f^*(0) = \frac{0 - 4}{0 - 5} = 0,8$$

Ergebnis: **y -Achsenabschnitt: $y_0 = 0,8$**

Zur **Nullstellenbestimmung** reicht es, nur den **Zähler** zu untersuchen, denn nur, wenn der Zähler Null ist, kann der ganze Bruch Null sein. Man darf mit der vereinfachten Funktion rechnen.

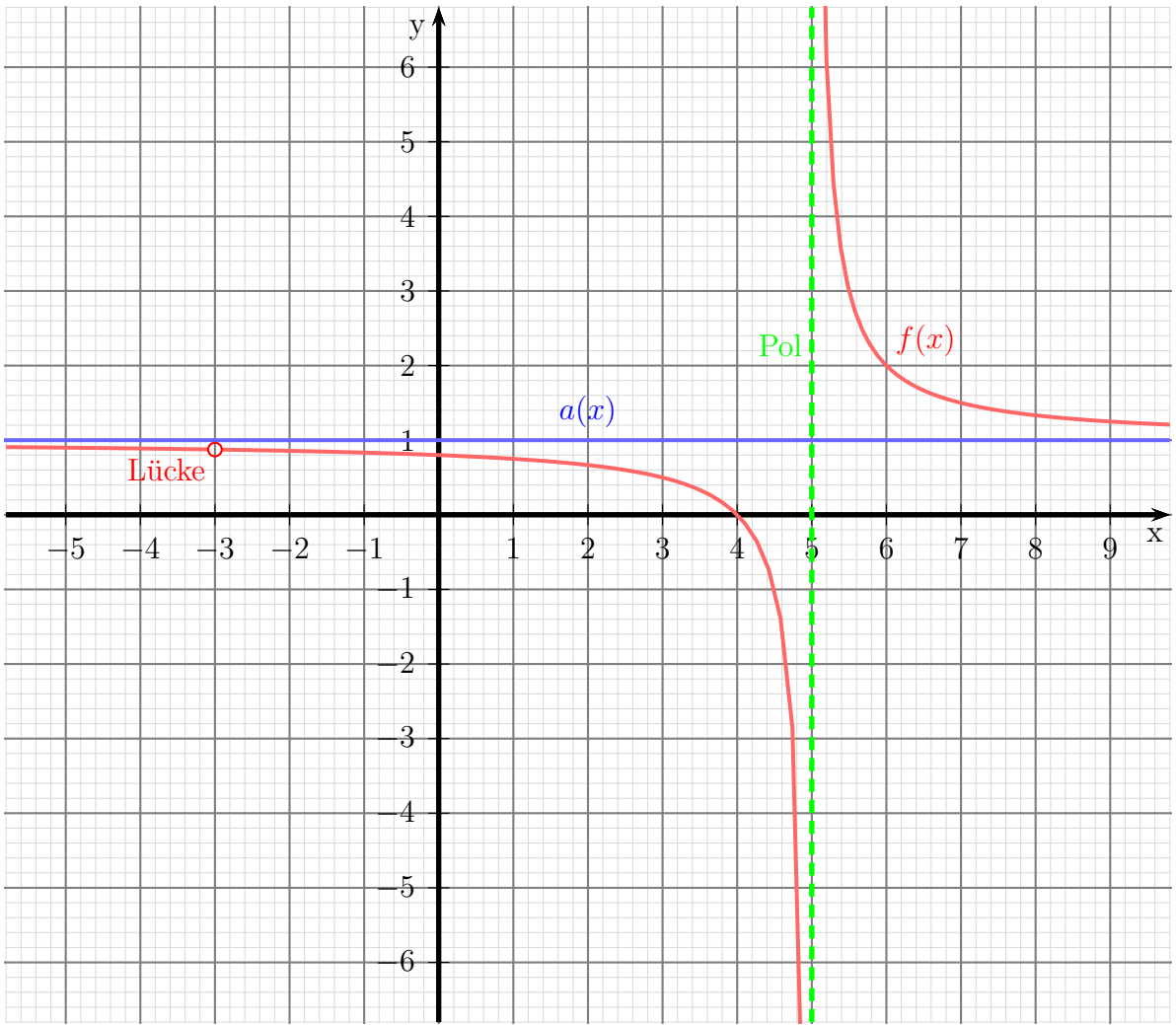
$$\begin{aligned}x_0 - 4 &= 0 & | +4 \\x_0 &= 4\end{aligned}$$

Ergebnis: **Nullstelle $x_0 = 4$**

Zur Bestimmung der **Asymptote** wird eine Polynomdivision entsprechend der Funktionsgleichung durchgeführt. Auch hier darf die vereinfachte Funktion verwendet werden.

$$\begin{array}{r} (x - 4) : (x - 5) = 1 + \frac{1}{x-5} \\ -(x - 5) \\ \hline 1 \end{array}$$

Damit erhalten wir die Asymptote: **$a(x) = 1$**



6.13 Aufgabe 13

$$f(x) = \frac{2x^3 - 18x^2 + 48x - 40}{x^2 - 6x + 8}$$

Lücken im Definitionsbereich gibt es bei einer Gebrochen Rationalen Funktion dort, wo der Nenner Nullstellen hat.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{9 - 8} \\ x_{1/2} &= 3 \pm 1 \\ x_1 &= 4 \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$$

Was ist bei $x_1 = 4$?

$$Z(4) = 2 \cdot 4^3 - 18 \cdot 4^2 + 48 \cdot 4 - 40 = -8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x_1 = 4$$

Was ist bei $x_2 = 2$?

$$Z(2) = 2 \cdot 2^3 - 18 \cdot 2^2 + 48 \cdot 2 - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{weiter untersuchen!}$$

Im Zähler und im Nenner kann $(x - 2)$ ausgeklammert werden. Dazu führe ich im Zähler eine **Polynomdivision** durch:

$$\begin{array}{r} (2x^3 \quad -18x^2 \quad +48x \quad -40) : (x - 2) = 2x^2 - 14x + 20 \\ -(2x^3 \quad \quad -4x^2) \\ \hline \quad \quad -14x^2 \quad +48x \quad -40 \\ \quad - \quad (-14x^2 \quad +28x) \\ \hline \quad \quad \quad \quad 20x \quad -40 \\ \quad \quad \quad - \quad (20x \quad -40) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Da die Nennernullstellen bekannt sind, kann der Nenner mit Hilfe des Satzes von **Vieta** zerlegt werden. Die Zerlegung sieht dann wie folgt aus. Anschließend kann durch $(x - 2)$ gekürzt werden. Dadurch erhält man dann $f^*(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^3 - 18x^2 + 48x - 40}{x^2 - 6x + 8} \\ &= \frac{(x - 2) \cdot (2x^2 - 14x + 20)}{(x - 2) \cdot (x - 4)} \\ f^*(x) &= \frac{2x^2 - 14x + 20}{x - 4} \end{aligned}$$

$$N^*(2) = 2 - 4 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Lücke bei } x_2 = 2$$

Den zugehörigen y -Wert erhalten wir als Funktionswert von $f^*(x)$.

$$y_2 = f^*(x_2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + 20}{2 - 4} = \frac{0}{-2} = 0$$

Ergebnis: **Lücke $L(2|0)$**

$$y_0 = f^*(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 + 20}{0 - 4} = -5$$

Ergebnis: **y -Achsenabschnitt: $y_0 = -5$**

Zur **Nullstellenbestimmung** reicht es, nur den **Zähler** zu untersuchen, denn nur, wenn der Zähler Null ist, kann der ganze Bruch Null sein. Man darf mit der vereinfachten Funktion rechnen.

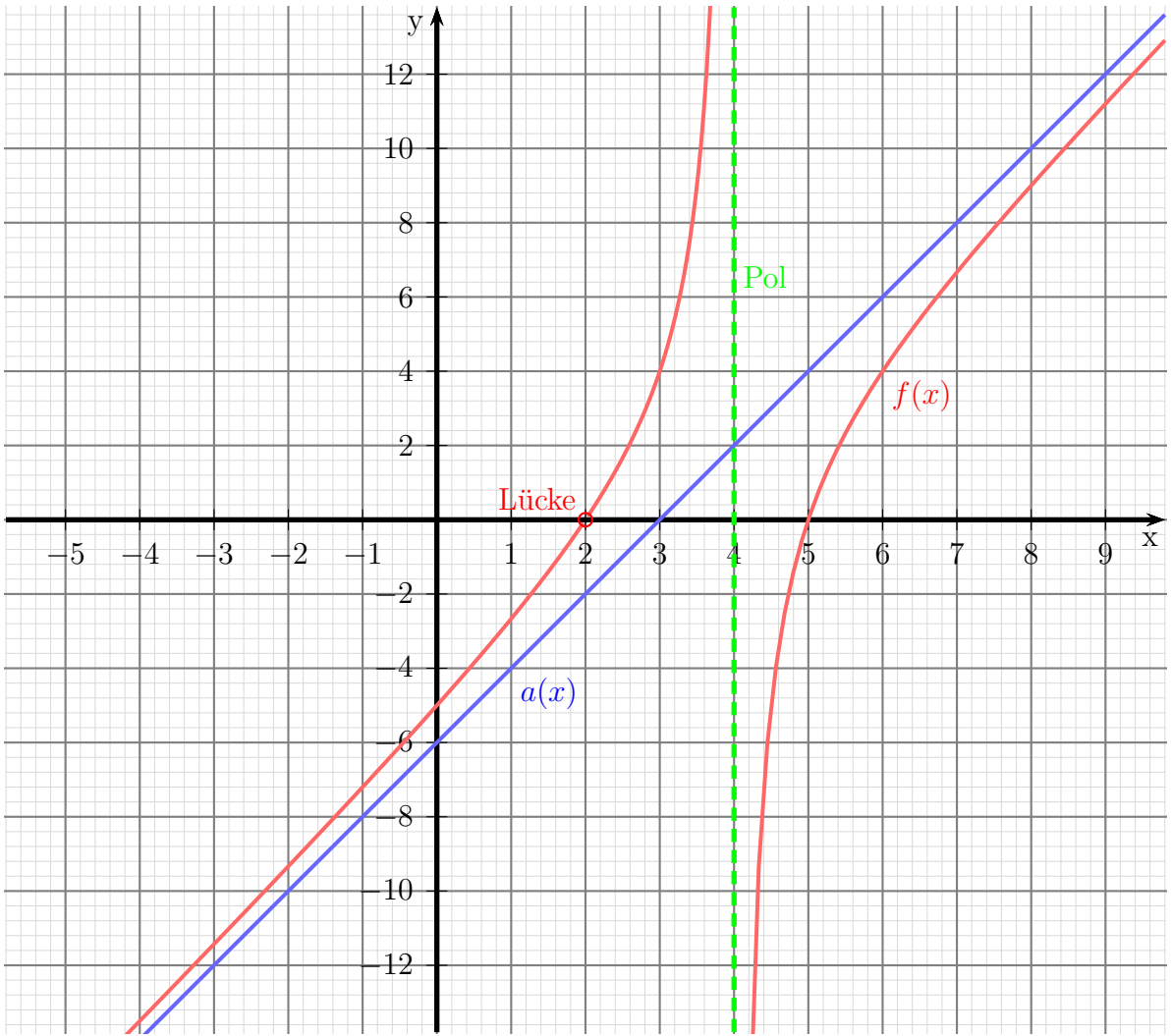
$$\begin{aligned} 2x_0^2 - 14x_0 + 20 &= 0 \quad | : 2 \\ x_0^2 - 7x_0 + 10 &= 0 \\ x_{01/02} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} \\ x_{01/02} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}} \\ x_{01/02} &= \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_{01} = 5 \quad x_{02} = 2 &\quad x_{02} \notin D! \end{aligned}$$

Ergebnis: **Nullstelle $x_0 = 5$**

Zur Bestimmung der **Asymptote** wird eine Polynomdivision entsprechend der Funktionsgleichung durchgeführt. Auch hier darf die vereinfachte Funktion verwendet werden.

$$\begin{array}{r} (2x^2 \quad -14x \quad +20) : (x - 4) = 2x - 6 - \frac{4}{x-4} \\ -(2x^2 \quad -8x) \\ \hline \quad -6x \quad +20 \\ \quad - (-6x \quad +24) \\ \hline \quad \quad \quad -4 \end{array}$$

Damit erhalten wir die Asymptote: **$a(x) = 2x - 6$**



6.14 Aufgabe 14

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - 32x - 40}{x^2 - 2x - 8}$$

Lücken im Definitionsbereich gibt es bei einer Gebrochen Rationalen Funktion dort, wo der Nenner Nullstellen hat.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1 + 8} \\ x_{1/2} &= 1 \pm 3 \\ x_1 &= 4 \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$$

Was ist bei $x_1 = 4$?

$$Z(4) = 2 \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 - 32 \cdot 4 - 40 = -72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polstelle bei } x_1 = 4$$

Was ist bei $x_2 = -2$?

$$Z(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 32 \cdot (-2) - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{weiter untersuchen!}$$

Im Zähler und im Nenner kann $(x+2)$ ausgeklammert werden. Dazu führe ich im Zähler eine **Polynomdivision** durch:

$$\begin{array}{r} (2x^3 \quad -2x^2 \quad -32x \quad -40) : (x+2) = 2x^2 - 6x - 20 \\ -(2x^3 \quad +4x^2) \\ \hline \quad -6x^2 \quad -32x \quad -40 \\ \quad - (-6x^2 \quad -12x) \\ \hline \qquad \quad -20x \quad -40 \\ \qquad \quad - (-20x \quad -40) \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

Da die Nennernullstellen bekannt sind, kann der Nenner mit Hilfe des Satzes von **Vieta** zerlegt werden. Die Zerlegung sieht dann wie folgt aus. Anschließend kann durch $(x+2)$ gekürzt werden. Dadurch erhält man dann $f^*(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^3 - 2x^2 - 32x - 40}{x^2 - 2x - 8} \\ &= \frac{(x+2) \cdot (2x^2 - 6x - 20)}{(x+2) \cdot (x-4)} \\ f^*(x) &= \frac{2x^2 - 6x - 20}{x-4} \end{aligned}$$

$$N^*(-2) = -2 - 4 = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Lücke bei } x_2 = -2$$

Den zugehörigen y -Wert erhalten wir als Funktionswert von $f^*(x)$.

$$y_2 = f^*(x_2) = \frac{2 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 20}{-2 - 4} = \frac{0}{-6} = 0$$

Ergebnis: **Lücke $L(-2|0)$**

$$y_0 = f^*(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 20}{0 - 4} = 5$$

Ergebnis: **y -Achsenabschnitt: $y_0 = 5$**

Zur **Nullstellenbestimmung** reicht es, nur den **Zähler** zu untersuchen, denn nur, wenn der Zähler Null ist, kann der ganze Bruch Null sein. Man darf mit der vereinfachten Funktion rechnen.

$$\begin{aligned} 2x_0^2 - 6x_0 - 20 &= 0 \quad | : 2 \\ x_0^2 - 3x_0 - 10 &= 0 \\ x_{01/02} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} \\ x_{01/02} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}} \\ x_{01/02} &= \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \\ x_{01} = 5 \quad x_{02} = -2 \quad x_{02} &\notin D! \end{aligned}$$

Ergebnis: **Nullstelle $x_0 = 5$**

Zur Bestimmung der **Asymptote** wird eine Polynomdivision entsprechend der Funktionsgleichung durchgeführt. Auch hier darf die vereinfachte Funktion verwendet werden.

$$\begin{array}{r} (2x^2 \quad -6x \quad -20) : (x - 4) = 2x + 2 - \frac{12}{x-4} \\ -(2x^2 \quad -8x) \\ \hline \quad 2x \quad -20 \\ - \quad (2x \quad -8) \\ \hline \quad -12 \end{array}$$

Damit erhalten wir die Asymptote: **$a(x) = 2x + 2$**

