Aufgaben zu Flächen, Pythagoras und Trigonometrie

22. März 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Als Informationsquelle zu den Grundlagen der Trigonometrie kann diese Quelle dienen:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/trigo.pdf

Die notwendigen Grundlagen sowie Übungsaufgaben zum Satz des Pythagoras kann man hier nachlesen:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/pythagoras.pdf

Ein Problem kann auch das Umstellen von Formeln machen. Dazu findet man hier eine Anleitung:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/formelum.pdf

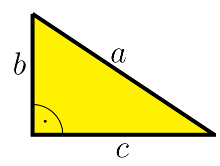
Die Formeln und Anwendungsaufgaben zu Flächenberechnungen kann man hier finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/flaechenberechnung.pdf

2 Aufgaben

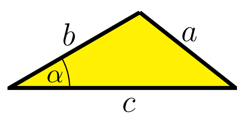
2.1 Aufgabe 1

Gegeben sind die folgende Daten des nebenstehend abgebildeten **Rechtwinkligen** Dreieckes:
$a = 10\,\text{cm}$
$b = 6\,\text{cm}$
Der Rechte Winkel ist α. Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



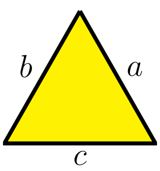
2.2 Aufgabe 2

Gegeben sind die folgende Daten des nebenstehenden Dreieckes:
$b = 40\,\text{mm}$
$c = 60\,\text{mm}$
$\alpha = 30°$
Wie groß ist die Fläche des Dreieckes?



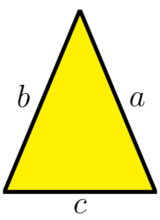
2.3 Aufgabe 3

Gegeben ist das nebenstehend dargestellte **gleichseitige** Dreieck mit den Seitenlängen:
$a = b = c = 5\,\text{cm}$
Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



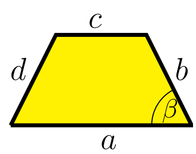
2.4 Aufgabe 4

Gegeben ist das nebenstehend dargestellte **gleichschenklige** Dreieck mit den Seitenlängen:
$a = b = 13\,\text{cm}$
$c = 10\,\text{cm}$
Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



2.5 Aufgabe 5

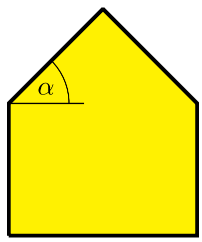
In nebenstehend dargestelltem Trapez sind folgende Daten bekannt:
$a = 4\,\text{m}$
$b = 2{,}3\,\text{m}$
$c = 2\,\text{m}$
$\beta = 60{,}4°$
Berechnen Sie die Fläche des Trapezes!



2.6 Aufgabe 6

Eine Fassade nach nebenstehendem Bild soll angestrichen werden. Die Front hat eine Breite von 5 Metern. In der Mitte ist sie 7 Meter hoch. Der Neigungswinkel für die Dachschräge beträgt $\alpha = 45°$.

Berechnen Sie die Fläche der Hausfassade!



3 Ergebnisse

3.1 Aufgabe 1

$$A = 24\,\mathrm{cm}^2$$

3.2 Aufgabe 2

$$A = 600\,\mathrm{mm}^2$$

3.3 Aufgabe 3

$$A = 10{,}825\,\mathrm{cm}^2$$

3.4 Aufgabe 4

$$A = 60\,\mathrm{cm}^2$$

3.5 Aufgabe 5

$$A = 8\,\mathrm{m}^2$$

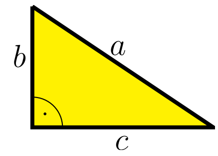
3.6 Aufgabe 6

$$A = 28{,}75\,\mathrm{m}^2$$

4 Lösungen mit Lösungsweg

4.1 Aufgabe 1

Gegeben sind die folgende Daten des nebenstehend abgebildeten **Rechtwinkligen** Dreieckes:
$a = 10\,\mathrm{cm}$
$b = 6\,\mathrm{cm}$
Der Rechte Winkel ist α. Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



Lösung: Die Formel zur Berechnung eines Dreieckes lautet:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Hierbei bedeutet g Grundseite und h Höhe. Welche der drei Seiten man als Grundseite nimmt ist im Prinzip gleichgültig, jedoch muss die Höhe h auf dieser Seite **senkrecht** stehen.

Da das Dreieck **rechtwinklig** ist, bietet es sich an, die beiden Kathetem b und c als Grundseite und Höhe zu wählen. Da c nicht bekannt ist, muss c zuvor noch ausgerechnet werden. Das geht mit dem Satz des Pythagoras.

$$\begin{aligned}
b^2 + c^2 &= a^2 && \mid -b^2 \\
c^2 &= a^2 - b^2 && \mid\sqrt{\ } \\
c &= \sqrt{a^2 - b^2} \\
&= \sqrt{(10\,\mathrm{cm})^2 - (6\,\mathrm{cm})^2} \\
&= \sqrt{100\,\mathrm{cm}^2 - 36\,\mathrm{cm}^2} \\
&= \sqrt{64\,\mathrm{cm}^2} \\
c &= 8\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$

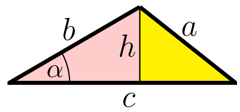
Ob man nun c als Grundseite und b als Höhe nimmt oder umgekehrt, ist im Prinzip gleichgültig. Jedenfalls kann damit die Fläche jetzt berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{g \cdot h}{2} \\
&= \frac{b \cdot c}{2} \\
&= \frac{6\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm}}{2} \\
A &= 24\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Dreieckfläche beträgt: $\boxed{A = 24\,\mathrm{cm}^2}$

4.2 Aufgabe 2

Gegeben sind die folgende Daten des nebenstehenden Dreieckes:
$b = 40\,\text{mm}$
$c = 60\,\text{mm}$
$\alpha = 30°$
Wie groß ist die Fläche des Dreieckes?



Lösung: Zur Berechnung der Fläche benötigen wir eine Grundseite und eine darauf senkrecht stehende Höhe. Wählt man die Höhe, die mit der Bezeichnung h in der Planfigur eingetragen ist, dann ist c die zugehörige Grundseite. In dem rosa markierten linken (rechtwinkligen) Teildreieck kann die Höhe mit Hilfe der Winkelfunktionen berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} &= \sin\alpha \\
\frac{h}{b} &= \sin\alpha \qquad\qquad | \cdot b \\
h &= b \cdot \sin\alpha \\
&= 40\,\text{mm} \cdot \sin 30° \\
h &= 20\,\text{mm}
\end{aligned}$$

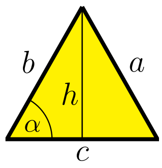
Mit diese Ergebnis kann die Dreieckfläche nun berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{g \cdot h}{2} \\
&= \frac{c \cdot h}{2} \\
&= \frac{60\,\text{mm} \cdot 20\,\text{mm}}{2} \\
A &= 600\,\text{mm}^2
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Dreieckfläche beträgt: $\boxed{A = 600\,\text{mm}^2}$

4.3 Aufgabe 3

Gegeben ist das nebenstehend dargestellte **gleichseitige** Dreieck mit den Seitenlängen:
$a = b = c = 5\,\text{cm}$
Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



Lösung: Die Formel zur Berechnung eines Dreieckes lautet:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Hierbei bedeutet g Grundseite und h Höhe. Welche der drei Seiten man als Grundseite nimmt ist im Prinzip gleichgültig, jedoch muss die Höhe h auf dieser Seite **senkrecht** stehen. Verwendet man die hier eingezeichnete Höhe h, dann ist c die Grundseite g aus der Formel.

Da h nicht bekannt ist, muss h zunächst berechnet werden. Hierzu gibt er **zwei** verschiedene Möglichkeiten.

1. Winkelfunktionen
2. Satz des Pythagoras

Lösungsvariante 1: Winkelfunktionen Weil alle Winkel gleich groß sind und weil die Winkelsumme im Dreieck immer 180° beträgt, sind alle Winkel 60° groß.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} &= \sin\alpha \\
\frac{h}{b} &= \sin\alpha \qquad\qquad | \cdot b \\
h &= b \cdot \sin\alpha \\
h &= 6\,\text{cm} \cdot \sin 60^\circ \\
h &= 4{,}33\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Satz des Pythagoras Im linken Rechtwinkligen Teildreieck gilt der Satz des Pythagoras.

$$\begin{aligned}
h^2 + \left(\tfrac{c}{2}\right)^2 &= b^2 \qquad\qquad | - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \\
h^2 &= b^2 - \left(\tfrac{c}{2}\right)^2 \qquad | \sqrt{\ } \\
h &= \sqrt{b^2 - \left(\tfrac{c}{2}\right)^2} \\
h &= \sqrt{(5\,\text{cm})^2 - (2{,}5\,\text{cm})^2} \\
h &= 4{,}33\,\text{cm}
\end{aligned}$$

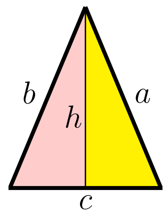
Unabhängig davon, mit welchem Verfahren die Höhe bestimmt wurde, kann jetzt die Fläche mit der Flächenformel berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{g \cdot h}{2} \\
&= \frac{c \cdot h}{2} \\
&= \frac{5\,\mathrm{cm} \cdot 4{,}33\,\mathrm{cm}}{2} \\
A &= 10{,}825\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}
$$

Ergebns: Die Fläche des gleichseitigen Dreieckes beträgt: $\boxed{A = 10{,}825\,\mathrm{cm}^2}$

4.4 Aufgabe 4

Gegeben ist das nebenstehend dargestellte **gleichschenklige** Dreieck mit den Seitenlängen:
$a = b = 13\,\text{cm}$
$c = 10\,\text{cm}$
Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



Lösung: Wir benötigen eine Höhe, die auf einer der Dreieckseiten senkrecht steht. Es bietet sich an, c als Grundseite zu nehmen und h darauf senkrecht zu setzen, wie in der Skizze dargestellt. Wegen der **Gleichseitigkeit** des Dreieckes mit den gleichen Schenkeln a und b steht h dann **genau in der Mitte** von c. Das linke rosa markierte Teildreieck ist dann **rechtwinklig** mit den Katheten h und $\frac{c}{2}$ sowie der Hypotenuse b.[1] In diesem Teildreieck kann h mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden.

$$\begin{aligned}
h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 &= b^2 && \left| - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right. \\
h^2 &= b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 && |\sqrt{\ } \\
h &= \sqrt{h^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{(13\,\text{cm})^2 - \left(\frac{10\,\text{cm}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{169\,\text{cm}^2 - 25\,\text{cm}^2} \\
&= \sqrt{144\,\text{cm}^2} \\
h &= 12\,\text{cm}
\end{aligned}$$

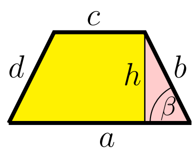
Mit dieser Höhe und c als Grundseite kann nun die Dreieckfläche berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{g \cdot h}{2} \\
&= \frac{c \cdot h}{2} \\
&= \frac{10\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{2} \\
A &= 60\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Dreieckfläche beträgt: $\boxed{A = 60\,\text{cm}^2}$

[1] Natürlich könnte man auch mit dem rechten Teildreieck arbeiten.

4.5 Aufgabe 5



In nebenstehend dargestelltem Trapez sind folgende Daten bekannt:
$a = 4\,\mathrm{m}$
$b = 2{,}3\,\mathrm{m}$
$c = 2\,\mathrm{m}$
$\beta = 60{,}4°$
Berechnen Sie die Fläche des Trapezes!

Lösung: Die Formel zur Berechnung eines Trapezes lautet:

$$A = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h$$

Hierbei sind g_1 und g_2 die beiden parallelen Grundseiten und h deren Abstand, auch Höhe genannt.

Die Grundseiten g_1 und g_2 sind hier die Seitenlängen a und c. Zur Berechnung wird noch die unbekannte Höhe h benötigt. Diese kann im rosa markierten rechten Rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe der Winkelfunktionen mit dem Winkel β bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} &= \sin\beta \\
\frac{h}{b} &= \sin\beta \qquad\qquad | \cdot b \\
h &= \sin\beta \cdot b \\
&= \sin 60{,}4° \cdot 2{,}3\,\mathrm{m} \\
h &= 2\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

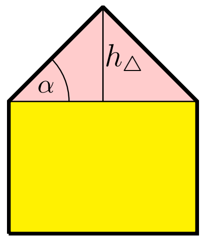
Mit diesem Wert für die Höhe kann nun die Fläche berechnet werden:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h \\
&= \frac{a + c}{2} \cdot h \\
&= \frac{4\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m}}{2} \cdot 2\,\mathrm{m} \\
A &= 8\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Trapezfläche beträgt: $\boxed{A = 8\,\mathrm{m}^2}$

4.6 Aufgabe 6

Eine Fassade nach nebenstehendem Bild soll angestrichen werden. Die Front hat eine Breite von 5 Metern. In der Mitte ist sie 7 Meter hoch. Der Neigungswinkel für die Dachschräge beträgt $\alpha = 45°$.



Berechnen Sie die Fläche der Hausfassade!

Lösung: Es ist sinnvoll, die Fläche in zwei Teilflächen zu zerlegen, wie obenstehend dargestellt. Wir erhalten ein Dreieck (hier in rosa) und ein Rechteck. Die Dreieckfläche nenne ich $A_\triangle$, die Rechteckfläche $A_\square$.

Weiterhin ist es zweckmäßig, wichtige Größen mir Formelzeichen zu benennen. Ich nenne die Breite des Hauses b und die gesamte Höhe des Hauses h_{ges}. Die Höhe des gelben Rechteckes nenne ich $h_\square$.

Für die Berechnung des Dreieckes wird die eingezeichnete Höhe $h_\triangle$ benötigt. Diese braucht man auch, um die Höhe $h_\square$ des Rechteckes bestimmen zu können. Die Höhe $h_\triangle$ kann im linken Rechtwinkligen Teildreieck des rosa Dreieckes mit Hilfe einer Winkelfunktion bestimmt werden. Seine beiden Katheten sind $h_\triangle$ und $\frac{b}{2}$. Bei der Rechnung benötigt man u. a. die Bruchrechenregel „*Division durch einen Bruch*“.[2]

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} &= \tan\alpha \\
\frac{h_\triangle}{\frac{b}{2}} &= \tan\alpha && |\ \text{Bruchrechenregel anwenden} \\
\frac{2h_\triangle}{b} &= \tan\alpha && |\cdot b \\
2h_\triangle &= b\cdot\tan\alpha && |:2 \\
h_\triangle &= \frac{b\cdot\tan\alpha}{2} \\
h_\triangle &= \frac{5\,\text{m}\cdot\tan 45°}{2} \\
h_\triangle &= 2{,}5\,\text{m}
\end{aligned}$$

Mit diesem Wert für $h_\triangle$ kann nun die Dreieckfläche $A_\triangle$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
A_\triangle &= \frac{g\cdot h}{2} \\
&= \frac{b\cdot h_\triangle}{2} \\
&= \frac{5\,\text{m}\cdot 2{,}5\,\text{m}}{2} \\
A_\triangle &= 6{,}25\,\text{m}^2
\end{aligned}$$

[2] Einzelheiten dazu siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/bruch.pdf

Die Höhe des Rechteckes $h_\Box$ wird benötigt. Diese kann aus der gegebenen Gesamthöhe $h_{ges} = 7\,\text{m}$ und der zuvor berechneten Dreieckhöhe $h_\triangle = 2{,}5\,\text{m}$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
h + h_\Box &= h_{ges} && \mid -h \\
h_\Box &= h_{ges} - h \\
&= 7\,\text{m} - 2{,}5\,\text{m} \\
h_\Box &= 4{,}5\,\text{m}
\end{aligned}$$

Mit diesem Wert kann nun die Rechteckfläche $A_\Box$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A_\Box &= b \cdot h_\Box \\
&= 5\,\text{m} \cdot 4{,}5\,\text{m} \\
A_\Box &= 22{,}5\,\text{m}^2
\end{aligned}$$

Aus den beiden Teilflächen wird jetzt die Gesamtfläche bereichet.

$$\begin{aligned}
A &= A_\triangle + A_Box \\
&= 6{,}25\,\text{m}^2 + 22{,}5\,\text{m}^2 \\
A &= 28{,}75\,\text{m}^2
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Fläche der Fassade beträgt: $\boxed{A = 28{,}75\,\text{m}^2}$