

# Flächenberechnungen

W. Kippels

28. November 2023

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Runde Flächen</b>	<b>4</b>
2.1	Kreis	4
2.2	Kreis Sektor	7
2.3	Kreisabschnitt	9
2.4	Ellipse	13
2.5	Oval	14
<b>3</b>	<b>Eckige Flächen</b>	<b>15</b>
3.1	Dreiecke	15
3.1.1	Allgemeines Dreieck	15
3.1.2	Rechtwinkliges Dreieck	15
3.2	Vierecke	15
3.2.1	Rechteck	16
3.2.2	Parallelogramm	16
3.2.3	Trapez	17
3.2.4	Drachenviereck	17
3.2.5	Raute	17
<b>4</b>	<b>Wohnflächenberechnung</b>	<b>18</b>
4.1	Dachschrägen	18
4.2	Beispiel 1	18
<b>5</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>22</b>
5.1	Aufgabe 1	22
5.2	Aufgabe 2	22
5.3	Aufgabe 3	22
5.4	Aufgabe 4	22
5.5	Aufgabe 5	23

5.6	Aufgabe 6	23
5.7	Aufgabe 7	23
5.8	Aufgabe 8	23
5.9	Aufgabe 9	24
<b>6</b>	<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>	<b>25</b>
6.1	Aufgabe 1	25
6.2	Aufgabe 2	26
6.3	Aufgabe 3	27
6.4	Aufgabe 4	28
6.5	Aufgabe 5	29
6.6	Aufgabe 6	30
6.7	Aufgabe 7	31
6.8	Aufgabe 8	33
6.9	Aufgabe 9	37

# 1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

*Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: **mail@dk4ek.de**

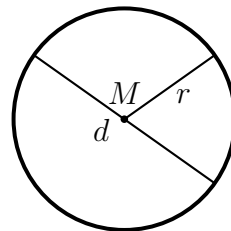
Vielen Dank!

## 2 Runde Flächen

### 2.1 Kreis

Die einfachste runde Fläche ist ein Kreis.

Will man den Flächeninhalt oder den Umfang eines Kreises berechnen, dann benötigt man die sogenannte *Kreiszahl*  $\pi$ . Hierbei handelt es sich um eine mathematische Konstante, die eine *Irrationale Zahl* darstellt, also eine Zahl, die sich nicht als Bruch oder als periodische Dezimalzahl darstellen lässt. Die ersten Stellen der Zahl  $\pi$  lauten:<sup>1</sup>



$$\pi \approx 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 64 \dots$$

In den gängigen Taschenrechnern ist heutzutage die Zahl  $\pi$  als Konstante abgespeichert, meist mit 13 Stellen. Das reicht aus, genauer rechnet der Taschenrechner sowieso nicht.

Um die Größe eines Kreises anzugeben sind zwei verschiedene Größen gängig:

- Der Radius  $r$
- Der Durchmesser  $d$

In der „reinen“ Mathematik geht man in der Regel vom Radius des Kreises aus, also der Länge vom Kreismittelpunkt  $M$  bis zum Kreisrand. In technischen Anwendungen hat man es dagegen meist mit dem Durchmesser zu tun, weil sich der einfacher messen lässt (z. B. mit einem Messschieber). Der Durchmesser wird von einem Punkt des Kreisrandes bis zum gegenüberliegenden Punkt des Kreisrandes gemessen.

Die zugehörigen Formeln zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreises lauten:

$$A = \pi \cdot r^2 \quad \text{oder} \quad A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

Auch für die Berechnung des Kreisumfanges  $U$  benötigt man die Kreiszahl  $\pi$ . Die zugehörigen Formeln lauten:

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \text{oder} \quad U = \pi \cdot d$$

---

<sup>1</sup>Wer sich die ersten 24 Stellen von  $\pi$  merken möchte, kann dies anhand eines Merkspruches tun. Die Anzahl der Buchstaben in jedem Wort gibt eine Ziffer an. Der Merkspruch lautet:

*Wie o dies  $\pi$   
macht ernstlich so vielen viele Müh'.  
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,  
wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein.*

**Beispiel 1:** Wir befestigen ein Ende eines 10-Meter langen Seiles an einem Pflock mittig auf einer Rasenfläche. Am anderen Ende des Seiles befestigen wir einen spitzen Metallstab, mit dem wir bei straff gehaltenem Seil einen Kreis rund um den Pflock in den Rasen ritzen. In dem Inneren der Kreisfläche soll ein Blumenbeet angelegt werden.

- Wie groß ist die Fläche  $A$  des Blumenbeetes?
- Welche Länge  $U$  hat die Kante zur Einfassung des Blumenbeetes?

**Lösung:**

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot r^2 \\ &= \pi \cdot (10 \text{ m})^2 \\ A &\approx 314,159 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Das Beet hat eine Fläche von etwa  $314,159 \text{ m}^2$ .

$$\begin{aligned} U &= 2 \cdot \pi \cdot r \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ m} \\ U &\approx 62,832 \text{ m} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Einfassung der Rasenfläche hat eine Länge von etwa  $62,832 \text{ m}$ .

**Beispiel 2:** Wir haben eine Rolle Kupferdraht gekauft. Laut Herstellerangaben soll der runde Draht eine Querschnittsfläche von  $A = 2,5 \text{ mm}^2$  haben. Wir führen zur Überprüfung eine Messung mit einem Messschieber durch. Welchen Durchmesser sollten wir ablesen?

**Lösung:**

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 && \left| \cdot \frac{4}{\pi} \right. \\ \frac{4A}{\pi} &= d^2 && \left| \sqrt{\quad} \right. \\ d &= \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{4 \cdot 2,5 \text{ mm}^2}{\pi}} \\ d &\approx 1,784 \text{ mm} \end{aligned}$$

Ergebnis: An einem Messschieber kann man normalerweise nur auf ein Zehntel Millimeter genau ablesen. Wir sollten also einen Wert zwischen  $1,7$  und  $1,8$  Millimeter ablesen.

**Beispiel 3:** Ein Fahrradreifen hat einen Durchmesser von 67,8 Zentimetern. Um am Fahrradacho die korrekte Geschwindigkeit ablesen zu können, muss dort eingegeben werden, wie weit man mit einer Radumdrehung fährt. Welcher Wert ist einzugeben?

**Lösung:**

$$\begin{aligned}U &= \pi \cdot d \\ &= \pi \cdot 67,8 \text{ cm} \\ U &\approx 213 \text{ cm} = 2,13 \text{ m}\end{aligned}$$

Ergebnis: Man fährt mit einer Radumdrehung etwa 2,13 m weit.

**Beispiel 4:** Die Erde hat einen Umfang von 40 000 Kilometern. Wie groß ist der Radius der Erde?

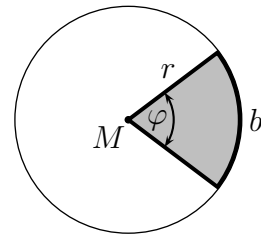
**Lösung:**

$$\begin{aligned}U &= 2 \cdot \pi \cdot r && | : 2\pi \\ \frac{U}{2\pi} &= r \\ r &= \frac{40\,000 \text{ km}}{2\pi} \\ r &\approx 6\,366,198 \text{ km}\end{aligned}$$

Ergebnis: Der Erdradius beträgt ungefähr 6 366,198 km.

## 2.2 Kreissektor

Manchmal hat man es nicht mit einem kompletten Kreis zu tun, sondern mit einem *Kreissektor*, auch *Kreisabschnitt* genannt. Das ist der Abschnitt eines Kreises, wie nebenstehend dargestellt. Ein runder Kuchen wird gern in Kreissektoren aufgeteilt.



Kennt man den Radius  $r$  des Kreises und den *Sektorwinkel*  $\varphi$ , auch *Mittelpunktswinkel* genannt, dann kann man sowohl die grau dargestellte Sektorfläche  $A$  als auch die Kreisbogenlänge  $b$  berechnen.

In beiden Fällen muss man das Ergebnis für einen vollen Kreis mit dem Verhältnis  $\frac{\text{Sektorwinkel}}{\text{Vollwinkel}}$  multiplizieren. Beginnen wir mit der Flächenformel.

$$\text{Kreissektorfläche: } A = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$$

Wenn man den Winkel  $\varphi$  im **Bogenmaß** und nicht im Gradmaß angibt, dann kann man die Formel noch etwas vereinfachen. Weil  $360^\circ$  im Gradmaß  $2\pi$  im Bogenmaß sind, erhalten wir alternativ diese Formel:

$$\text{Kreissektorfläche: } A = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot r^2$$

Ähnliches gilt für die Berechnung der Bogenlänge  $b$ . Gibt man  $\varphi$  im Gradmaß an, findet diese Formel Verwendung:

$$\text{Bogenlänge: } b = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

Wenn man  $\varphi$  im Bogenmaß einsetzt, lässt sich die Formel in dieser Form vereinfachen:

$$\text{Bogenlänge: } b = \varphi \cdot r$$

**Beispiel 1:** Ein Kreis  $K_1$  hat einen Radius von  $r_1 = 50$  cm. Ein Kreissektor eines anderen Kreises  $K_2$  mit einem Radius von  $r_2 = 1$  m soll die gleiche Fläche bekommen, wie die Fläche des Kreises  $K_1$ . Wie groß muss der Sektorwinkel (im Gradmaß) gemacht werden?

**Lösung:** Zunächst wird die Kreisfläche berechnet.

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (50 \text{ cm})^2 = \pi \cdot 2\,500 \text{ cm}^2$$

Dieser Wert wird mit der Fläche des Kreissektors gleichgesetzt.

$$\begin{aligned} \pi \cdot 2\,500 \text{ cm}^2 &= \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (1 \text{ m})^2 && | : \pi \\ 0,25 \text{ m}^2 &= \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 1 \text{ m}^2 && | \cdot \frac{360^\circ}{1 \text{ m}^2} \\ \frac{0,25 \text{ m}^2 \cdot 360^\circ}{1 \text{ m}^2} &= \varphi \\ \varphi &= 90^\circ \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Sektorwinkel muss  $\varphi = 90^\circ$  betragen, also ein Rechter Winkel sein.

**Beispiel 2:** Ein Kreissektor mit einem Radius von  $r = 1$  m soll eine Fläche von  $A = 1 \text{ m}^2$  bekommen. Wieviel Grad muss dazu der Sektorwinkel  $\varphi$  haben?

**Lösung:**

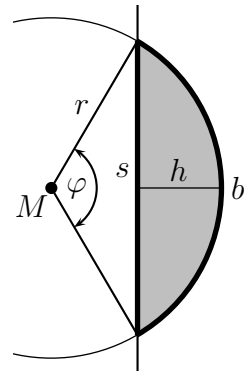
$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 &= A \\ \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (1 \text{ m})^2 &= 1 \text{ m}^2 \\ \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1 \text{ m}^2 &= 1 \text{ m}^2 && | \cdot \frac{360^\circ}{\pi \cdot 1 \text{ m}^2} \\ \varphi &= \frac{360^\circ}{\pi} \\ \varphi &\approx 114,6^\circ \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Sektorwinkel muss  $\varphi \approx 114,6^\circ$  betragen.



## 2.3 Kreisabschnitt

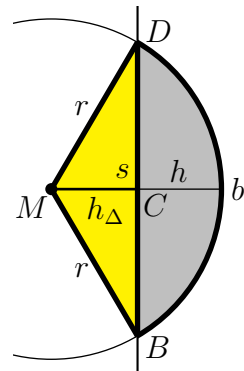
Bei einem *Kreisabschnitt*, auch *Kreissegment* genannt, gibt es noch mehr Größen zu bezeichnen, als beim Kreissektor. Neben dem *Kreisradius*  $r$  gibt es auch hier den *Sektorwinkel* oder *Mittelpunktwinkel*  $\varphi$ , den wir ja schon vom Kreissektor her kennen. Auch die *Kreisbogenlänge*  $b$  ist vom Kreissektor schon bekannt. Neu dazu kommt jetzt die *Sehnenlänge*  $s$  sowie auch die *Segmenthöhe*  $h$ , wie nebenstehend dargestellt.



Die Rechenformeln sind durch diese weiteren Größen vielfältiger, je nachdem, von welchen Größen man ausgeht. Hierfür sind jedoch Kenntnisse der Grundlagen der Trigonometrie<sup>2</sup> erforderlich.

Zur Berechnung der grau markierten Fläche des Kreisabschnittes existieren mehrere Formeln. **Vorab möchte ich erwähnen, dass alle vorkommenden Winkel nicht im Gradmaß, sondern im Bogenmaß angegeben werden müssen!**

Ich möchte an dieser Stelle die Formeln für den Kreisabschnitt entwickeln. Dazu gehen wir von der Formel für den *Kreissektor*  $A = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot r^2$  aus und vermindern diese Fläche um die Dreiecksfläche des gelben gleichschenkligen Dreieckes mit den beiden Schenkeln  $r$  und der Seite  $s$  links vom Abschnitt. Ich nenne die Sektorfläche  $A_S$  und die Dreiecksfläche  $A_\Delta$ . Zieht man die gelb markierte Dreiecksfläche von der gesamten Sektorfläche ab, dann bleibt genau die grau markierte Kreisabschnittfläche übrig.



Diese Dreiecksfläche kann auf unterschiedliche Arten berechnet werden, was dann zu unterschiedlichen Flächenformeln führt.

Betrachten wir zunächst das Dreieck  $\triangle MCD$ . Das Dreieck ist *rechtwinklig* mit den Katheten  $h_\Delta$  und  $\frac{s}{2}$ . Wir können die Dreiecksfläche  $A_{\triangle MCD}$  aus dem Produkt der beiden Katheten berechnen.

$$A_{\triangle MCD} = \frac{h_\Delta \cdot \frac{s}{2}}{2} = \frac{1}{4} \cdot h_\Delta \cdot s$$

Dieses Dreieck ist genau so groß wie das Dreieck  $\triangle MCB$ . Beide zusammen ergeben die gesamte gelbe Dreiecksfläche  $A_\Delta$ .

$$A_\Delta = 2 \cdot A_{\triangle MCD} = \frac{1}{2} \cdot h_\Delta \cdot s$$

<sup>2</sup>Nachzulesen beispielsweise hier: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/trigo.pdf>

Die Hilfsgröße  $h_{\Delta}$  können wir durch  $h$  und  $r$  ausdrücken:

$$h_{\Delta} = r - h$$

Setzt man das in die Dreieckformel ein, erhält man:

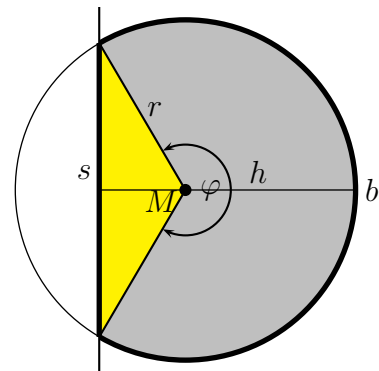
$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot (r - h) \cdot s$$

Hiermit und mit der Formel für den Kreisbogen kann man jetzt eine erste Formel für den Kreisabschnitt aufstellen:

$$A = A_S - A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot r^2 - \frac{1}{2} \cdot (r - h) \cdot s$$

Zusammengefasst:  $A = \frac{1}{2} \cdot (\varphi \cdot r^2 - (r - h) \cdot s)$

Damit haben wir eine erste Formel, mit der wir den Kreisabschnitt berechnen können. Aber aufgepasst! Was ist eigentlich los, wenn der Mittelpunktswinkel größer als  $\pi$  (bzw. größer als  $180^\circ$ ) ist? Dann liegt die Sehne nämlich **links** vom Kreismittelpunkt. Diese Möglichkeit ist hier rechts dargestellt. Der Abschnitt ist dann die **Summe** aus der grau und gelb dargestellten Fläche. Das bedeutet, dass die Dreiecksfläche nicht von der Kreissegmentfläche subtrahiert, sondern zu ihr hinzuaddiert werden muss! Nur so erhalten wir den (zugegebenermaßen recht dicken) Kreisabschnitt.

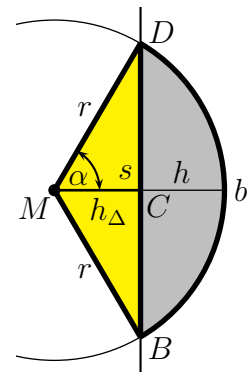


Sieht man sich die Formel einmal genau an, dann erkennt man, dass Entwarnung gegeben werden kann. Ist der Mittelpunktswinkel nämlich tatsächlich größer, als ein gestreckter Winkel, dann ist die Differenz  $(r - h)$  jetzt **negativ**, weil  $h$  größer als  $r$  ist. Somit subtrahieren wir einen **negativen** Wert  $(r - h) \cdot s$ , was einer Addition mit einem positiven gleichkommt. Wir können die Formel also einfach so lassen, wie sie ist.

Trotzdem ist diese Formel nicht sonderlich befriedigend, denn wir benötigen zur Berechnung des Kreisabschnittes insgesamt vier Größen:  $\varphi$ ,  $r$ ,  $h$  und  $s$ . Das muss auch einfacher gehen! Ich möchte mit  $\varphi$  und  $r$  auskommen.

Sehen wir uns dazu noch einmal die nebenstehende Planfigur an. Bis auf einen kleinen Unterschied habe ich sie schon weiter oben gezeigt. Der Unterschied besteht darin, dass hier nicht der Mittelpunktswinkel  $\varphi$  eingezeichnet ist, sondern nur seine „obere Hälfte“, die hier mit  $\alpha$  bezeichnet ist. Es ist also:

$$\alpha = \frac{1}{2} \varphi$$



Betrachten wir nun wieder das rechtwinklige Dreieck  $\triangle MCD$ . Der Radius  $r$  ist die Hypotenuse und die halbe Sehnenlänge  $\frac{s}{2}$  (die Strecke  $\overline{CD}$ ) die Gegenkathete des Winkels  $\alpha$ . Wir können die Definition der Sinusfunktion anwenden:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{s}{2}}{r}$$

Die Gleichung wird nach  $s$  umgestellt.

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\frac{s}{2}}{r} \\ \sin \alpha &= \frac{s}{2r} \quad | \cdot 2r \\ 2r \cdot \sin \alpha &= s \end{aligned}$$

Nach dem gleichen Muster wird die Kosinusfunktion angewendet. Die Ankathete zu  $\alpha$  ist die Hilfsgröße  $h_{\Delta}$ .

$$\begin{aligned} \frac{h_{\Delta}}{r} &= \cos \alpha \quad | \cdot r \\ h_{\Delta} &= r \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Die Formel für die Dreiecksfläche kann angewendet werden. Hierbei ist  $s$  die Grundseite und  $h_{\Delta}$  die Höhe.

$$\begin{aligned} A_{\Delta} &= \frac{s \cdot h_{\Delta}}{2} \\ &= \frac{(2r \cdot \sin \alpha) \cdot (r \cdot \cos \alpha)}{2} \\ A_{\Delta} &= r^2 \cdot (\sin \alpha) \cdot (\cos \alpha) \end{aligned}$$

Unter dem Stichwort *Additionstheoreme*<sup>3</sup> findet man auch einen Lehrsatz zu Doppelwinkelfunktionen:

$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot (\sin \alpha) \cdot (\cos \alpha)$$

Dividieren wir auf beiden Seiten durch 2, dann erhalten wir:

$$\frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) = (\sin \alpha) \cdot (\cos \alpha)$$

Wir können demnach das Produkt  $(\sin \alpha) \cdot (\cos \alpha)$  in unserer obigen Formel ersetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} A_{\Delta} &= r^2 \cdot (\sin \alpha) \cdot (\cos \alpha) \\ A_{\Delta} &= r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \end{aligned}$$

Jetzt erinnern wir uns daran, dass der Hilfswinkel  $\alpha$  genau die **Hälfte** des Mittelpunktswinkels  $\varphi$  war:  $\varphi = 2 \cdot \alpha$  Das können wir einsetzen und erhalten für die Dreiecksfläche:

$$A_{\Delta} = r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi$$

---

<sup>3</sup>siehe beispielsweise hier: <https://www.matheretter.de/wiki/additionstheoreme>

Mit dieser Erkenntnis können wir erneut den Ansatz für die Kreisabschnittfläche als Differenz zwischen Kreissektorfläche und Dreieckfläche machen.

$$A = A_S - A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot r^2 - r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi$$

Zusammengefasst:  $A = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (\varphi - \sin \varphi)$

Damit haben wir eine Formel, die zur Berechnung der Kreisabschnittfläche lediglich den Kreisradius  $r$  und den Mittelpunktswinkel  $\varphi$  benötigt.

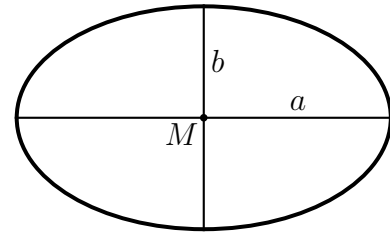
Prüfen wir sicherheitshalber auch hier nach, ob diese Formel auch gilt, wenn der Mittelpunktswinkel  $\varphi$  größer als  $\pi$  ist (bzw. größer als  $180^\circ$ ). Wir wissen, dass  $\sin \varphi$  **positiv** ist für  $0 < \varphi < \pi$ , aber **negativ** für  $\pi < \varphi < 2\pi$ . Das bedeutet, dass in der Klammer im Bereich großer Winkel ein **negativer** Wert subtrahiert wird, also eigentlich eine Addition erfolgt, genau so, wie wir es erwarten. Wir können somit diese Formel für beliebige Winkel im Bereich  $0 < \varphi < 2\pi$  verwenden.

Es gibt noch ein paar weitere Formeln zu Kreisabschnittberechnung, auf die ich hier aber nicht eingehen möchte. Sie kommen zur Berechnung ohne den Mittelpunktswinkel  $\varphi$  aus. Bei Interesse kann man sie beispielsweise hier finden:

<https://de.wikipedia.org/wiki/kreissegment>

## 2.4 Ellipse

Eine Ellipse ist im Prinzip eigentlich ein „plattgedrückter“ Kreis. Wegen dieser Unsymmetrie gibt es bei der Ellipse keinen Radius  $r$ , wie beim Kreis. Stattdessen hat man hier zwei sogenannte **Halbachsen**, meist mit  $a$  und  $b$  bezeichnet. Diese Halbachsen werden vom Mittelpunkt  $M$  bis zur Randlinie der Ellipse gemessen, wobei die **große Halbachse  $a$**  die **maximal** mögliche Länge darstellt und die **kleine Halbachse  $b$**  die **minimal** mögliche.



Stellen wir uns vorübergehend den Kreis als Spezialfall einer Ellipse mit gleichlangen Halbachsen  $a=b=r$  vor. Der Flächeninhalt des Kreises wird berechnet mit:

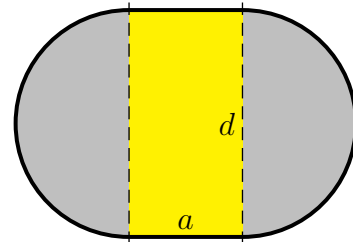
$$A = 2\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot r \cdot r$$

Im Kreis heißen beide Halbachsen  $r$ . Auch wenn dies kein Beweis im mathematischen Sinne ist, können wir uns vorstellen, dass wir die beiden  $r$  in dieser Formel nur durch die beiden Halbachsen  $a$  und  $b$  ersetzen müssen, um die Rechenformel für die Ellipsenfläche zu erhalten. Tatsächlich lässt sich die Ellipsenfläche mit dieser Formel berechnen:

$$A = 2\pi \cdot a \cdot b$$

## 2.5 Oval

Eine Ellipse wird manchmal auch mit einem **Oval** verwechselt. Das ist aber etwas anderes. Nebenstehend ist ein Oval dargestellt. Ein Oval ist ein Kreis mit dem Durchmesser  $d$ , der in der Mitte durchgeschnitten und auseinander gezogen wurde, wobei die dadurch entstandene Lücke durch zwei Geraden mit der Länge  $a$  geschlossen wurde. Nebenstehend sind links und rechts die beiden grau eingefärbten Halbkreise erkennbar, zwischen den gestrichelten Hilfslinien liegen die beiden geraden Strecken. Dadurch entsteht zwischen den beiden Halbkreisen ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $d$ , das hier gelb markiert ist.



Wir können somit bei der Flächenberechnung von einem Vollkreis (wenn auch zerschnitten) und einem Rechteck ausgehen. Alle Flächenformeln zum Kreis und zum Rechteck finden hier Anwendung. Daraus ergibt sich:

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 + a \cdot d$$

Soll der **Umfang** eines Ovals bestimmt werden, dann kommt die Umfangsformel eines Vollkreises zur Anwendung. Zum Kreisumfang muss dann nur noch zwei mal die Länge  $a$  addiert werden:

$$U = \pi \cdot d + 2 \cdot a$$

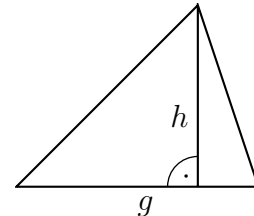
Das klassische Beispiel für ein Oval ist die Laufbahn in einem Stadion. Hier haben wir zwei halbkreisförmige Laufstreckenbereiche, die durch zwei gerade Laufstrecken verbunden sind.

## 3 Eckige Flächen

### 3.1 Dreiecke

#### 3.1.1 Allgemeines Dreieck

Zur Berechnung der Fläche eines Dreieckes benötigt man eine Grundseite und die **zugehörige** Höhe. Man kann **jede beliebige** Seite als Grundseite wählen, entscheidend ist aber, dass die dazugehörige Höhe dazu einen **Rechten Winkel** bildet. Die Dreieckfläche wird damit wie folgt berechnet:



*Die Fläche eines Dreieckes ist das halbe Produkt aus einer Grundseite und der zugehörigen Höhe.*

Nennt man die Grundseite  $g$  und die Höhe  $h$ , dann lautet die Formel für die Dreieckfläche:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

#### 3.1.2 Rechtwinkliges Dreieck

Ist das Dreieck **Rechtwinklig**, dann wählt man sinnvollerweise eine der Katheten als Grundseite. Wegen des Rechten Winkels ist dann die andere Kathete die Höhe. Die Fläche eines rechtwinkligen Dreieckes wird damit wie folgt berechnet:

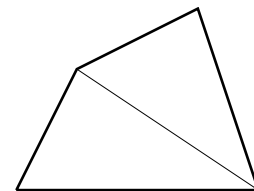
*Die Fläche eines rechtwinkligen Dreieckes ist das halbe Produkt aus den beiden Katheten.*

Wenn wir die beiden Katheten mit  $a$  und  $b$  bezeichnen, dann lautet die Formel für die Fläche eines rechtwinkligen Dreieckes:

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

### 3.2 Vierecke

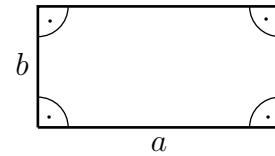
Für das allgemeine Viereck ohne Besonderheiten gibt es keine Rechenformel. Man kann es jedoch immer durch eine Diagonale in zwei Dreiecke aufteilen, die dann mit der Dreieckformel berechnet werden können.



Es gibt jedoch eine ganze Reihe spezieller Vierecke, für die es jeweils eigene Berechnungsformeln gibt.

### 3.2.1 Rechteck

**allgemeines Rechteck** Ein Viereck mit vier Rechten Winkeln nennt man **Rechteck**. Die gegenüberliegenden Seiten sind dabei jeweils gleich lang. Die Fläche eines Rechteckes ist sehr einfach zu berechnen.

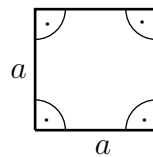


*Die Fläche eines Rechteckes ist das Produkt aus den beiden Rechteckseiten.*

Bezeichnen wir die Rechteckseiten mit  $a$  und  $b$ , dann erhalten wir diese Formel:

$$A = a \cdot b$$

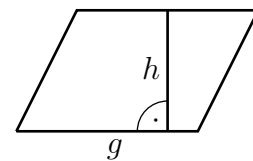
**Quadrat** Als Spezialfall eines Rechteckes gibt es noch das Quadrat. Hier sind alle Seiten gleich lang. Wenn die Quadratseiten mit  $a$  bezeichnet werden, lautet die Berechnungsformel:



$$A = a^2$$

### 3.2.2 Parallelogramm

Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem die **gegenüberliegenden** Seiten jeweils parallel verlaufen. Dadurch sind sie auch jeweils gleich lang. Man kann ein Rechteck daher auch als einen Spezialfall eines Parallelogrammes mit Rechten Winkeln betrachten.



Zur Berechnung der Fläche eines Parallelogramms benötigt man eine Grundseite und die **zugehörige** Höhe. Welche Seite man als Grundseite wählt, ist gleichgültig, die Höhe muss nur zu dieser Seite einen Rechten Winkel bilden. Damit ist die Parallelogrammfläche recht einfach zu berechnen.

*Die Fläche eines Parallelogramms ist das Produkt aus einer Grundseite und der zugehörigen Höhe.*

Bezeichnet man die Grundseite mit  $g$  und die Höhe mit  $h$ , dann erhält man diese Formel:

$$A = g \cdot h$$

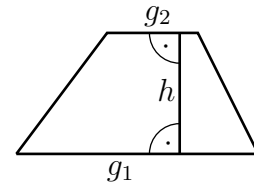


### 3.2.3 Trapez

Ein Trapez ist ein Viereck mit **zwei parallelen** Seiten. Ein Parallelogramm ist somit eigentlich ein Spezialfall eines Trapezes.

Die beiden parallelen Seiten werden **erste** und **zweite Grundseite** genannt, den **Abstand** der Grundseiten nennt man **Höhe**.

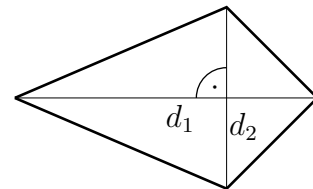
Wenn man die beiden Grundseiten mit  $g_1$  und  $g_2$  und die Höhe mit  $h$  bezeichnet, erhält man folgende Formel zur Berechnung der Fläche eines Trapezes:



$$A = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h$$

### 3.2.4 Drachenviereck

Ein Drachenviereck ist ein Viereck, bei dem jeweils zwei benachbarten Seiten gleich lang sind. Das führt dazu, dass sich die beiden Diagonalen rechtwinklig schneiden.



Weil das so ist, eignen sich die Diagonalen gut zur Berechnung der Fläche.

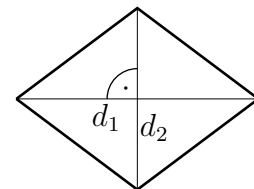
*Die Fläche eines Drachenviereckes ist das halbe Produkt aus den beiden Diagonalen.*

Bezeichnet man die Diagonalen mit  $d_1$  und  $d_2$ , dann erhält man folgende Formel zur Berechnung der Fläche:

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

### 3.2.5 Raute

Die Raute ist ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Weil das dazu führt, dass die sich jeweils gegenüberliegenden Seiten parallel sind, kann man eine Raute sowohl als Spezialfall eines Parallelogramms, als auch als Spezialfall eines Drachenvierecks betrachten. Daher kann man die Fläche sowohl mit der Formel für das Drachenviereck, als auch mit der Formel für das Parallelogramm bestimmen. Was günstiger ist, hängt schlicht davon ab, welche Größen bekannt sind. Kennt man die Diagonalen – wie in der Skizze angedeutet – dann nimmt man die Drachenviereckformel, kennt man eine Grundseite mit zugehöriger Höhe, dann verwendet man die Parallelogrammformel. Die Formeln hier zu wiederholen erübrigt sich meines Erachtens.



## 4 Wohnflächenberechnung

Etwas ganz anderes als die „mathematische“ Flächenberechnung ist die „juristische“ Flächenberechnung, hier die Berechnung einer Wohnfläche. Dabei geht es um die Grundfläche im Grundriss, die letztlich für den Mietpreis entscheidend ist. Meist haben die Flächen ein rechteckiges Format, es gibt aber gelegentlich auch andere Formen wie beispielsweise ein Trapez oder (noch seltener) ein Dreieck.

Zunächst kommen die gleichen Formeln zum Einsatz, die hier schon im „mathematischen“ Teil beschrieben worden sind. Dann sind aber noch zwei Aspekte wichtig.

- Sind Dachschrägen vorhanden, die die Zimmerhöhe beeinträchtigen?
- Welche Zweckbestimmung hat der jeweilige Raum?

### 4.1 Dachschrägen

Beginnen wir mit Teil 1. Sind in dem Raum Dachschrägen vorhanden, gelten folgende Regelungen:

- *Alle Raumteile mit mindestens 2 Meter Höhe werden zu 100% berücksichtigt.*
- *Alle Raumteile mit einer Höhe zwischen 1 und 2 Meter Höhe werden zu 50% berücksichtigt.*
- *Alle Raumteile mit einer Höhe unter 1 Meter Höhe werden nicht berücksichtigt.*

### 4.2 Beispiel 1

Ein Wohnraum hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum ist 5 Meter lang und 4 Meter breit. Nebenstehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Bekannt sind diese Maße:

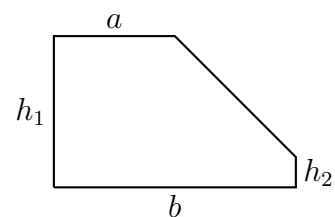
$$a = 2 \text{ m}$$

$$b = 4 \text{ m}$$

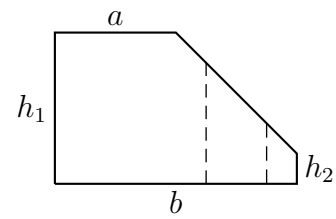
$$h_1 = 2,5 \text{ m}$$

$$h_2 = 0,5 \text{ m}$$

Gesucht ist die Wohnfläche dieses Raumes.



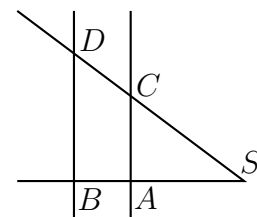
**Lösung:** Zunächst tritt sofort folgendes Problem auf: In welchen Bereichen ist die Deckenhöhe mindestens 2 Meter, wo zwischen 1 und 2 Meter und wo unter 1 Meter? In der nebenstehenden Skizze sind diese Bereiche markiert. Wo aber liegen diese Bereiche? Die Grenzen müssen irgendwie berechnet werden.



Hier hilft der **Zweite Strahlensatz** weiter. Er besagt folgendes:

*An einem von zwei Parallelen geschnittenen Zweistrahl ist das Verhältnis der Parallelenabschnitte gleich dem Verhältnis der zugehörigen Strahlenabschnitte.*

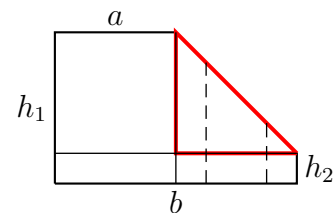
Was bedeutet das? Um den Lehrsatz etwas besser zu verstehen habe ich nebenstehend eine zu den Strahlensätzen gehörende Planfigur erstellt. Die Schnittpunkte zwischen Strahlen und Parallelen sind mit den Bezeichnungen  $A$  bis  $D$ , den Schnittpunkt der Strahlen mit  $S$  bezeichnet. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann der Strahlensatz als Formel:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}}$$

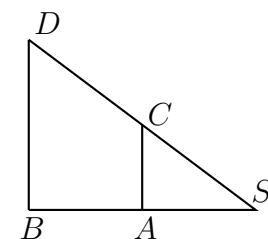
Hierbei bedeutet  $\overline{AC}$  die Strecke zwischen  $A$  und  $C$ , usw.

Das können wir nun auf unsere Planskizze der Seitenwand übertragen. Hier habe ich noch zwei weitere Hilfslinien eingetragen, eine waagerechte und eine senkrechte.



Von besonderem Interesse ist das zusätzlich eingezeichnete rote Dreieck. In dem können wir nämlich den eben angesprochenen Zweiten Strahlensatz anwenden.

Damit besser Bezeichnungen eingetragen werden können, ist dieses Dreieck nebenstehend etwas größer dargestellt. Anstelle der beiden Teilhöhen (die gestrichelten Linien) habe ich stellvertretend nur eine einzige eingetragen. Das ist die Strecke  $\overline{AC}$ . Dann ist die Länge der Strecke  $\overline{BD}$  die Differenz der Höhen:



$$\overline{BD} = h_1 - h_2 = 2,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 2 \text{ m}$$

Auch die Strecke  $\overline{SB}$  kann ausgerechnet werden:

$$\overline{SB} = b - a = 4 \text{ m} - 2 \text{ m} = 2 \text{ m}$$

Jetzt möchte ich den Bereich ausrechnen, in dem die Deckenhöhe weniger als 1 Meter beträgt. In der Planskizze ist das die Strecke  $\overline{SA}$ . Weil die Strecke  $\overline{SA}$  um die Höhe  $h_2$  über dem Fußbodenniveau liegt, ist die Strecke  $\overline{AC}$  um diesen Wert kürzer.

$$\overline{AC} = 1 \text{ m} - h_2 = 1 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 0,5 \text{ m}$$

Mit diesen Werten kann nun die Strecke  $\overline{SA}$  mit dem Zweiten Strahlensatz berechnet werden.

Ein Tipp: Es ist immer sinnvoll, mit der **gesuchten** Größe im Zähler anzufangen.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} \\ \frac{0,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} &= \frac{\overline{SA}}{2 \text{ m}} \quad | \cdot 2 \text{ m} \\ 0,5 \text{ m} &= \overline{SA} \end{aligned}$$

Damit ist klar: In einem Streifen von 50 cm Breite an der rechten Seite wird keine Fläche für die Wohnflächenberechnung gezählt.

Jetzt kommt noch der Abstand von der rechten Wand, bei der die Höhe genau 2 Meter beträgt. Weil ich wieder die selbe Planskizze verwenden möchte, heißt diese Länge ebenfalls  $\overline{SA}$ . Daher muss die Strecke  $\overline{AC}$  hierfür neu berechnet werden.

$$\overline{AC} = 2 \text{ m} - h_2 = 2 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 1,5 \text{ m}$$

Wieder wird der Zweite Strahlensatz angewendet:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} &= \frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} \\ \frac{1,5 \text{ m}}{2 \text{ m}} &= \frac{\overline{SA}}{2 \text{ m}} \quad | \cdot 2 \text{ m} \\ 1,5 \text{ m} &= \overline{SA} \end{aligned}$$

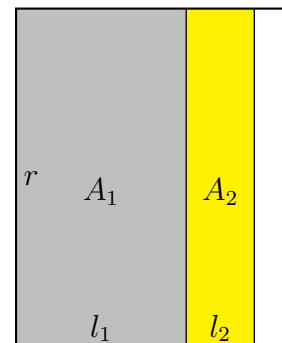
Ergebnis: In einem Abstand von 1,5 Metern von der rechten Wand ist die Deckenhöhe genau 2 Meter.

Jetzt können wir den Grundriss skizzieren. In diesem Grundriss gibt es drei Bereiche:

Im linken grauen Bereich (Fläche  $A_1$ ) ist die Deckenhöhe über 2 Meter. Hier wird die Fläche voll berechnet.

Im mittleren gelben Bereich (Fläche  $A_2$ ) ist die Deckenhöhe zwischen 1 und 2 Meter. Hier wird die Fläche nur zu 50% berechnet.

Im rechten weißen Bereich ist die Deckenhöhe unter 1 Meter. Hier wird die Fläche nicht berechnet.



Beginnen wir mit der Fläche  $A_1$ . Ihr rechter Rand ist – wie eben berechnet – 1,5 Meter von der rechten Wand entfernt. Damit und mit der Raumbreite  $b = 4$  m kann die Rechteckseite  $l_1$  von  $A_1$  berechnet werden.

$$l_1 = b - 1,5 \text{ m} = 4 \text{ m} - 1,5 \text{ m} = 2,5 \text{ m}$$

Mit der Raumlänge  $r = 5$  m und  $l_1$  kann nun  $A_1$  berechnet werden:

$$A_1 = r \cdot l_1 = 5 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} = 12,5 \text{ m}^2$$

Der rechte Rand der Fläche  $A_2$  liegt 0,5 Meter vom rechten Rand entfernt. Damit und mit  $l_1$  und  $b$  kann nun  $l_2$  berechnet werden.

$$l_2 = b - l_1 - 0,5 \text{ m} = 4 \text{ m} - 2,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 1 \text{ m}$$

$$A_2 = r \cdot l_2 = 5 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 5 \text{ m}^2$$

Jetzt kommen wir endlich zur Wohnfläche:

$$\begin{aligned} A_{\text{Wohn}} &= 100\% \cdot A_1 + 50\% \cdot A_2 \\ &= 1 \cdot 12,5 \text{ m}^2 + 0,5 \cdot 5 \text{ m}^2 \\ A_{\text{Wohn}} &= 15 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Wohnfläche des Raumes beträgt  $15 \text{ m}^2$ .

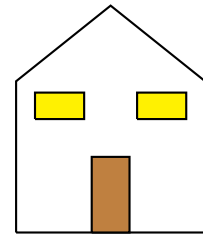
## 5 Übungsaufgaben

### 5.1 Aufgabe 1

In einem Kindergarten soll ein rechteckiger Sandkasten mit 3 Meter Breite und 5 Meter Länge angelegt werden. Dazu muss auf dieser Fläche die Erde 10 Zentimeter tief ausgehoben werden. Wenn der Hausmeister das mit einem Spaten macht, benötigt er pro Quadratmeter 10 Minuten. Wie lange wäre er beschäftigt?

### 5.2 Aufgabe 2

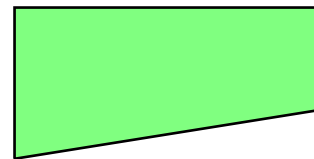
Eine Fassade nach nebenstehendem Bild soll angestrichen werden. Die Front hat eine Breite von 5 Metern. In der Mitte ist sie 6 Meter hoch, an den Seiten 4 Meter. Die Tür ist 1 Meter breit und 2 Meter hoch. Die Fenster haben je eine Breite von 1,80 Metern und sind 90 Zentimeter hoch.



Die Fenster und die Tür werden **nicht** mitgestrichen. Prüfen Sie rechnerisch, ob ein Eimer mit 5 Liter Inhalt ausreicht. Ein Liter reicht für vier Quadratmeter.

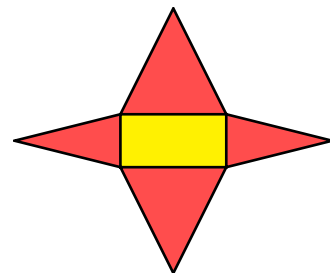
### 5.3 Aufgabe 3

Nebenstehend ist eine Rasenfläche auf einem Grundstück dargestellt. Die Rasenfläche hat eine Gesamtlänge von 36 Metern. Auf der Westseite ist es 15 Meter und auf der Ostseite 10 Meter breit. Die Grundstücksecken an der Nordseite stellen Rechte Winkel dar. Wie lange benötigt der Gärtner für das Mähen der Rasenfläche, wenn er in 6 Minuten eine Fläche von 50 Quadratmetern mähen kann?



### 5.4 Aufgabe 4

Nebenstehendes Muster soll als Weihnachtsdekoration aus farbigem Karton hergestellt werden. Die Dreiecke sollen rotfarbig sein, das Rechteck gelb. Damit dieser Weihnachtsstern zusammenhält, wird zunächst die Gesamtfigur aus rotem Karton ausgeschnitten. Anschließend wird das gelbe Rechteck aufgeklebt. Das Rechteck ist 20 Zentimeter lang und 10 Zentimeter breit. Alle Dreiecke sind gleichschenkelig und haben eine Höhe von je 20 Zentimeter. Der verwendete Karton hat ein Gewicht von 250 Gramm je Quadratmeter. Wieviel Gramm wiegt der fertige Weihnachtsstern?

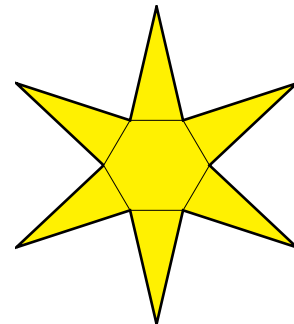


## 5.5 Aufgabe 5

Nebenstehender Stern soll aus einem DIN-A4-Blatt ausgeschnitten werden. Ein DIN-A4-Blatt ist 210 Millimeter breit und 297 Millimeter lang.

Der Stern besteht aus einem regelmäßigen Sechseck in der Mitte und sechs gleichen gleichschenkligen Dreiecken darum herum. Das Sechseck hat eine Seitenlänge von je 4 Zentimetern. Der Abstand von je zwei sich gegenüberliegenden Seiten beträgt 6,9 Zentimeter, die Entfernung zweier sich gegenüberliegenden Ecken 8 Zentimeter. Alle Dreiecke haben eine Höhe von 8,6 Zentimetern.

Wieviel Prozent Verschnitt ergibt sich durch das Ausschneiden aus einem DIN-A4-Blatt?



## 5.6 Aufgabe 6

Die Fläche des nebenstehenden Trapezes soll berechnet werden.

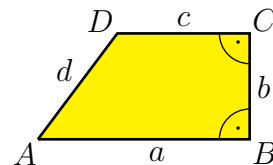
Gegeben sind folgende Maße:

$$a = 24 \text{ cm}$$

$$b = 12 \text{ cm}$$

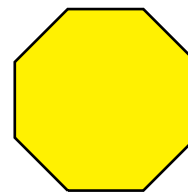
$$d = 15 \text{ cm}$$

Bei  $B$  und  $C$  liegt jeweils ein rechter Winkel.



## 5.7 Aufgabe 7

Auf einem Hof soll ein Bereich farbig gepflastert werden, der die Form eines regelmäßigen Achteckes dargestellt. Das bedeutet, dass alle Winkel und alle Seiten gleich sind. Alle Seiten haben eine Länge von 2 Metern, alle Winkel betragen  $135^\circ$ .

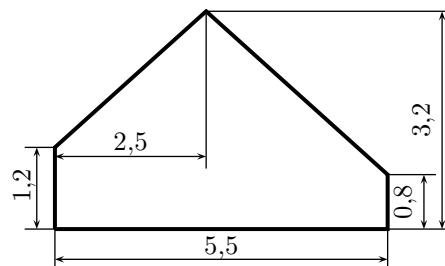


Berechnen Sie die Gesamtfläche dieses Achteckes!

## 5.8 Aufgabe 8

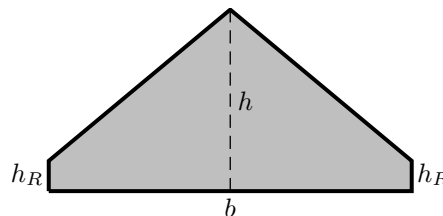
Ein Wohnraum im ausgebauten Dachboden hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum ist 6 Meter lang und 5,5 Meter breit. Nebenstehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Bekannt sind die eingetragenen Maße, die alle in der Einheit *Meter* angegeben sind.

Gesucht ist die Wohnfläche dieses Raumes.



## 5.9 Aufgabe 9

Ein Wohnraum im ausgebauten Dachboden hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum hat eine Länge von  $l = 8$  m und eine Breite von  $b = 6$  m. In der Mitte hat der Raum eine Höhe von  $h = 3$  m, an den Rändern beträgt die Raumhöhe  $h_R = 50$  cm. Nebstehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Die Form der Wand ist symmetrisch. Gesucht ist die gesamte Wohnfläche dieses Raumes.



**Anmerkung:** Manchmal gibt es Anwendungsaufgaben, bei denen man nicht „blind“ die mathematischen Regeln anwenden darf, weil man dann zu falschen Ergebnissen gelangt. Ein paar Beispiele dazu finden Sie mit den zugehörigen Lösungen hier:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/sonder.pdf>



## 6 Lösungen der Übungsaufgaben

### 6.1 Aufgabe 1

In einem Kindergarten soll ein rechteckiger Sandkasten mit 3 Meter Breite und 5 Meter Länge angelegt werden. Dazu muss auf dieser Fläche die Erde 10 Zentimeter tief ausgehoben werden. Wenn der Hausmeister das mit einem Spaten macht, benötigt er pro Quadratmeter 10 Minuten. Wie lange wäre er beschäftigt?

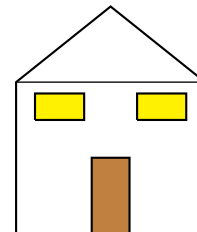
**Lösung:** Der Sandkasten stellt ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a = 3\text{ m}$  und  $b = 5\text{ m}$  dar. Die Rechteckformel wird verwendet.

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b \\ &= 3\text{ m} \cdot 5\text{ m} \\ A &= 15\text{ m}^2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Der Hausmeister benötigt für jeden Quadratmeter 10 Minuten. Er wäre also  $15\text{ m}^2 \cdot 10 \frac{\text{min}}{\text{m}^2} = 150$  Minuten oder umgerechnet 2 Stunden und 30 Minuten beschäftigt.

## 6.2 Aufgabe 2

Eine Fassade nach nebenstehendem Bild soll angestrichen werden. Die Front hat eine Breite von 5 Metern. In der Mitte ist sie 6 Meter hoch, an den Seiten 4 Meter. Die Tür ist 1 Meter breit und 2 Meter hoch. Die Fenster haben je eine Breite von 1,80 Metern und sind 90 Zentimeter hoch.



Die Fenster und die Tür werden **nicht** mitgestrichen. Prüfen Sie rechnerisch, ob ein Eimer mit 5 Liter Inhalt ausreicht. Ein Liter reicht für vier Quadratmeter.

**Lösung:** Zunächst wird die Frontfläche in ein Rechteck und ein Dreieck zerlegt. Ist diese Frontfläche bestimmt, müssen die Flächen von Fenster und Tür davon subtrahiert werden.

Beginnen wir mit der Rechteckfläche. Ich nenne sie  $A_{\square}$ .

$$A_{\square} = a \cdot b = 4 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$$

Es folgt die Dreieckfläche  $A_{\triangle}$ . Die Grundseite des Dreieckes ist die Frontbreite mit  $g = 5 \text{ m}$ . Die Dreieckshöhe  $h$  ist die Differenz aus der Fronthöhe in der Mitte und der Fronthöhe am Rand.

$$h = 6 \text{ m} - 4 \text{ m} = 2 \text{ m}$$

$$A_{\triangle} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{5 \text{ m} \cdot 2 \text{ m}}{2} = 5 \text{ m}^2$$

Zusammengesetzt ergibt das die gesamte Frontfläche  $A_{Fr}$ .

$$A_{Fr} = A_{\square} + A_{\triangle} = 20 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^2 = 25 \text{ m}^2$$

Es folgt die Berechnung der Türfläche  $A_T$ .

$$A_T = a \cdot b = 1 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \text{ m}^2$$

Jetzt wird die Fläche eines Fensters  $A_{Fe}$  berechnet. Hierzu muss die Fensterhöhe von 90 Zentimetern noch in Meter umgewandelt werden.

$$A_{Fe} = a \cdot b = 1,80 \text{ m} \cdot 0,90 \text{ m} = 1,62 \text{ m}^2$$

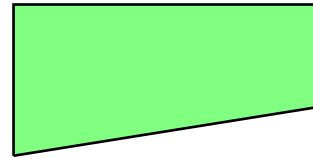
Damit kann die gesamte zu streichende Fläche berechnet werden.

$$A_{ges} = A_{Fr} - A_T - 2 \cdot A_{Fe} = 25 \text{ m}^2 - 2 \text{ m}^2 - 2 \cdot 1,62 \text{ m}^2 = 19,76 \text{ m}^2$$

Ergebnis: Ein Eimer mit 5 Litern zu je  $4 \text{ m}^2$  reicht für  $5 \cdot 4 \text{ m}^2 = 20 \text{ m}^2$ . Also reicht ein Eimer (knapp) aus.

### 6.3 Aufgabe 3

Nebenstehend ist eine Rasenfläche auf einem Grundstück dargestellt. Die Rasenfläche hat eine Gesamtlänge von 36 Metern. Auf der Westseite ist es 15 Meter und auf der Ostseite 10 Meter breit. Die Grundstücksecken an der Nordseite stellen Rechte Winkel dar. Wie lange benötigt der Gärtner für das Mähen der Rasenfläche, wenn er in 6 Minuten eine Fläche von 50 Quadratmetern mähen kann?



**Lösung:** Zunächst wird die Rasenfläche berechnet. Sie hat die Form eines Trapezes. Die parallelen Seiten, die die Grundseiten  $g_1$  und  $g_2$  darstellen, sind die westliche und die östliche Begrenzung mit 15 und 10 Metern Länge. Die Länge der Nordseite mit 36 Metern Länge ist dann die Höhe  $h$  des Trapezes.

$$A = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{15 \text{ m} + 10 \text{ m}}{2} \cdot 36 \text{ m} = 450 \text{ m}^2$$

Die Zeit für die Mäharbeit kann mit einem Dreisatz berechnet werden.<sup>4</sup>

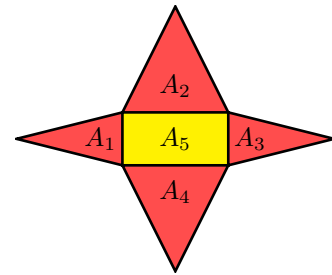
$$\begin{array}{rcl}
 50 \text{ m}^2 & \hat{=} & 6 \text{ min} \\
 450 \text{ m}^2 & \hat{=} & ? \text{ min} \\
 \hline
 : 50 \downarrow & & \downarrow : 50 \\
 50 \text{ m}^2 & \hat{=} & 6 \text{ min} \\
 1 \text{ m}^2 & \hat{=} & \frac{6 \text{ min}}{50} \\
 \cdot 450 \downarrow & & \downarrow \cdot 450 \\
 450 \text{ m}^2 & \hat{=} & \frac{6 \text{ min} \cdot 450}{50} = 54 \text{ min}
 \end{array}$$

Ergebnis: Der Gärtner benötigt zum Mähen der Rasenfläche 54 Minuten.

<sup>4</sup>Näheres zum Dreisatz siehe hier: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/3satz.pdf>

## 6.4 Aufgabe 4

Nebenstehendes Muster soll als Weihnachtsdekoration aus farbigem Karton hergestellt werden. Die Dreiecke sollen rot-farbig sein, das Rechteck gelb. Damit dieser Weihnachtsstern zusammenhält, wird zunächst die Gesamtfigur aus rotem Karton ausgeschnitten. Anschließend wird das gelbe Rechteck aufgeklebt. Das Rechteck ist 20 Zentimeter lang und 10 Zentimeter breit. Alle Dreiecke sind gleichschenkelig und haben eine Höhe von je 20 Zentimeter. Der verwendete Karton hat ein Gewicht von 250 Gramm je Quadratmeter. Wieviel Gramm wiegt der fertige Weihnachtsstern?



**Lösung:** Zunächst werden alle Teilflächen bezeichnet, beispielsweise wie hier durch Hineinschreiben eines passenden Namens. Die Flächen  $A_1$  und  $A_3$  sind identisch, ebenso die Flächen  $A_2$  und  $A_4$ . Somit gibt es **drei unterschiedliche** Flächen, die berechnet werden müssen.

**Berechnung eines kleinen Dreieckes:**

$$A_1 = A_3 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{10 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{2} = 100 \text{ cm}^2$$

**Berechnung eines großen Dreieckes:**

$$A_2 = A_4 = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{2} = 200 \text{ cm}^2$$

**Berechnung des Rechteckes:**

$$A_5 = a \cdot b = 20 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 200 \text{ cm}^2$$

**Gesamtfläche Rot:**

$$A_{rot} = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + A_5 = 2 \cdot 100 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 200 \text{ cm}^2 + 200 \text{ cm}^2 = 800 \text{ cm}^2$$

**Gesamtfläche alle Pappe:**

$$A_{ges} = A_{rot} + A_5 = 800 \text{ cm}^2 + 200 \text{ cm}^2 = 1000 \text{ cm}^2 = 0,1 \text{ m}^2$$

**Gesamtgewicht:**

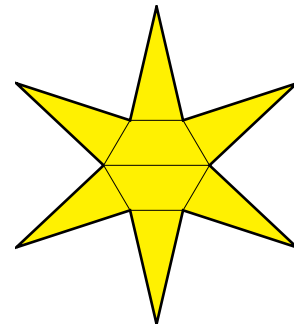
$$m = 0,1 \text{ m}^2 \cdot 250 \frac{\text{g}}{\text{m}^2} = 25 \text{ g}$$

Ergebnis: Der Pappstern wiegt 25 Gramm.

## 6.5 Aufgabe 5

Nebenstehender Stern soll aus einem DIN-A4-Blatt ausgeschnitten werden. Ein DIN-A4-Blatt ist 210 Millimeter breit und 297 Millimeter lang.

Der Stern besteht aus einem regelmäßigen Sechseck in der Mitte und sechs gleichen gleichschenkligen Dreiecken darum herum. Das Sechseck hat eine Seitenlänge von je 4 Zentimetern. Der Abstand von je zwei sich gegenüberliegenden Seiten beträgt 6,9 Zentimeter, die Entfernung zweier sich gegenüberliegenden Ecken 8 Zentimeter. Alle Dreiecke haben eine Höhe von 8,6 Zentimetern.



Wieviel Prozent Verschnitt ergibt sich durch das Ausschneiden aus einem DIN-A4-Blatt?

**Lösung:** Es müssen zwei verschiedene Flächenformen berechnet werden, ein Sechseck und 6 gleiche Dreiecke. Beginnen wir mit dem Sechseck. Da wir keine Formel für ein Rechteck haben, muss diese Fläche in berechenbare Teilflächen zerlegt werden. Eine von mehreren Möglichkeiten ist hier angedeutet – eine Zerlegung in zwei Trapeze. Eine Trapezfläche nenne ich  $A_T$ .

$$A_T = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h = \frac{4 \text{ cm} + 8 \text{ cm}}{2} \cdot 3,45 \text{ cm} = 20,7 \text{ cm}^2$$

Eine Dreieckfläche nenne ich  $A_\Delta$ .

$$A_\Delta = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 8,6 \text{ cm}}{2} = 17,2 \text{ cm}^2$$

Damit kann die Gesamtfläche des Sterns  $A_S$  berechnet werden.

$$A_S = 2 \cdot A_T + 6 \cdot A_\Delta = 2 \cdot 20,7 \text{ cm}^2 + 6 \cdot 17,2 \text{ cm}^2 = 144,6 \text{ cm}^2$$

Die Gesamtfläche eines DIN-A4-Blattes  $A_D$  wird berechnet:

$$A_D = 21 \text{ cm} \cdot 29,7 \text{ cm} = 623,7 \text{ cm}^2$$

Die Fläche des Verschnittes  $A_V$  wird berechnet:

$$A_V = A_D - A_S = 623,7 \text{ cm}^2 - 144,6 \text{ cm}^2 = 479,1 \text{ cm}^2$$

Der Verschnitt wird in Prozent<sup>5</sup> berechnet:

$$P_s = \frac{P_w \cdot 100 \%}{G} = \frac{479,1 \text{ cm}^2 \cdot 100 \%}{623,7 \text{ cm}^2} = 76,8 \%$$

Ergebnis: Der Verschnitt beträgt 76,8 Prozent.

<sup>5</sup>Näheres zur Prozentrechnung siehe hier: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/prozent.pdf>

## 6.6 Aufgabe 6

Die Fläche des nebenstehenden Trapezes soll berechnet werden.

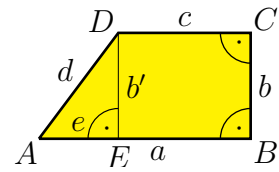
Gegeben sind folgende Maße:

$$a = 24 \text{ cm}$$

$$b = 12 \text{ cm}$$

$$d = 15 \text{ cm}$$

Bei  $B$  und  $C$  liegt jeweils ein Rechter Winkel.



**Lösung:** Wegen der beiden Rechten Winkel bei  $B$  und  $C$  ist die Seite  $b$  gleichzeitig die Höhe des Trapezes. Die Seiten  $a$  und  $c$  sind die beiden Grundseiten, die man ebenfalls in der Formel benötigt.

Weil die Seite  $c$  nicht bekannt ist, muss diese zunächst bestimmt werden. Dazu wird die Hilfslinie  $\overline{DE} = b'$  eingezeichnet, die eine Parallele zu  $b$  darstellt. Sie hat ebenfalls die Länge  $b$ . Dadurch ist das rechtwinklige Dreieck  $\triangle AED$  entstanden mit  $b'$  und  $e$  als Katheten und der Hypotenuse  $d$ . Mit dem Satz des Pythagoras<sup>6</sup> kann die Hilfslänge  $e$  berechnet werden.

$$\begin{aligned} e^2 + b'^2 &= d^2 && | - b'^2 \\ e^2 &= d^2 - b'^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \\ e &= \sqrt{d^2 - b'^2} \\ &= \sqrt{(15 \text{ cm})^2 - (12 \text{ cm})^2} \\ &= \sqrt{225 \text{ cm}^2 - 144 \text{ cm}^2} \\ &= \sqrt{81 \text{ cm}^2} \\ e &= 9 \text{ cm} \end{aligned}$$

Aus den Längen  $a$  und  $e$  ergibt sich  $c$ .

$$c = a - e = 24 \text{ cm} - 9 \text{ cm} = 15 \text{ cm}$$

Nun kann mit der Flächenformel die Trapezfläche berechnet werden.

$$\begin{aligned} A &= \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h \\ &= \frac{a + c}{2} \cdot b \\ &= \frac{24 \text{ cm} + 15 \text{ cm}}{2} \cdot 12 \text{ cm} \\ A &= 234 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

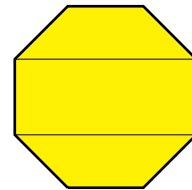
Ergebnis: Die Trapezfläche beträgt  $A = 234 \text{ cm}^2$ .

<sup>6</sup>Näheres zum Satz des Pythagoras siehe hier:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/pythagoras.pdf>

## 6.7 Aufgabe 7

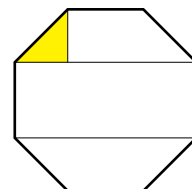
Auf einem Hof soll ein Bereich farbig gepflastert werden, der die Form eines regelmäßigen Achteckes dargestellt. Das bedeutet, dass alle Winkel und alle Seiten gleich sind. Alle Seiten haben eine Länge von 2 Metern, alle Winkel betragen  $135^\circ$ .



Berechnen Sie die Gesamtfläche dieses Achteckes!

**Lösung:** Zunächst kann die Gesamtfläche in ein Rechteck und zwei Trapeze aufgeteilt werden, wie oben dargestellt. Leider sind weder die Breite des Rechteckes noch die Höhe der Trapeze bekannt. Diese Größen müssen vorab bestimmt werden.

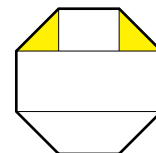
Es bietet sich an, die Aufteilung noch etwas weiter fortzusetzen, wie nebenstehend dargestellt. Ich möchte das Augenmerk auf das markierte Dreieck oben links richten. Das Dreieck ist rechtwinklig, die beiden Katheten sind gleich lang. Die Länge der Hypotenuse ist eine Seite des Achteckes. Sie ist mit 2 Metern bekannt.



In diesem Dreieck kann die Länge der Katheten mit Hilfe des Satzes des Pythagoras<sup>7</sup> berechnet werden. Ich benenne die Katheten mit  $k$  und die Hypotenuse mit  $h$ .

$$\begin{aligned} h^2 &= k^2 + k^2 \\ h^2 &= 2 \cdot k^2 & | \sqrt{\phantom{x}} \\ h &= \sqrt{2} \cdot k & | : \sqrt{2} \\ \frac{h}{\sqrt{2}} &= k \\ k &= \frac{2 \text{ m}}{\sqrt{2}} \\ k &= 1,414 \text{ m} \end{aligned}$$

Hiermit kann jetzt die Länge des Rechteckes in der Mitte berechnet werden. Aus Symmetriegründen gibt es auch auf der rechten Seite ein solches Dreieck mit der gleichen Kathetenlänge  $k$ . Die Rechtecklänge besteht dann aus einer Seitenlänge  $h$  und zwei Kathetenlängen  $k$ . Ich nenne die Rechtecklänge  $a$  und erhalte:



$$a = k + h + k = 1,414 \text{ m} + 2 \text{ m} + 1,414 \text{ m} = 4,828 \text{ m}$$

<sup>7</sup>Näheres zum Satz des Pythagoras siehe hier:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/pythagoras.pdf>

Jetzt kann die Rechteckfläche  $A_R$  berechnet werden.

$$A_R = a \cdot h = 4,828 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 9,656 \text{ m}^2$$

Die Trapeze haben die Höhe  $k$ , die erste Grundseite  $a$  und die zweite Grundseite  $h$ . Die Trapezfläche  $A_T$  wird berechnet:

$$A_T = \frac{a + h}{2} \cdot k = \frac{4,828 \text{ m} + 2 \text{ m}}{2} \cdot 1,414 \text{ m} = 4,827 \text{ m}^2$$

Damit kann die Gesamtfläche  $A$  berechnet werden.

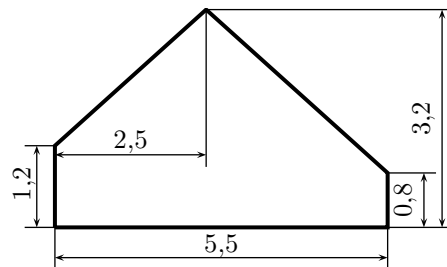
$$A = A_R + 2 \cdot A_T = 9,656 \text{ m}^2 + 2 \cdot 4,827 \text{ m}^2 = 19,31 \text{ m}^2$$

Ergebnis: Die Gesamtfläche der Pflasterung beträgt  $A = 19,31 \text{ m}^2$ .



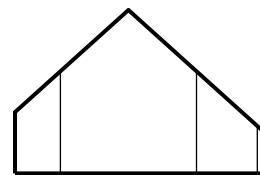
## 6.8 Aufgabe 8

Ein Wohnraum im ausgebauten Dachboden hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum ist 6 Meter lang und 5,5 Meter breit. Nebestehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Bekannt sind die eingetragenen Maße, die alle in der Einheit *Meter* angegeben sind.

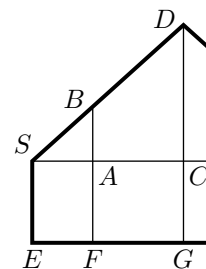


Gesucht ist die Wohnfläche dieses Raumes.

**Lösung:** Bevor mit der Wohnflächenberechnung begonnen werden kann, muss zunächst festgestellt werden, wo die Deckenhöhe **genau einen** bzw. **genau zwei** Meter beträgt, denn dort liegen die Grenzen für die Berechnungen. Die drei Stellen sind hier nebenstehend mit einer dünnen Linie eingezeichnet.



Beginnen wir mit der linken Linie in dem linken Teil der Wandfläche. Hier ist die Decke genau 2 Meter hoch. Dazu zeichne ich eine Planfigur mit dem linken Teil der Wand. Eingezeichnet wird außerdem noch eine waagerechte Hilfslinie in der Höhe der linken Wand sowie die Höhe zur Dachspitze. Die interessanten Punkte werden mit Bezeichnungen versehen.



Hier kann man die Grundfigur zur Anwendung der Strahlensätze erkennen. Die Strahlen beginnen bei  $S$  und verlaufen nach rechts Richtung  $C$  und nach schräg oben Richtung  $D$ . Die Parallelen sind die senkrechten Hilfslinien von  $b$  nach  $F$  und von  $D$  nach  $G$ .

Bekannt sind die Strecken  $\overline{SE} = 1,2\text{ m}$  (identisch mit den Strecken  $\overline{AF}$  und  $\overline{CG}$ ), die Strecke  $\overline{SC} = 2,5\text{ m}$ , die Strecke  $\overline{DG} = 3,2\text{ m}$  sowie die Strecke  $\overline{BF} = 2\text{ m}$ . Aus diesen Daten lassen sich die Parallelenabschnitte  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  berechnen. Somit kommt anschließend der **zweite** Strahlensatz zur Anwendung.

$$\overline{AB} = \overline{BF} - \overline{AF} = 2\text{ m} - 1,2\text{ m} = 0,8\text{ m}$$

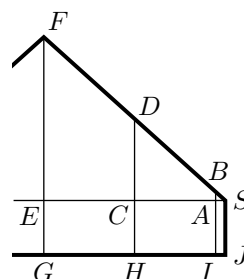
$$\overline{CD} = \overline{DG} - \overline{CG} = 3,2\text{ m} - 1,2\text{ m} = 2\text{ m}$$

Gesucht ist die Strecke  $\overline{SA}$ . Sie lässt sich nun mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \\ \frac{2,5 \text{ m}}{\overline{SA}} &= \frac{0,8 \text{ m}}{2 \text{ m}} \\ \frac{\overline{SA}}{2,5 \text{ m}} &= 0,4 \quad | \cdot 2,5 \text{ m} \\ \overline{SA} &= 1 \text{ m} \end{aligned}$$

Somit ist klar: In einem Streifen von 1 Meter Breite beträgt am linken Rand des Raumes die Deckenhöhe zwischen einem und zwei Meter, die zugehörige Fläche ist bei der Wohnflächenberechnung somit nur halb zu berücksichtigen.

Kümmern wir uns nun um den rechten Teil des Raumes. Hier gibt es zwei Grenzen bei der Raumhöhe, bei einem Meter (Strecke  $\overline{BI}$ ) und bei zwei Meter (Strecke  $\overline{DH}$ ). Bekannt ist die Strecke  $\overline{SJ} = 0,8 \text{ m}$  (identisch mit den Strecken  $\overline{AI}$ ,  $\overline{CH}$  und  $\overline{EG}$ ) und die Strecke  $\overline{FG} = 3,2 \text{ m}$ . Die Strecke  $\overline{SE}$  kann aus den angegebenen Daten errechnet werden.



$$\overline{SE} = 5,5 \text{ m} - 2,5 \text{ m} = 3 \text{ m}$$

Ich möchte als nächstes die Strecke  $\overline{SC}$  berechnen. Dazu betrachte ich den Zweistrahl der beiden Strahlen, die bei  $S$  beginnen und nach  $E$  bzw. nach  $F$  verlaufen. Die beiden senkrechten Hilfslinien durch  $F$  und  $G$  sowie durch  $D$  und  $H$  sind nun die Parallelen, auf die ich den zweiten Strahlensatz beziehen möchte. Dazu fehlen mir noch die Längen der Parallelenabschnitte  $\overline{CD}$  und  $\overline{EF}$ , die aber leicht aus den angegebenen Daten berechnet werden können.

$$\overline{CD} = \overline{DH} - \overline{CH} = 2 \text{ m} - 0,8 \text{ m} = 1,2 \text{ m}$$

$$\overline{EF} = \overline{FG} - \overline{EG} = 3,2 \text{ m} - 0,8 \text{ m} = 2,4 \text{ m}$$

Mit diesen Werten kann der zweite Strahlensatz zur Bestimmung der Strecke  $\overline{SC}$  angesetzt werden.

Zur Erinnerung: Es ist immer sinnvoll, mit der **gesuchten** Größe im Zähler anzufangen.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{SC}}{\overline{SE}} &= \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \\ \frac{\overline{SC}}{3 \text{ m}} &= \frac{1,2 \text{ m}}{2,4 \text{ m}} \\ \frac{\overline{SC}}{3 \text{ m}} &= 0,5 \quad | \cdot 3 \text{ m} \\ \overline{SC} &= 1,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Nun kommt die Strecke  $\overline{SA}$  an die Reihe. Zur Berechnung wird dazu die Länge der Strecke  $\overline{AB}$  benötigt. Die kann aus den gegebenen Werten berechnet werden.

$$\overline{AB} = \overline{BI} - \overline{AI} = 1 \text{ m} - 0,8 \text{ m} = 0,2 \text{ m}$$

Mit dem zweiten Strahlensatz kann der Ansatz zur Berechnung der Strecke  $\overline{SA}$  gemacht werden. Auch hier beginne ich mit der gesuchten Größe.

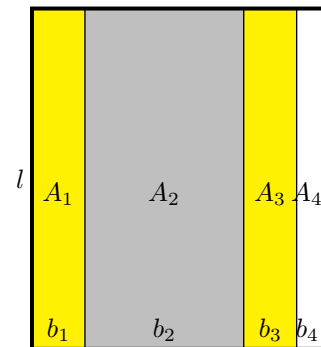
$$\begin{aligned} \frac{\overline{SA}}{\overline{SE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} \\ \frac{\overline{SA}}{3 \text{ m}} &= \frac{0,4 \text{ m}}{2,4 \text{ m}} && | \cdot 3 \text{ m} \\ \overline{SA} &= \frac{0,4 \text{ m}}{2,4 \text{ m}} \cdot 3 \text{ m} \\ \overline{SA} &= 0,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Jetzt können wir den Grundriss skizzieren. In diesem Grundriss gibt es vier Bereiche:

Die linke gelbe Fläche  $A_1$ : Hier liegt die Deckenhöhe zwischen 1 und 2 Meter, die Fläche wird nur zu 50% berücksichtigt.

Die grau Fläche  $A_2$  in der Mitte: Hier ist die Decke mehr als 2 Meter hoch, die Fläche wird zu 100% berücksichtigt.

Die rechte gelbe Fläche  $A_3$ : Hier liegt die Deckenhöhe zwischen 1 und 2 Meter, die Fläche wird nur zu 50% berücksichtigt.



Die weiße Fläche  $A_4$  ganz rechts: Hier liegt die Deckenhöhe unter 1 Meter, die Fläche wird nicht berücksichtigt.

Beginnen wir mit  $A_1$ . Die Streifenbreite  $b_1$  wurde im ersten Teil als  $b_1 = \overline{SA} = 1 \text{ m}$  berechnet, die Raumlänge  $l = 6 \text{ m}$  ist in der Aufgabenstellung angegeben.

$$A_1 = l \cdot b_1 = 6 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 6 \text{ m}^2$$

Die Breite  $b_2$  für die Fläche  $A_2$  muss noch ausgerechnet werden. Das geschieht mit  $\overline{SA} = 1 \text{ m}$  aus der linken Hälfte und  $\overline{SC} = 1,5 \text{ m}$  aus der rechten Hälfte.

$$b_2 = 5,5 \text{ m} - \overline{SA} - \overline{SC} = 5,5 \text{ m} - 1 \text{ m} - 1,5 \text{ m} = 3 \text{ m}$$

Hiermit kann  $A_2$  berechnet werden:

$$A_2 = l \cdot b_2 = 6 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} = 18 \text{ m}^2$$

Weiter geht es mit der Fläche  $A_3$ . Dafür wird die Breite  $b_3$  benötigt. In der Planfigur für die rechte Wandhälfte ist  $b_3$  mit der Strecke  $\overline{AC}$  identisch.

$$b_3 = \overline{AC} = \overline{SC} - \overline{SA} = 1,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 1 \text{ m}$$

Damit kann  $A_3$  berechnet werden.

$$A_3 = l \cdot b_3 = 6 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 6 \text{ m}^2$$

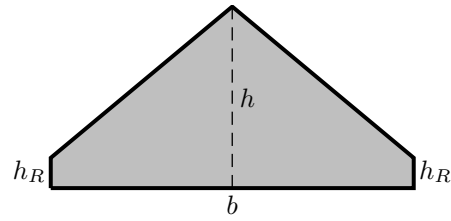
Aus allen drei Teilflächen wird nun die Gesamtfläche  $A$  berechnet.

$$\begin{aligned} A &= 50 \% \cdot A_1 + 100 \% \cdot A_2 + 50 \% \cdot A_3 \\ &= 0,5 \cdot 6 \text{ m}^2 + 1 \cdot 18 \text{ m}^2 + 0,5 \cdot 6 \text{ m}^2 \\ A &= 24 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die gesamte Wohnfläche beträgt:  $A = 24 \text{ m}^2$

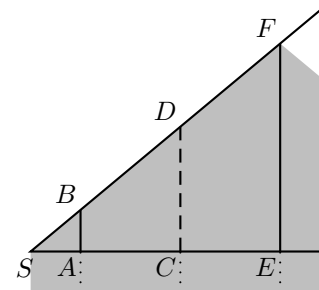
## 6.9 Aufgabe 9

Ein Wohnraum im ausgebauten Dachboden hat eine rechteckige Grundfläche. Der Raum hat eine Länge von  $l = 8 \text{ m}$  und eine Breite von  $b = 6 \text{ m}$ . In der Mitte hat der Raum eine Höhe von  $h = 3 \text{ m}$ , an den Rändern beträgt die Raumhöhe  $h_R = 50 \text{ cm}$ . Nebenstehend ist die Wand einer Längsseite abgebildet. Die Form der Wand ist symmetrisch. Gesucht ist die gesamte Wohnfläche dieses Raumes.



**Lösung:** Bevor die Wohnfläche berechnet werden kann, müssen die Bereiche bestimmt werden, in denen die Deckenhöhe unter 1 Meter, zwischen 1 und 2 Meter oder über 2 Meter beträgt. Ich beginne mit dem Randbereich unter 1 Meter.

Als Planfigur genügt wegen der Symmetrie der Wandfläche die linke Hälfte. In die Wandfläche habe ich einige Hilfslinien eingezeichnet und wichtige Punkte mit Buchstaben benannt. Der Punkt  $S$  liegt in 50 Zentimeter Höhe am linken Rand, wo die Dachschräge auf die Wand trifft. Eine waagerechte Hilfslinie verläuft in dieser Höhe durch die Punkte  $A$  und  $E$ . Weiterhin wurde die Raumhöhe  $h$  in Raummitte im Punkt  $F$  und die Hilfslinie bei der Raumhöhe von genau 1 Meter bei  $B$  eingetragen. Damit erhalten wir einen von Parallelen geschnittenen Zweistrahlsatz und können die Strahlensätze anwenden. Die gestrichelt miteingezeichnete Raumhöhe im Punkt  $D$  soll uns dabei zunächst nicht interessieren.



Die Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{EF}$  sind jeweils um die Rand-Raumhöhe  $h_R$  kürzer, als die jeweiligen Höhen.

$$\overline{AB} = 1 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 0,5 \text{ m}$$

$$\overline{EF} = 3 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 2,5 \text{ m}$$

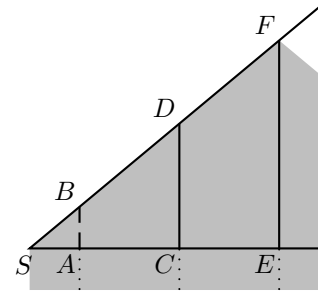
Auch die Strecke  $\overline{SE}$  kann berechnet werden. Es ist die halbe Raumbreite  $b$ .

$$\overline{SE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ m} = 3 \text{ m}$$

Die Lösung kann mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes angesetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{SA}}{\overline{SE}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} \\ \frac{\overline{SA}}{3 \text{ m}} &= \frac{0,5 \text{ m}}{2,5 \text{ m}} && | \cdot 3 \text{ m} \\ \overline{SA} &= \frac{0,5 \text{ m}}{2,5 \text{ m}} \cdot 3 \text{ m} \\ \overline{SA} &= 0,6 \text{ m} \end{aligned}$$

Als nächstes kümmern wir uns nun um die Grenze der Raumhöhe bei 2 Metern. Die Planfigur ist im Prinzip die selbe, jedoch interessiert hier nicht mehr die Strecke  $\overline{AB}$ . Deswegen ist sie hier nur gestrichelt eingezeichnet.



Die Strecken  $\overline{SE}$  und  $\overline{EF}$  haben wir eben schon berechnet, wir benötigen noch die Strecke  $\overline{CD}$ .

$$\overline{CD} = 2 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = 1,5 \text{ m}$$

Für die Wohnflächenberechnung benötigen wir eigentlich die Strecke  $\overline{AC}$ . Da wir den zweiten Strahlensatz nutzen müssen, weil Abschnitte auf den Parallelen involviert sind, müssen die Abschnitte auf dem Strahl, den wir verwenden wollen, immer im gemeinsamen Strahlenanfang  $S$  beginnen. Deswegen berechnen wir zunächst die Strecke  $\overline{SC}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\overline{SC}}{\overline{SE}} &= \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} \\ \frac{\overline{SC}}{3 \text{ m}} &= \frac{1,5 \text{ m}}{2,5 \text{ m}} && | \cdot 3 \text{ m} \\ \overline{SC} &= \frac{1,5 \text{ m}}{2,5 \text{ m}} \cdot 3 \text{ m} \\ \overline{SC} &= 1,8 \text{ m} \end{aligned}$$

Damit kann die Streifenbreite berechnet werden, in dem die Höhe zwischen 1 und 2 Meter liegt.

$$\overline{AC} = \overline{SC} - \overline{SA} = 1,8 \text{ m} - 0,6 \text{ m} = 1,2 \text{ m}$$

Dieser Streifen kommt wegen der Symmetrie des Raumes zwei mal vor. Weil in diesem Bereich die Fläche nur halb zur Wohnfläche zählt, nimmt man einfach nur einen Streifen.

$$A_{\text{halb}} = l \cdot \overline{AC} = 8 \text{ m} \cdot 1,2 \text{ m} = 9,6 \text{ m}^2$$

Der Bereich über 2 Meter liegt zwischen  $C$  und  $E$ . Diese Strecke kann berechnet werden.

$$\overline{CE} = \overline{SE} - \overline{SC} = 3 \text{ m} - 1,8 \text{ m} = 1,2 \text{ m}$$

Auch dieser Streifen liegt doppelt vor. Die volle Fläche kann berechnet werden.

$$A_{\text{voll}} = 2 \cdot l \cdot \overline{CE} = 2 \cdot 8 \text{ m} \cdot 1,2 \text{ m} = 19,2 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Wohn}} = A_{\text{halb}} + A_{\text{voll}} = 9,6 \text{ m}^2 + 19,2 \text{ m}^2 = 28,8 \text{ m}^2$$

Ergebnis: Die gesamte Wohnfläche beträgt:  $A = 28,8 \text{ m}^2$