Aufgaben zu Flächen und Trigonometrie

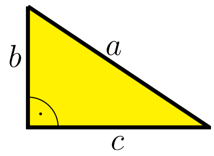
5. November 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben

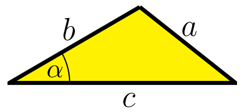
1.1 Aufgabe 1

Gegeben sind die folgende Daten des nebenstehend abgebildeten **Rechtwinkligen** Dreieckes:
$a = 10\,\text{cm}$
$b = 6\,\text{cm}$
Der Rechte Winkel ist α. Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



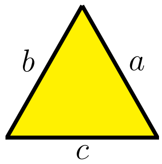
1.2 Aufgabe 2

Gegeben sind die folgende Daten des nebenstehenden Dreieckes:
$b = 40\,\text{mm}$
$c = 60\,\text{mm}$
$\alpha = 30°$
Wie groß ist die Fläche des Dreieckes?



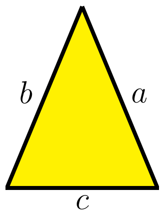
1.3 Aufgabe 3

Gegeben ist das nebenstehend dargestellte **gleichseitige** Dreieck mit den Seitenlängen:
$a = b = c = 5\,\text{cm}$
Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



1.4 Aufgabe 4

Gegeben ist das nebenstehend dargestellte **gleichschenklige** Dreieck mit den Seitenlängen:
$a = b = 13\,\text{cm}$
$c = 10\,\text{cm}$
Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



1.5 Aufgabe 5

1.6 Aufgabe 6

2 Ergebnisse

2.1 Aufgabe 1

$$A = 24\,\mathrm{cm}^2$$

2.2 Aufgabe 2

$$A = 600\,\mathrm{mm}^2$$

2.3 Aufgabe 3

$$A = 10{,}825\,\mathrm{cm}^2$$

2.4 Aufgabe 4

$$A = 60\,\mathrm{cm}^2$$

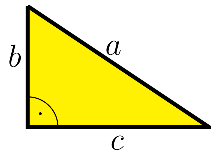
2.5 Aufgabe 5

2.6 Aufgabe 6

3 Lösungen mit Lösungsweg

3.1 Aufgabe 1

Gegeben sind die folgende Daten des nebenstehend abgebildeten **Rechtwinkligen** Dreieckes:
$a = 10\,\text{cm}$
$b = 6\,\text{cm}$
Der Rechte Winkel ist α. Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



Lösung: Die Formel zur Berechnung eines Dreieckes lautet:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Hierbei bedeutet g Grundseite und h Höhe. Welche der drei Seiten man als Grundseite nimmt ist im Prinzip gleichgültig, jedoch muss die Höhe h auf dieser Seite **senkrecht** stehen.

Da das Dreieck **rechtwinklig** ist, bietet es sich an, die beiden Kathetem b und c als Grundseite und Höhe zu wählen. Da c nicht bekannt ist, muss c zuvor noch ausgerechnet werden. Das geht mit dem Satz des Pythagoras.

$$\begin{aligned}
b^2 + c^2 &= a^2 && \mid -b^2 \\
c^2 &= a^2 - b^2 && \mid \sqrt{\ } \\
c &= \sqrt{a^2 - b^2} \\
&= \sqrt{(10\,\text{cm})^2 - (6\,\text{cm})^2} \\
&= \sqrt{100\,\text{cm}^2 - 36\,\text{cm}^2} \\
&= \sqrt{64\,\text{cm}^2} \\
c &= 8\,\text{cm}
\end{aligned}$$

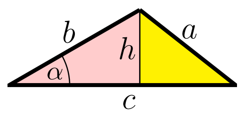
Ob man nun c als Grundseite und b als Höhe nimmt oder umgekehrt, ist im Prinzip gleichgültig. Jedenfalls kann damit die Fläche jetzt berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{g \cdot h}{2} \\
&= \frac{b \cdot c}{2} \\
&= \frac{6\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm}}{2} \\
A &= 24\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Dreieckfläche beträgt: $\boxed{A = 24\,\text{cm}^2}$

3.2 Aufgabe 2

Gegeben sind die folgende Daten des nebenstehenden Dreieckes:
$b = 40\,\mathrm{mm}$
$c = 60\,\mathrm{mm}$
$\alpha = 30°$
Wie groß ist die Fläche des Dreieckes?



Lösung: Zur Berechnung der Fläche benötigen wir eine Grundseite und eine darauf senkrecht stehende Höhe. Wählt man die Höhe, die mit der Bezeichnung h in der Planfigur eingetragen ist, dann ist c die zugehörige Grundseite. In dem rot markierten linken (rechtwinkligen) Teildreieck kann die Höhe mit Hilfe der Winkelfunktionen berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} &= \sin\alpha \\
\frac{h}{b} &= \sin\alpha \qquad\qquad |\cdot b \\
h &= b\cdot\sin\alpha \\
&= 40\,\mathrm{mm}\cdot\sin 30° \\
h &= 20\,\mathrm{mm}
\end{aligned}$$

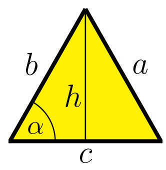
Mit diese Ergebnis kann die Dreieckfläche nun berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{g\cdot h}{2} \\
&= \frac{c\cdot h}{2} \\
&= \frac{60\,\mathrm{mm}\cdot 20\,\mathrm{mm}}{2} \\
A &= 600\,\mathrm{mm}^2
\end{aligned}$$

<u>Ergebnis:</u> Die Dreieckfläche beträgt: $\boxed{A = 600\,\mathrm{mm}^2}$

3.3 Aufgabe 3

Gegeben ist das nebenstehend dargestellte **gleichseitige** Dreieck mit den Seitenlängen:
$a = b = c = 5\,\text{cm}$
Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



Lösung: Die Formel zur Berechnung eines Dreieckes lautet:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Hierbei bedeutet g Grundseite und h Höhe. Welche der drei Seiten man als Grundseite nimmt ist im Prinzip gleichgültig, jedoch muss die Höhe h auf dieser Seite **senkrecht** stehen. Verwendet man die hier eingezeichnete Höhe h, dann ist c die Grundseite g aus der Formel.

Da h nicht bekannt ist, muss h zunächst berechnet werden. Hierzu gibt er **zwei** verschiedene Möglichkeiten.

1. Winkelfunktionen
2. Satz des Pythagoras

Lösungsvariante 1: Winkelfunktionen Weil alle Winkel gleich groß sind und weil die Winkelsumme im Dreieck immer 180° beträgt, sind alle Winkel 60° groß.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} &= \sin\alpha \\
\frac{h}{b} &= \sin\alpha && |\cdot b \\
h &= b\cdot\sin\alpha \\
h &= 6\,\text{cm}\cdot\sin 60^\circ \\
h &= 4{,}33\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Lösungsvariante 2: Satz des Pythagoras Im linken Rechtwinkligen Teildreieck gilt der Satz des Pythagoras.

$$\begin{aligned}
h^2 + \left(\tfrac{c}{2}\right)^2 &= b^2 && \left| -\left(\frac{c}{2}\right)^2\right. \\
h^2 &= b^2 - \left(\tfrac{c}{2}\right)^2 && |\sqrt{\ } \\
h &= \sqrt{b^2 - \left(\tfrac{c}{2}\right)^2} \\
h &= \sqrt{(5\,\text{cm})^2 - (2{,}5\,\text{cm})^2} \\
h &= 4{,}33\,\text{cm}
\end{aligned}$$

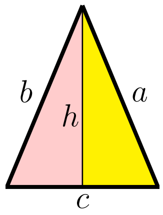
Unabhängig davon, mit welchem Verfahren die Höhe bestimmt wurde, kann jetzt die Fläche mit der Flächenformel berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{g \cdot h}{2} \\
&= \frac{c \cdot h}{2} \\
&= \frac{5\,\text{cm} \cdot 4{,}33\,\text{cm}}{2} \\
A &= 10{,}825\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

Ergebns: Die Fläche des gleichseitigen Dreieckes beträgt: $\boxed{A = 10{,}825\,\text{cm}^2}$

3.4 Aufgabe 4

Gegeben ist das nebenstehend dargestellte **gleichschenklige** Dreieck mit den Seitenlängen:
$a = b = 13\,\text{cm}$
$c = 10\,\text{cm}$
Berechnen Sie die Fläche des Dreieckes!



Lösung: Wir benötigen eine Höhe, die auf einer der Dreieckseiten senkrecht steht. Es bietet sich an, c als Grundseite zu nehmen und h darauf senkrecht zu setzen, wie in der Skizze dargestellt. Wegen der **Gleichseitigkeit** des Dreieckes mit den gleichen Schenkeln a und b steht h dann **genau in der Mitte** von c. Das linke rot markierte Teildreieck ist dann **rechtwinklig** mit den Katheten h und $\frac{c}{2}$ sowie der Hypotenuse b.[1] In diesem Teildreieck kann h mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden.

$$\begin{aligned}
h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 &= b^2 && \left| - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right. \\
h^2 &= b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 && |\sqrt{\ } \\
h &= \sqrt{h^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{(13\,\text{cm})^2 - \left(\frac{10\,\text{cm}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{169\,\text{cm}^2 - 25\,\text{cm}^2} \\
&= \sqrt{144\,\text{cm}^2} \\
h &= 12\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Mit dieser Höhe und c als Grundseite kann nun die Dreieckfläche berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{g \cdot h}{2} \\
&= \frac{c \cdot h}{2} \\
&= \frac{10\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{2} \\
A &= 60\,\text{cm}^2
\end{aligned}$$

<u>Ergebnis</u>: Die Dreieckfläche beträgt: $\boxed{A = 60\,\text{cm}^2}$

[1] Natürlich könnte man auch mit dem rechten Teildreieck arbeiten.