Übungen zur Linearen und zur Quadratischen Funktion

W. Kippels

22. März 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

Die Grundlagen zu den nachfolgenden Aufgaben finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lin.pdf

und hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quadfkt.pdf

2 Die Aufgabenstellungen

2.1 Aufgabe 1:

Der Graph einer Linearen Funktion schneidet die x-Achse bei $x_0 = 4$ und die y-Achse bei $y_0 = -2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

2.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x - 3$ und $f_2(x) = 4x + 3$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktionsgraphen!

2.3 Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 3x - 5$ und $f_2(x) = 4x + 1$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktionsgraphen ihrer **Umkehrfunktionen**!

2.4 Aufgabe 4:

Eine Parabel verläuft durch die drei Punkte $P_1(1|3)$, $P_2(3|3)$ und $P_3(4|6)$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

2.5 Aufgabe 5:

Eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(3|-4)$ schneidet die y-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung? Geben Sie diese in der **Normalform** an!

2.6 Aufgabe 6:

An welchen Punkten schneiden sich die Graphen der beiden Funktionen mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 3x^2 + 5x - 2$ und $f_2(x) = x^2 + 15x - 10$?

2.7 Aufgabe 7:

Die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ hat den Scheitelpunkt S(2|1) und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 2x - 3$ an der Stelle $x_1 = 4$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

2.8 Aufgabe 8:

Eine Parabel $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = x+3$ bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Die y-Achse schneidet die Parabel bei $y_0 = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

3 Hier sind die Ergebnisse:

3.1 Aufgabe 1:

$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

3.2 Aufgabe 2:

S$(-3|-9)$

3.3 Aufgabe 3:

S$(-23|-6)$

3.4 Aufgabe 4:

$f(x) = x^2 - 4x + 6$

3.5 Aufgabe 5:

$f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 - 4 = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 13$

3.6 Aufgabe 6:

$P_1(1|6)$ und $P_2(4|66)$

3.7 Aufgabe 7:

$f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$

3.8 Aufgabe 8:

$f_1(x) = x^2 + 1$

4 Komplett durchgerechnete Lösungen

4.1 Aufgabe 1:

Der Graph einer Linearen Funktion schneidet die x-Achse bei $x_0 = 4$ und die y-Achse bei $y_0 = -2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung: Die Grundformel lautet:

$$f(x) = mx + b$$

Aus dem y-Achsenabschnitt ergibt sich sofort:

$$b = y_0 = -2$$

Die Steigung m wird über die Steigungsformel bestimmt. Bekannt sind die Punkte $P_1(0|-2)$ und $P_2(4|0)$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0 - (-2)}{4 - 0} \\ &= \frac{2}{4} \\ m &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - 2}$

4.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x - 3$ und $f_2(x) = 4x + 3$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktionsgraphen!

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt. Man erhält so den x-Wert x_S des Schnittpunktes.

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ 2x_S - 3 &= 4x_S + 3 \quad | - 4x_S + 3 \\ -2x_S &= 6 \quad | : (-2) \\ x_s &= -3 \end{aligned}$$

Den zugehörigen y-Wert bestimmt man durch Einsetzen des gefundenen Wertes x_S in eine der beiden Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned} y_S &= f_1(x_S) \\ y_S &= 2x_S - 3 \\ y_S &= 2 \cdot (-3) - 3 \\ y_S &= -9 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt lautet damit: $\boxed{S(-3| - 9)}$

4.3 Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 3x - 5$ und $f_2(x) = 4x + 1$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktionsgraphen ihrer **Umkehrfunktionen**!

Lösung: Es gibt grundsätzlich zwei Lösungs-Strategien:
• Man bestimmt die **Umkehrfunktionen** und setzt diese gleich.
• Man bestimmt den Schnittpunkt der **Original-Funktionen** und tauscht anschließend die Koordinaten.

Ich bevorzuge die zweite Strategie. Ich setze daher die Funktionen gleich, um den Schnittpunkt S der Funktionen zu bestimmen.

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ 3x_S - 5 &= 4x_S + 1 \quad | - 4x_S + 5 \\ -x_S &= 6 \quad | : (-1) \\ x_S &= -6 \end{aligned}$$

Den zugehörigen y-Wert bestimmt man durch Einsetzen des gefundenen Wertes x_S in eine der beiden Funktionsgleichungen.

$$\begin{aligned} y_S &= f_1(x_S) \\ y_S &= 3x_S - 5 \\ y_S &= 3 \cdot (-6) - 5 \\ y_S &= -23 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Funktionen liegt also bei $S(-6| - 23)$. Tauscht man die Koordinaten, dann erhält man des Schnittpunkt S^* der beiden Umkehrfunktionen:

$$\boxed{S^*(-23| - 6)}$$

4.4 Aufgabe 4:

Eine Parabel verläuft durch die drei Punkte $P_1(1|3)$, $P_2(3|3)$ und $P_3(4|6)$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

Lösung: Die Funktion hat die allgemeine Form (Normalform):

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Setzt man jeweils einen Punkt mit seinen Koordinaten für x und y ein, dann erhält man drei Gleichungen, aus denen die Parameter a, b und c bestimmt werden können.

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(1) & = & 3 & \Rightarrow & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 3 \\ f(3) & = & 3 & \Rightarrow & a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & = & 3 \\ f(4) & = & 6 & \Rightarrow & a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c & = & 6 \end{array}$$

Wir haben nachfolgendes Lineargleichungssystem mit den Variablen a, b und c erhalten.

$$\begin{array}{crrrcr} (1) & a & +b & +c & = & 3 \\ (2) & 9a & +3b & +c & = & 3 \\ (3) & 16a & +4b & +c & = & 6 \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren[1] gelöst werden. Man erhält:

$$a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 6$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = x^2 - 4x + 6}$

[1] Mögliche Lösungsverfahren sind das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren oder die Cramersche Regel.

4.5 Aufgabe 5:

Eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(3|-4)$ schneidet die y-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung? Geben Sie diese in der **Normalform** an!

Lösung: Als Lösungsansatz bietet sich hier die **Scheitelpunktform** der Quadratischen Funktion an:

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

Hierin muss lediglich noch der Parameter a bestimmt werden, denn x_S und y_S sind ja bekannt. Dazu setzt man für x und y die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse in die Funktionsgleichung ein:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot (x-3)^2 - 4 \\
f(0) &= -7 \\
a \cdot (0-3)^2 - 4 &= -7 \\
9a - 4 &= -7 \quad | +4 \\
9a &= -3 \quad | :3 \\
a &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Mit diesem Parameter kann die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform aufgeschrieben werden. Sie muss dann nur noch in die Normalform umgestellt werden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 - 4 \\
&= -\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) - 4 \\
&= -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 - 4 \\
f(x) &= -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 7
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $\boxed{f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 7}$

4.6 Aufgabe 6:

An welchen Punkten schneiden sich die Graphen der beiden Funktionen mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 3x^2 + 5x - 2$ und $f_2(x) = x^2 + 15x - 10$?

Lösung: Um die Schnittpunkte zu bestimmen, werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{aligned}
f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\
3x_S^2 + 5x_S - 2 &= x_S^2 + 15x_S - 10 \quad | - x_S^2 - 15x_S + 10 \\
2x_S^2 - 10x_S + 8 &= 0 \quad | : 2 \\
x_S^2 - 5x_S + 4 &= 0 \\
x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_{S1} = 1 \qquad & x_{S2} = 4
\end{aligned}$$

Die zugehörigen y-Werte werden durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen bestimmt. Ich wähle dazu $f_2(x)$ aus.

$$y_{S1} = f(x_{S1} = 1^2 + 15 \cdot 1 - 10 = 6$$

$$y_{S2} = f(x_{S2} = 4^2 + 15 \cdot 4 - 10 = 66$$

Die Schnittpunkte lauten also: $\boxed{S_1(1|6)}$ und $\boxed{S_2(4|66)}$

4.7 Aufgabe 7:

Die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ hat den Scheitelpunkt S(2|1) und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 2x - 3$ an der Stelle $x_1 = 4$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

Lösung: Als Lösungsansatz bietet sich hier die **Scheitelpunktform** der Quadratischen Funktion an:

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

Mit den Daten des gegebenen Scheitelpunktes $S(2|1)$ lautet die Funktionsgleichung so:

$$f_1(x) = a \cdot (x - 2)^2 + 1$$

Hierin muss lediglich noch der Parameter a bestimmt werden, denn x_S und y_S sind ja bekannt. Dafür kann der Schnittpunkt P mit der Geraden verwendet werden. Der noch fehlende y-Wert wird mit Hilfe der Geradengleichung bestimmt.

$$y_P = f_2(x_P) = 2 \cdot x_P - 32 \cdot 4 - 3 = 5$$

Der Schnittpunkt lautet also: $P(4|5)$. Damit kann jetzt a bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
f_1(x_P) &= y_p \\
f_1(4) &= 5 \\
a \cdot (x_p - 2)^2 + 1 &= y_p \\
a \cdot (4 - 2)^2 + 1 &= 5 \\
4a + 1 &= 5 \quad | - 1 \\
4y &= 4 \quad | : 4 \\
y &= 1
\end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet:

$\boxed{f_1(x) = (x - 2)^2 + 1}$ oder in Normalform: $\boxed{f_1(x) = x^2 - 4x + 5}$

4.8 Aufgabe 8:

Eine Parabel $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = x + 3$ bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Die y-Achse schneidet die Parabel bei $y_0 = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

Lösung: Aus der Aufgabenbeschreibung kann man drei Punkte der Parabel herauslesen, nämlich die beiden Schnittpunkte mit der Parabel (ich nenne sie P_1 und P_2) sowie der Schnittpunkt mit der y-Achse (den nenne ich P_3). Für P_1 und P_2 fehlen noch die y-Werte. Für P_3 sind beide Koordinaten bekannt mit $p_3(0|1)$.

Die Werte für P_1 und P_2 werden jetzt bestimmt:

$$y_1 = f_2(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$y_2 = f_2(2) = 2 + 3 = 5$$

Damit sind die drei Punkte bekannt: $P_1(-1|2)$ $P_2(2|5)$ $P_3(0|1)$
Die Normalform der Parabel lautet:

$$f_1(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Parameter a, b und c werden bestimmt, indem man die Koordinaten der drei Punkte in diese Gleichung einsetzt:

$$\begin{array}{rclcrcl} f_1(-1) & = & 2 & \Rightarrow & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & = & 2 \\ f_1(2) & = & 5 & \Rightarrow & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 5 \\ f_1(0) & = & 1 & \Rightarrow & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \end{array}$$

Wir erhalten nachfolgendes Lineargleichungssystem, das mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden kann:

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & a & -b & +c & = & 2 \\ (2) & 4a & +2b & +c & = & 5 \\ (3) & & & c & = & 1 \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren[2] gelöst werden. Man erhält:

$$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 1$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^2 + 1}$

[2] Mögliche Lösungsverfahren sind das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren oder die Cramersche Regel.