Übungen zur Linearen und zur Quadratischen Funktion

W. Kippels

21. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Die Aufgabenstellungen

1.1 Aufgabe 1:

Der Graph einer Linearen Funktion schneidet die x-Achse bei $x_0 = 4$ und die y-Achse bei $y_0 = -2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

1.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x - 3$ und $f_2(x) = 4x + 3$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktionsgraphen!

1.3 Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 3x - 5$ und $f_2(x) = 4x + 1$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktionsgraphen ihrer **Umkehrfunktionen**!

1.4 Aufgabe 4:

Eine Parabel verläuft durch die drei Punkte $P_1(1|3)$, $P_2(3|3)$ und $P_3(4|6)$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

1.5 Aufgabe 5:

Eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(3|-4)$ schneidet die y-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung? Geben Sie diese in der **Normalform** an!

1.6 Aufgabe 6:

An welchen Punkten schneiden sich die Graphen der beiden Funktionen mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 3x^2 + 5x - 2$ und $f_2(x) = x^2 + 15x - 10$?

1.7 Aufgabe 7:

Die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ hat den Scheitelpunkt S(2|1) und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 2x - 3$ an der Stelle $x_1 = 4$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

1.8 Aufgabe 8:

Eine Parabel $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = x+3$ bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Die y-Achse schneidet die Parabel bei $y_0 = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

2 Hier sind die Ergebnisse:

2.1 Aufgabe 1:

$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

2.2 Aufgabe 2:

$\mathrm{S}(-3|-9)$

2.3 Aufgabe 3:

$\mathrm{S}(-23|-6)$

2.4 Aufgabe 4:

$f(x) = x^2 - 4x + 6$

2.5 Aufgabe 5:

$f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 - 4 = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 13$

2.6 Aufgabe 6:

$P_1(1|6)$ und $P_2(4|66)$

2.7 Aufgabe 7:

$f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$

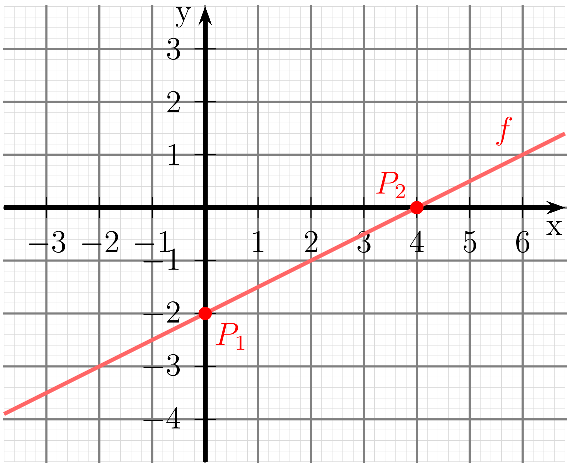
2.8 Aufgabe 8:

$f_1(x) = x^2 + 1$

3 Komplett durchgerechnete Lösungen

3.1 Aufgabe 1:

Der Graph einer Linearen Funktion schneidet die x-Achse bei $x_0 = 4$ und die y-Achse bei $y_0 = -2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?



Lösung: Die Grundformel lautet:

$$f(x) = mx + b$$

Aus dem y-Achsenabschnitt ergibt sich sofort:

$$b = y_0 = -2$$

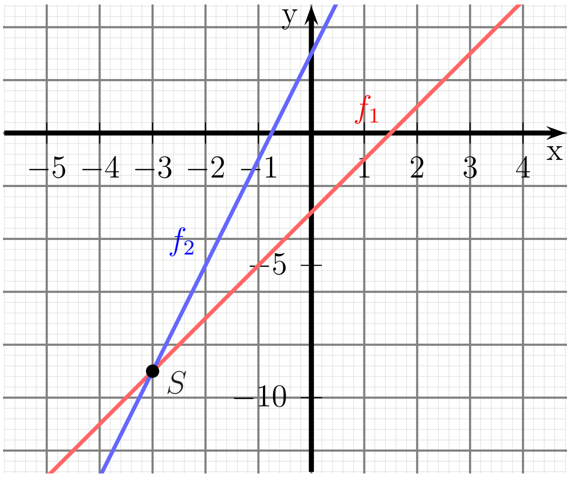
Die Steigung m wird über die Steigungsformel bestimmt. Bekannt sind die Punkte $P_1(0|-2)$ und $P_2(4|0)$

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0-(-2)}{4-0} \\ &= \frac{2}{4} \\ m &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - 2}$

3.2 Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 2x - 3$ und $f_2(x) = 4x + 3$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktionsgraphen!



Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt. Man erhält so den x-Wert x_S des Schnittpunktes.

$$
\begin{aligned}
f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\
2x_S - 3 &= 4x_S + 3 \quad | - 4x_S + 3 \\
-2x_S &= 6 \quad | : (-2) \\
x_s &= -3
\end{aligned}
$$

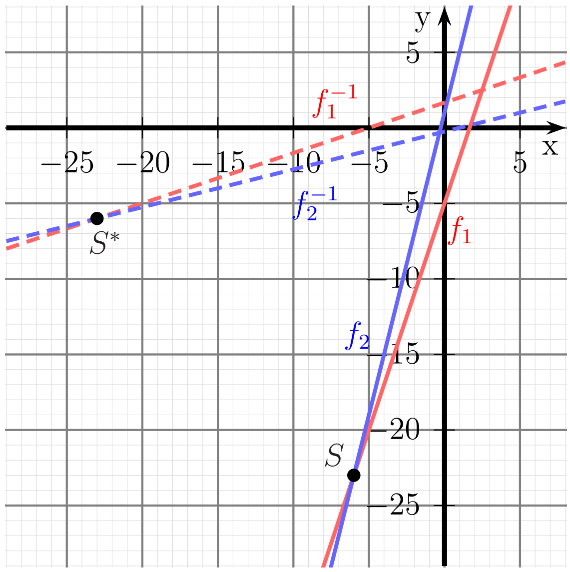
Den zugehörigen y-Wert bestimmt man durch Einsetzen des gefundenen Wertes x_S in eine der beiden Funktionsgleichungen.

$$
\begin{aligned}
y_S &= f_1(x_S) \\
y_S &= 2x_S - 3 \\
y_S &= 2 \cdot (-3) - 3 \\
y_S &= -9
\end{aligned}
$$

Der Schnittpunkt lautet damit: $\boxed{S(-3| - 9)}$

3.3 Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f_1(x) = 3x - 5$ und $f_2(x) = 4x + 1$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktionsgraphen ihrer **Umkehrfunktionen**!



Lösung: Es gibt grundsätzlich zwei Lösungs-Strategien:

- Man bestimmt die **Umkehrfunktionen** und setzt diese gleich.
- Man bestimmt den Schnittpunkt der **Original-Funktionen** und tauscht anschließend die Koordinaten.

Ich bevorzuge die zweite Strategie. Ich setze daher die Funktionen gleich, um den Schnittpunkt S der Funktionen zu bestimmen.

$$\begin{aligned} f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\ 3x_S - 5 &= 4x_S + 1 \quad | - 4x_S + 5 \\ -x_S &= 6 \quad | : (-1) \\ x_S &= -6 \end{aligned}$$

Den zugehörigen y-Wert bestimmt man durch Einsetzen des gefundenen Wertes x_S in eine der beiden Funktionsgleichungen.

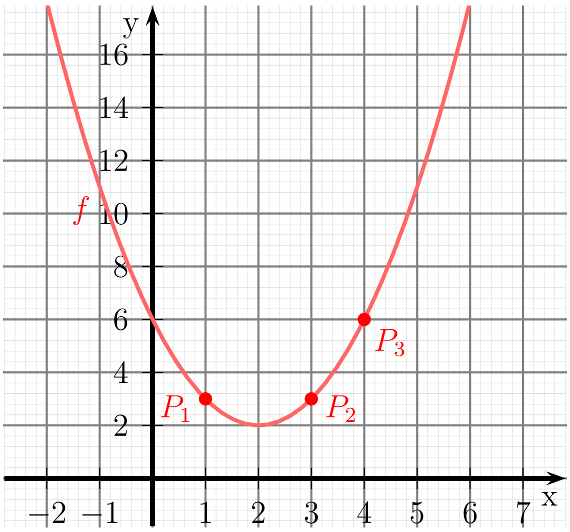
$$\begin{aligned} y_S &= f_1(x_S) \\ y_S &= 3x_S - 5 \\ y_S &= 3 \cdot (-6) - 5 \\ y_S &= -23 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Funktionen liegt also bei $S(-6|-23)$. Tauscht man die Koordinaten, dann erhält man des Schnittpunkt S^* der beiden Umkehrfunktionen:

$$\boxed{S^*(-23|-6)}$$

3.4 Aufgabe 4:

Eine Parabel verläuft durch die drei Punkte $P_1(1|3)$, $P_2(3|3)$ und $P_3(4|6)$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?



Lösung: Die Funktion hat die allgemeine Form (Normalform):

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Setzt man jeweils einen Punkt mit seinen Koordinaten für x und y ein, dann erhält man drei Gleichungen, aus denen die Parameter a, b und c bestimmt werden können.

$$\begin{array}{rclcrcl} f(1) & = & 3 & \Rightarrow & a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c & = & 3 \\ f(3) & = & 3 & \Rightarrow & a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c & = & 3 \\ f(4) & = & 6 & \Rightarrow & a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c & = & 6 \end{array}$$

Wir haben nachfolgendes Lineargleichungssystem mit den Variablen a, b und c erhalten.

$$\begin{array}{crrrcl} (1) & a & +b & +c & = & 3 \\ (2) & 9a & +3b & +c & = & 3 \\ (3) & 16a & +4b & +c & = & 6 \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren[1] gelöst werden. Man erhält:

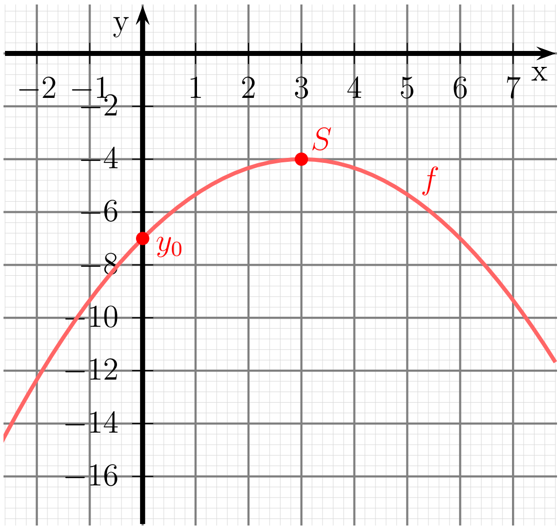
$$a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 6$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = x^2 - 4x + 6}$

[1] Mögliche Lösungsverfahren sind das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren oder die Cramersche Regel.

3.5 Aufgabe 5:

Eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(3|-4)$ schneidet die y-Achse bei $y_0 = -7$. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung? Geben Sie diese in der **Normalform** an!



Lösung: Als Lösungsansatz bietet sich hier die **Scheitelpunktform** der Quadratischen Funktion an:

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

Hierin muss lediglich noch der Parameter a bestimmt werden, denn x_S und y_S sind ja bekannt. Dazu setzt man für x und y die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse in die Funktionsgleichung ein:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot (x-3)^2 - 4 \\
f(0) &= -7 \\
a \cdot (0-3)^2 - 4 &= -7 \\
9a - 4 &= -7 \quad | + 4 \\
9a &= -3 \quad | : 3 \\
a &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

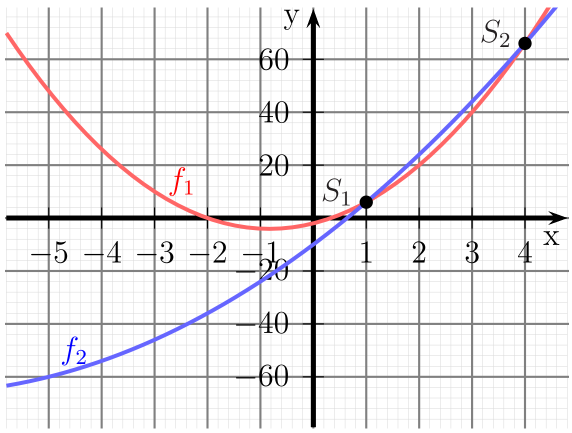
Mit diesem Parameter kann die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform aufgeschrieben werden. Sie muss dann nur noch in die Normalform umgestellt werden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 - 4 \\
&= -\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) - 4 \\
&= -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 - 4 \\
f(x) &= -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 7
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $\boxed{f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 7}$

3.6 Aufgabe 6:

An welchen Punkten schneiden sich die Graphen der beiden Funktionen mit den Funktionsgleichungen $f_1(x) = 3x^2 + 5x - 2$ und $f_2(x) = x^2 + 15x - 10$?



Lösung: Um die Schnittpunkte zu bestimmen, werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{aligned}
f_1(x_S) &= f_2(x_S) \\
3x_S^2 + 5x_S - 2 &= x_S^2 + 15x_S - 10 \quad | - x_S^2 - 15x_S + 10 \\
2x_S^2 - 10x_S + 8 &= 0 \quad | : 2 \\
x_S^2 - 5x_S + 4 &= 0 \\
x_{S1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_{S1} = 1 & \quad x_{S2} = 4
\end{aligned}$$

Die zugehörigen y-Werte werden durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen bestimmt. Ich wähle dazu $f_2(x)$ aus.

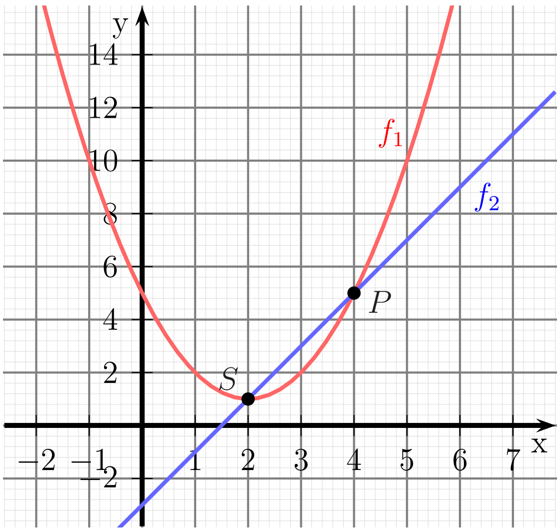
$$y_{S1} = f(x_{S1} = 1^2 + 15 \cdot 1 - 10 = 6$$

$$y_{S2} = f(x_{S2} = 4^2 + 15 \cdot 4 - 10 = 66$$

Die Schnittpunkte lauten also: $\boxed{S_1(1|6)}$ und $\boxed{S_2(4|66)}$

3.7 Aufgabe 7:

Die Parabel mit der Funktionsgleichung $f_1(x)$ hat den Scheitelpunkt S(2|1) und schneidet die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 2x - 3$ an der Stelle $x_1 = 4$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?



Lösung: Als Lösungsansatz bietet sich hier die **Scheitelpunktform** der Quadratischen Funktion an:

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

Mit den Daten des gegebenen Scheitelpunktes $S(2|1)$ lautet die Funktionsgleichung so:

$$f_1(x) = a \cdot (x - 2)^2 + 1$$

Hierin muss lediglich noch der Parameter a bestimmt werden, denn x_S und y_S sind ja bekannt. Dafür kann der Schnittpunkt P mit der Geraden verwendet werden. Der noch fehlende y-Wert wird mit Hilfe der Geradengleichung bestimmt.

$$y_P = f_2(x_P) = 2 \cdot x_P - 32 \cdot 4 - 3 = 5$$

Der Schnittpunkt lautet also: $P(4|5)$. Damit kann jetzt a bestimmt werden:

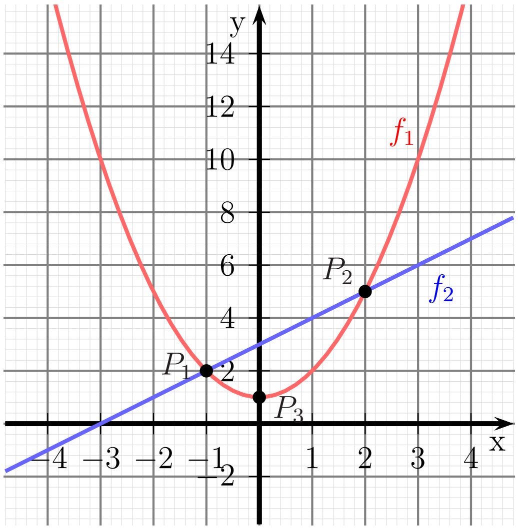
$$\begin{aligned}
f_1(x_P) &= y_p \\
f_1(4) &= 5 \\
a \cdot (x_p - 2)^2 + 1 &= y_p \\
a \cdot (4 - 2)^2 + 1 &= 5 \\
4a + 1 &= 5 \quad | - 1 \\
4y &= 4 \quad | : 4 \\
y &= 1
\end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet:

$\boxed{f_1(x) = (x - 2)^2 + 1}$ oder in Normalform: $\boxed{f_1(x) = x^2 - 4x + 5}$

3.8 Aufgabe 8:

Eine Parabel $f_1(x)$ schneidet die Gerade mit der Gleichung $f_2(x) = x + 3$ bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$. Die y-Achse schneidet die Parabel bei $y_0 = 1$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?



Lösung: Aus der Aufgabenbeschreibung kann man drei Punkte der Parabel herauslesen, nämlich die beiden Schnittpunkte mit der Parabel (ich nenne sie P_1 und P_2) sowie der Schnittpunkt mit der y-Achse (den nenne ich P_3). Für P_1 und P_2 fehlen noch die y-Werte. Für P_3 sind beide Koordinaten bekannt mit $p_3(0|1)$.

Die Werte für P_1 und P_2 werden jetzt bestimmt:

$$y_1 = f_2(-1) = -1 + 3 = 2$$
$$y_2 = f_2(2) = 2 + 3 = 5$$

Damit sind die drei Punkte bekannt: $P_1(-1|2) \qquad P_2(2|5) \qquad P_3(0|1)$
Die Normalform der Parabel lautet:

$$f_1(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Parameter a, b und c werden bestimmt, indem man die Koordinaten der drei Punkte in diese Gleichung einsetzt:

$$\begin{array}{rcrcrcl} f_1(-1) & = & 2 & \Rightarrow & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & = & 2 \\ f_1(2) & = & 5 & \Rightarrow & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & = & 5 \\ f_1(0) & = & 1 & \Rightarrow & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 1 \end{array}$$

Wir erhalten nachfolgendes Lineargleichungssystem, das mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden kann:

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & a & -b & +c & = & 2 \\ (2) & 4a & +2b & +c & = & 5 \\ (3) & & & c & = & 1 \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren[2] gelöst werden. Man erhält:

$$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 1$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = x^2 + 1}$

[2] Mögliche Lösungsverfahren sind das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren oder die Cramersche Regel.