

Übungsarbeit Mathematik HBF 21, 16.12.2013

Aufgabe 1

Geben Sie die erste und zweite Ableitung der Funktionen an!

a)

$$f(x) = 2x^7 - 4x^2 + \pi^3 + 3e^x + 2e^2$$

b)

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

c)

$$f(x) = (2x - 4)^7$$

d)

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 4}$$

e)

$$f(x) = e^{\cos 3x}$$

Lösung:

a) Lösung mit Summenregel, Potenzfunktion, e-Funktion.

Hinweis: π und e sind **Konstanten**, also auch π^3 und e^2 . Beim Differenzieren fallen diese weg.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^7 - 4x^2 + \pi^3 + 3e^x + 2e^2 \\f'(x) &= 14x^6 - 8x + 3e^x \quad (5) \\f''(x) &= 84x^5 - 8 + 3e^x \quad (5)\end{aligned}$$

b) Zur Lösung formt man den Bruch in der Funktion zweckmäßigerweise in die Potenzschreibweise um.

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = 3x^2 + x^{-1}$$

Jetzt kann die Funktion mit Summenregel und der Potenzfunktion als Grundfunktion abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2 + x^{-1} \\f'(x) &= 6x - x^{-2} = 6x - \frac{1}{x^2} \quad (5) \\f''(x) &= 6 + 2x^{-3} = 6 + \frac{2}{x^3} \quad (5)\end{aligned}$$

c) Die Ableitung erfolgt zweckmäßigerweise mit der Kettenregel.

$$f(x) = (2x - 4)^7$$

Wir bilden innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 4 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = g^7 &\Rightarrow f'(g) = 7g^6\end{aligned}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich die 1. Ableitung:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 7g^6 \cdot 2 = 14(2x - 4)^6 \quad (5)$$

Die zweite Ableitung wird wieder mit der Kettenregel bestimmt. Die innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen werden aufgestellt:

$$\begin{aligned}g(x) = 2x - 4 &\Rightarrow g'(x) = 2 \\f(g) = 14g^6 &\Rightarrow f'(g) = 84g^5\end{aligned}$$

Damit kann die 2. Ableitung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}f''(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\&= 84g^5 \cdot 2 \\&= 84 \cdot (2x - 4)^5 \cdot 2 \\f''(x) &= 168 \cdot (2x - 4)^5 \quad (5)\end{aligned}$$

d) Es handelt sich um einen Bruch; daher muss die Quotientenregel verwendet werden.

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 4}$$

Ich schreibe zunächst Zähler- und Nennerfunktion auf sowie deren Ableitungen.

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - 5x + 6 &\Rightarrow & u'(x) = 2x - 5 \\ v(x) &= 2x - 4 &\Rightarrow & v'(x) = 2 \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse setzen wir ein und bestimmen $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x - 5) \cdot (2x - 4) - (x^2 - 5x + 6) \cdot 2}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 10x + 20 - 2x^2 + 10x - 12}{(2x - 4)^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^2 - 8x + 8}{(2x - 4)^2} \quad (5) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung schreibe ich wieder die Zähler- und Nennerfunktion sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x^2 - 8x + 8 &\Rightarrow & u'(x) = 4x - 8 \\ v(x) &= (2x - 4)^2 &\Rightarrow & v'(x) = \dots \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $v'(x)$ wird die Kettenregel benötigt. Die zugehörige Rechnung führe ich in einer weiteren Nebenrechnung durch.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x - 4 &\Rightarrow & g'(x) = 2 \\ v(g) &= g^2 &\Rightarrow & v'(g) = 2g \end{aligned}$$

Damit bestimme ich mit der Kettenregel $v'(x)$.

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot 2 = 4 \cdot (2x - 4)$$

Jetzt kann die Quotientenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
 &= \frac{(4x-8) \cdot (2x-4)^2 - (2x^2-8x+8) \cdot 4 \cdot (2x-4)}{(2x-4)^4} \\
 &= \frac{(2x-4) \cdot \left((4x-8) \cdot (2x-4) - (2x^2-8x+8) \cdot 4 \right)}{(2x-4)^4} \\
 &= \frac{(4x-8) \cdot (2x-4) - (2x^2-8x+8) \cdot 4}{(2x-4)^3} \\
 &= \frac{8x^2-16x+32-8x^2+32x-32}{(2x-4)^3} \\
 f''(x) &= \frac{0}{(2x-4)^3} = 0 \quad (5)
 \end{aligned}$$

e) Hier muss die Kettenregel gleich doppelt angewendet werden.

$$f(x) = e^{\cos 3x}$$

Die Funktion lässt sich schreiben als Funktion von einer Funktion von einer Funktion, also $f(x) = f(g(h(x)))$ mit $h(x) = 3x$, $g(h) = \cos h$ und $f(g) = e^g$.

Vorweg bestimme ich die Ableitung der inneren Funktion $g(h(x)) = \cos 3x$ mit Hilfe der Kettenregel.

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \cos 3x \\
 h(x) = 3x &\Rightarrow h'(x) = 3 \\
 g(h) = \cos h &\Rightarrow g'(h) = -\sin h \\
 g'(x) &= h'(x) \cdot g'(h) = 3 \cdot (-\sin h) = -3 \sin 3x
 \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir die Kettenregel auf $f(x)$ an.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{\cos 3x} \\
 g(x) = \cos 3x &\Rightarrow g'(x) = -3 \sin 3x \\
 f(g) = e^g &\Rightarrow f'(g) = e^g \\
 f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\
 &= e^g \cdot (-3 \sin 3x) \\
 f'(x) &= e^{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x) \quad (5)
 \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung muss nun die Produktregel angewendet werden, denn die Funktion stellt ein Produkt dar. Ich bestimme vorweg die Ableitung des zweiten Faktors $v(x) = -3 \sin 3x$ mit der Kettenregel.

$$v(x) = -3 \sin 3x$$

$$\begin{aligned} g(x) = 3x &\Rightarrow g'(x) = 3 \\ v(g) = -3 \sin g &\Rightarrow v'(g) = -3 \cos g \end{aligned}$$

$$v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) = 3 \cdot (-3 \cos g) = -9 \cos 3x$$

Jetzt kann $f''(x)$ mit der Produktregel bestimmt werden.

$$\begin{aligned} u(x) = e^{\cos 3x} &\Rightarrow u'(x) = e^{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x) \\ v(x) = -3 \sin 3x &\Rightarrow v'(x) = -9 \cos 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= e^{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x) \cdot (-3 \sin 3x) + e^{\cos 3x} \cdot (-9 \cos 3x) \\ f''(x) &= e^{\cos 3x} \cdot (9 \sin^2 3x - 9 \cos 3x) \quad (5) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte der nachfolgenden Funktion!

$$f(x) = -2x^3 + 18x^2 - 48x + 38$$

Lösung: Notwendige Bedingung für das Auftreten von Extrempunkten ist das Nullwerden der ersten Ableitung der Funktion. Vorsorglich werden zunächst die ersten beiden Ableitungen gebildet.

$$\begin{aligned}f(x) &= -2x^3 + 18x^2 - 48x + 38 \\f'(x) &= -6x^2 + 36x - 48 \\f''(x) &= -12x + 36\end{aligned}$$

Mit der **ersten Ableitung** werden zunächst **Kandidaten** für Extrempunkte gesucht.

$$\begin{aligned}f'(x_E) &= 0 \\-6x_E^2 + 36x_E - 48 &= 0 \quad | : (-6) \\x_E^2 - 6x_E + 8 &= 0 \\x_{E1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} \\x_{E1/2} &= 3 \pm 1 \\x_{E1} = 2 \quad x_{E2} &= 4\end{aligned}$$

Mit Hilfe der **zweiten Ableitung** kann nun geprüft werden, ob jeweils ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt.

Untersuchung für $x_{E1} = 2$:

$$f''(x_{E1}) = f''(2) = -12 \cdot 2 + 36 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 2$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 2$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(2) = -2 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 38 = -2$$

Ergebnis: **Tiefpunkt $T(2|-2)$**

Untersuchung für $x_{E2} = 4$:

$$f''(x_{E1}) = f''(4) = -12 \cdot 4 + 36 = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = 4$$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E2} = 4$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = f(4) = -2 \cdot 4^3 + 18 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 38 = 6$$

Ergebnis: **Hochpunkt $H(4|6)$**

