Sammlung von Prüfungsaufgaben

W. Kippels

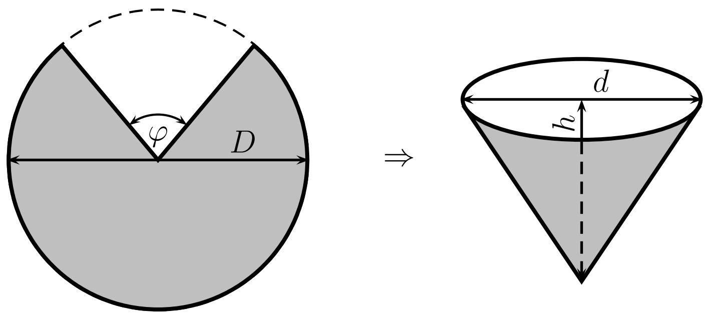
15. März 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Extremwertaufgaben

1.1 Aufgabe 2

Aus einem kreisförmigen Blechstück mit dem Durchmesser D wird ein Sektor herausgeschnitten. Die Schnittkanten des verbleibenden Blechstückes werden zusammengefügt, so dass ein oben offener Kegel entsteht.



a) Welche Höhe h und welchen Durchmesser d muss dieser Kegel erhalten, damit das Volumen des Kegels möglichst groß wird?

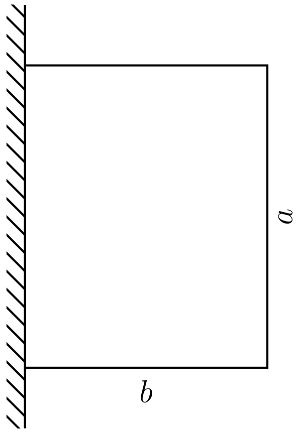
b) Wie groß ist der Winkel φ des ausgeschnittenen Kreissektors?

1.2 Aufgabe 3

An ein bereits errichtetes Haus soll ein Lagerraum mit rechteckigem Grundriss und einem Flachdach angebaut werden. Der Raum soll 2,5 Meter hoch sein und eine Grundfläche von $12\,\mathrm{m}^2$ haben.

Bestimmen Sie die Länge a und die Breite b so, dass möglichst geringe Kosten entstehen.

Folgende Kosten entstehen im einzelnen für nachfolgend aufgelistete Posten:



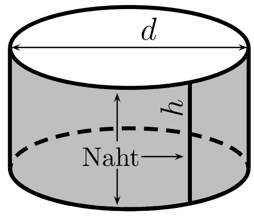
Grundriss des Lagers

- Dach und Bodenplatte von zusammen für 250,- € je m^2
- Wände mit 76,80 € je m^2
- Befestigung des Daches an der Hauswand einschließlich Abdichtung mit 8,- € je laufendem Meter
- Türdurchbruch einschließlich Tür in der bereits bestehenden Hauswand von 850,- €

Bestimmen Sie die optimalen Werte für die Länge a und die Breite b sowie die Gesamtkosten K.

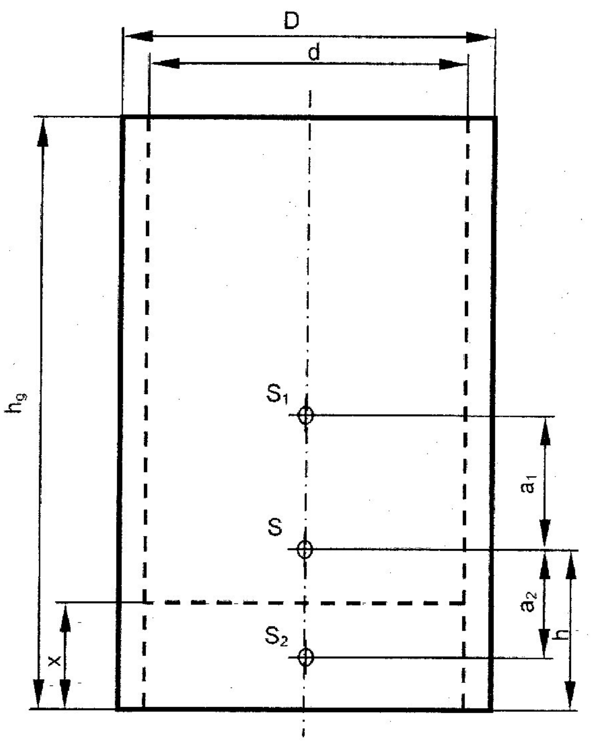
1.3 Aufgabe 11

Es sollen zylindrische Dosen mit Boden und Deckel für eine Volumen von $V = 1\,\text{Liter}$ hergestellt werden. (Siehe nebenstehende Skizze.) Wie groß sind der **Durchmesser d** und die **Höhe h** zu wählen, damit die gesamte Nahtlänge – bestehend aus der Bördelnaht an Deckel und Boden sowie einer Naht an der Dosenseite – möglichst klein wird?



1.4 Aufgabe 13

Ein zylindrisches Trinkglas mit einer Höhe von $h_g = 150\,\mathrm{mm}$ hat einen Innendurchmesser von $d = 50\,\mathrm{mm}$ und einen Außendurchmesser von $D = 55\,\mathrm{mm}$. Die Dicke x des Bodens soll so gewählt werden, dass die Standfestigkeit des leeren Glases möglichst hoch wird. Eine hohe Standfestigkeit ist gleichbedeutend mit einem niedrigen Schwerpunkt.



a) Entwickeln Sie eine Funktion, die die Höhe h des Schwerpunktes als Funktion der Bodendicke x angibt!

b) Bestimmen Sie von nachfolgender Funktion das Minimum und geben Sie die Schwerpunkthöhe h für diesen Fall an!

$$h(x) = \frac{x^2 + 4725\,\mathrm{mm}^2}{2x + 63\,\mathrm{mm}}$$

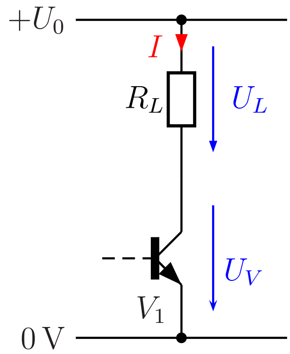
Lösungshinweise:

- Der Schwerpunkt eines **symmetrischen** Körpers liegt in seiner geometrischen Mitte.
- Das Trinkglas lässt sich in **zwei symmetrische** Körper zerlegen.
- Jedem **Teilkörper** kann ein **eigener Schwerpunkt** zugeordnet werden.
- Der Schwerpunkt eines zusammengesetzten Körpers lässt sich mit dem **Hebelgesetz** zu einem **Gesamtschwerpunkt** zusammensetzen. Es sei S_1 der Schwerpunkt des Teilkörpers mit dem Volumen V_1, S_2 der Schwerpunkt des Teilkörpers mit dem Volumen V_2 und S der Gesamtschwerpunkt. Ferner sei a_1 der Abstand zwischen S und S_1 sowie a_2 der Abstand zwischen S und S_2; damit gilt das Hebelgesetz:

$$a_1 \cdot V_1 = a_2 \cdot V_2$$

1.5 Aufgabe 14

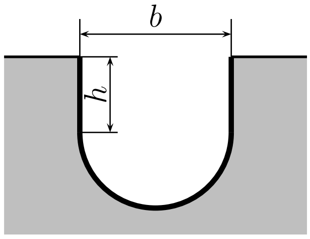
Ein Lötkolben soll mit Hilfe eines in Reihe geschalteten Transistors an einer Betriebsspannung von $U_0 = 24\,\mathrm{V}$ in der Temperatur geregelt werden. In nebenstehender Skizze ist der Lötkolben als Widerstand R_L dargestellt. Der Lötkolben-Widerstand beträgt: $R_L = 12\,\Omega$. Der Widerstand, den die Kollektor-Emitter-Strecke des Transistors darstellt, soll R_V heißen, die Leistung im Transistor P_V.



Die Ansteuerschaltung des Transistors wurde weggelassen. Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, welche Verlustleistung der Transistor im ungünstigsten Fall aufnehmen muss.

1.6 Aufgabe 15

Ein Kanal soll einen halbkreisförmigen Boden erhalten. Die Kanalwände verlaufen senkrecht.

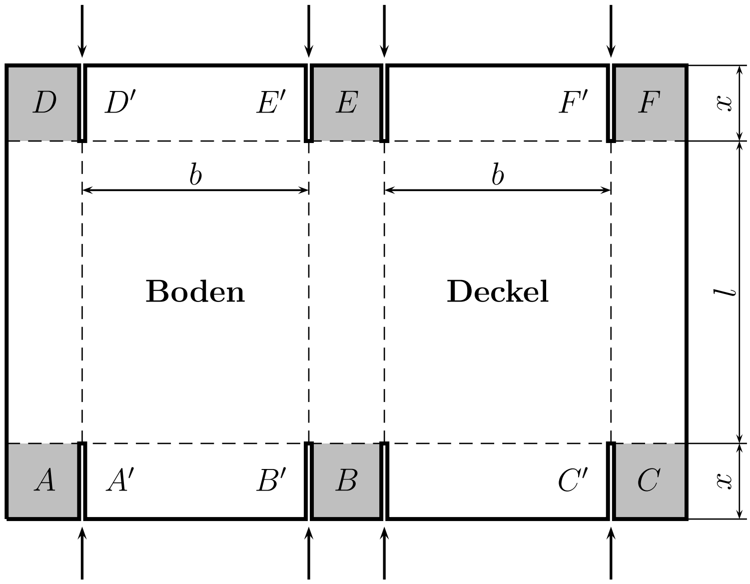


a) Wie groß müssen Breite b und Höhe h (Höhe der geraden Wände) des Kanals sein, damit bei gegebenem Kanal-Querschnitt A die benetzte Fläche des Kanals möglichst klein wird? Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung!

b) Interpretieren Sie das Ergebnis!

1.7 Aufgabe 17

Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Abmessungen 90 cm × 60 cm soll ein quaderförmiger Behälter mit Deckel hergestellt werden. Dazu wird die Pappe an den acht mit einem Pfeil markierten Stellen mit der Einschnitt-Tiefe x eingeschnitten. Dadurch entstehen die sechs grau markierten Laschen, die mit A bis F markiert sind. Diese Laschen sind **quadratisch**, Seitenlänge x.



Nach dem Einschneiden werden die vier Rechtecke, die sich an den Boden anschließen, an den gestrichelten Linien senkrecht hochgeknickt. Dadurch entsteht das Bodenteil des eigentlichen Behälters. Nun werden die vier Laschen A, B, D und E umgeknickt und so mit den Seitenteilen des Behälters verklebt, dass A auf A', B auf B', D auf D' und E auf E' kommt.

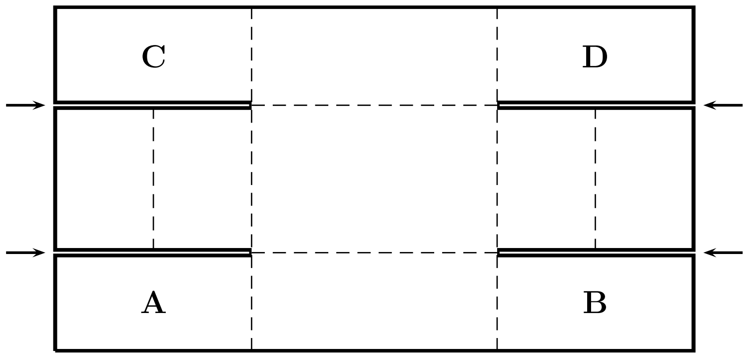
Zum Schluss wird der Deckel fertiggestellt. Auch dessen anliegende Rechtecke werden hochgebogen, die beiden Laschen C und F werden mit den Seitenteilen so verklebt, dass C auf C' und F auf F' kommt. Dadurch ist ein beweglicher Deckel entstanden, der über das Bodenteil geklappt werden kann.

Wie groß muss die Einschnitt-Tiefe x (und damit auch die Behälterhöhe) gewählt werden, damit ein Behälter mit **möglichst großem Volumen** entsteht? Welche Länge l, welche Breite b und welches Volumen V hat damit der Behälter?

Anmerkung: Natürlich müssen die Abmessungen des Deckels geringfügig größer sein, als die Abmessungen des Bodenteils. Ansonsten würde der Deckel nicht über das Bodenteil passen. **Diesen kleinen Unterschied sollen Sie aber bei der Berechnung vernachlässigen!**

1.8 Aufgabe 20

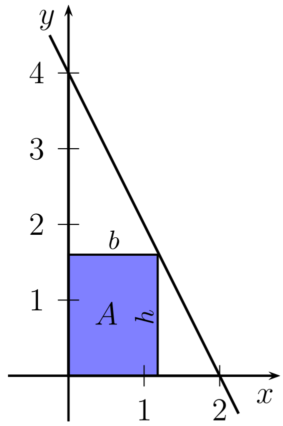
Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Abmessungen 30 mal 60 Zentimeter soll ein oben offener quaderförmiger Karton hergestellt werden. Dazu wird die Pappe an den vier mit Pfeil gekennzeichneten Stellen eingeschnitten. Danach werden die vier dabei entstandenden Laschen **A**, **B**, **C** und **D** rechtwinklig nach oben hochgebogen. Anschließend wird die Pappe entlang der gestrichelten Linien in der Verlängerung der Einschnitte rechtwinklig hochgebogen. Dadurch kommt Lasche **A** auf Lasche **C** und Lasche **B** auf Lasche **D** zu liegen. Falls die Laschen zu lang sind, werden sie zuvor noch ein Stück gekürzt, dass es passt. Zum Schluss werden noch die Seitenteile rechts und links hochgebogen und um die Laschen **A/C** bzw. **B/D** zur Innenseite des dabei entstehenden Kartons herumgefaltet. Das jeweilige Seitenteil bedeckt dadurch die beiden zugehörigen Eck-Laschen sowohl von außen als auch von innen genau ganz ohne irgendwo „überzustehen" oder eine Lücke zu lassen. Die Seitenteile sind also genau doppelt so lang, wie die Breite der Eck-Laschen.



Wie tief müssen die Einschnitte gemacht werden, damit ein Behälter mit **möglichst großem Volumen** entsteht? Geben Sie auch die **Abmessungen** des Behälters (Länge, Breite und Höhe) sowie sein **Volumen** an! Müssen die Laschen **A** bis **D** tatsächlich gekürzt werden?

1.9 Aufgabe 25

Die Gerade der Linearen Funktion $f(x)$ schneidet die x-Achse bei $x_0 = 2$ und die y-Achse bei $y_0 = 4$. Unter der Geraden soll ein möglichst großes Rechteck mit der Breite b und der Höhe h angelegt werden, wie in der Skizze nebenstehend dargestellt.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Geraden!

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differenzialrechnung die Breite b und die Höhe h des optimalen Rechteckes.

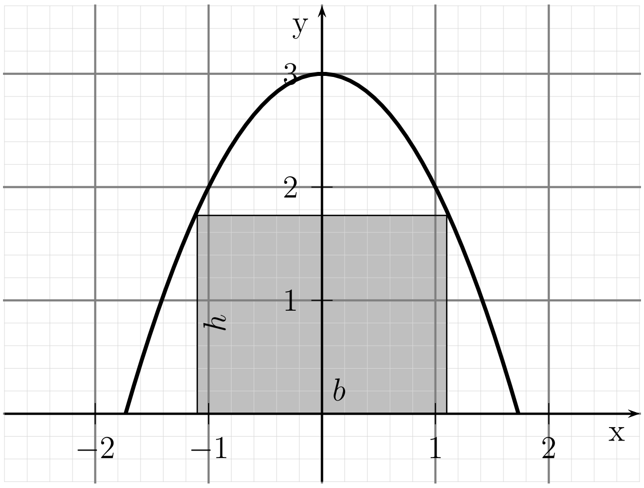
c) Wie groß wird damit die gesuchte Rechteckfläche?

1.10 Aufgabe 29

Unter einem parabelförmigen Gewölbe entsprechend der Funktion

$$f(x) = 3 - x^2$$

(in Metern) sollen Container mit rechteckigem Querschnitt abgestellt werden.



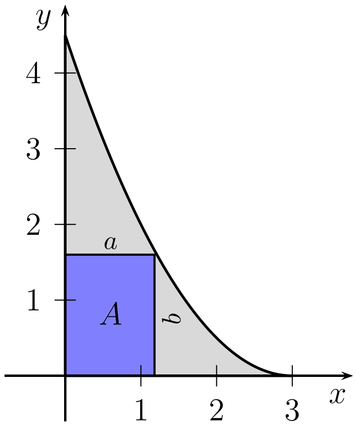
a) Welche Breite b und welche Höhe h sollen die Container haben, damit möglichst viel hinein passt?

b) Wieviel Prozent der Fläche unter dem Gewölbe nimmt die Querschnittfläche der Container ein?

Achtung! Die Fläche in der Skizze zeigt **nicht** die **optimale** Fläche!

1.11 Aufgabe 31

Eine Glasscherbe mit einem rechten Winkel hat eine parabelförmige Bruchkante. Die Parabel hat bei der Nullstelle $x_0 = 3$ ihren Scheitelpunkt und schneidet bei $y_0 = 4{,}5$ die y-Achse. Die Einheit ist dabei Dezimeter. Aus dieser Scherbe soll eine **möglichst große rechteckige Fläche *A*** herausgeschnitten werden, wie nebenstehend dargestellt.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel!

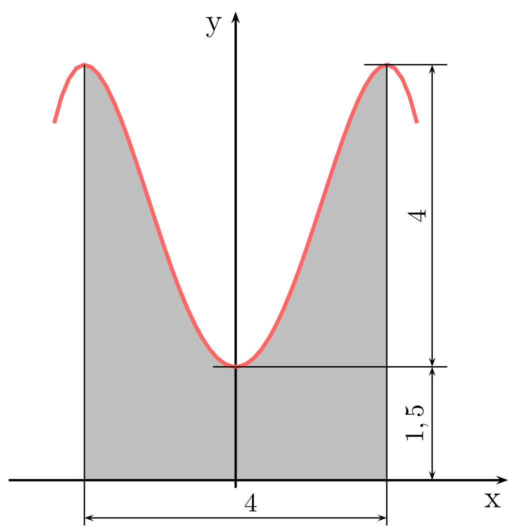
b) Bestimmen Sie die Seitenlängen a und b des optimalen Rechtecks! Gehen Sie dabei von der Funktion $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$ aus.

c) Wieviel Prozent des Glases fällt dabei als ungenutzter Verschnitt an?

2 Gemischte Aufgaben

2.1 Aufgabe 1

a) Die nebenstehende Skizze zeigt ein Dichtprofil im Querschnitt. Die Maße sind in der Einheit *Zentimeter* angegeben. Die Form des Querschnittes wird durch eine ganzrationale spiegelsymmetrische Funktion beschrieben, die ein Polynom 4. Grades darstellt. Stellen Sie die zugehörige Funktionsgleichung auf!



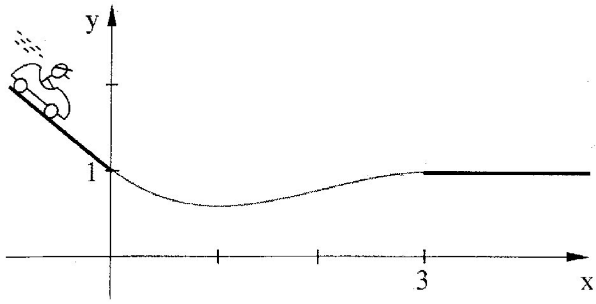
b) Berechnen Sie das Volumen des Dichtprofils pro laufendem Meter! Gehen Sie dabei von folgender Funktion aus!

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2}$$

c) Wie groß ist die Neigung (Steigung) des Dichtprofils an der steilsten Stelle?

2.2 Aufgabe 5

Das Endstück einer Achterbahn besteht aus zwei graden Gleisstücken, die durch ein Kurvenstück **knickfrei** miteinander verbunden sind. Das erste Geradenstück kommt von links und verläuft mit einer Steigung von $m = -0,9$ bergab. Es endet 1 m über dem Boden. 3 m rechts davon beginnt der waagerechte Auslauf der Bahn 1 m über dem Boden. Das (waagerecht gemessen) 3 m lange Kurvenstück zwischen den beiden graden Teilen stellt ein Polynom dritten Grades dar.



1. Legen Sie ein Koordinatensystem in den Bahnverlauf, so dass die x-Achse auf dem Boden liegt und das linke Geradenstück an der y-Achse endet, wie in der Skizze dargestellt. Bestimmen Sie aus den Angaben das Polynom $f(x)$.

2. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,6x^2 - 0,9x + 1$$

   Die Längeneinheit *Meter* wurde zur Vereinfachung weggelassen.

   - Wie nah kommt die Bahn dem Erdboden?
   - Wo befindet sich im ansteigen Bereich des Kurvenstückes die **steilste** Stelle? Welche Steigung hat die Kurve dort?

3. Als Unterbau für das Kurvenstück soll eine 40 cm-starke Betonwand gegossen werden. Wieviele Kubikmeter Beton sind erforderlich, wenn die Fundamente nicht mit eingerechnet werden?

2.3 Aufgabe 10

Ein Polynom dritten Grades $f_1(x)$ hat einen Wendepunkt bei $W(1|1)$. Die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 3x - 4$ berührt im Punkt B bei $x_B = 2$ den Graphen von $f_1(x)$ als Tangente.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

b) Untersuchen Sie die Funktion $f_1(x)$ auf Hoch-, Tief-, und Sattelpunkte und bestimmen Sie die Achsenabschnitte sowie die Schnittpunkte mit der Tangenten $f_2(x)$! Gehen Sie dabei von $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ aus.

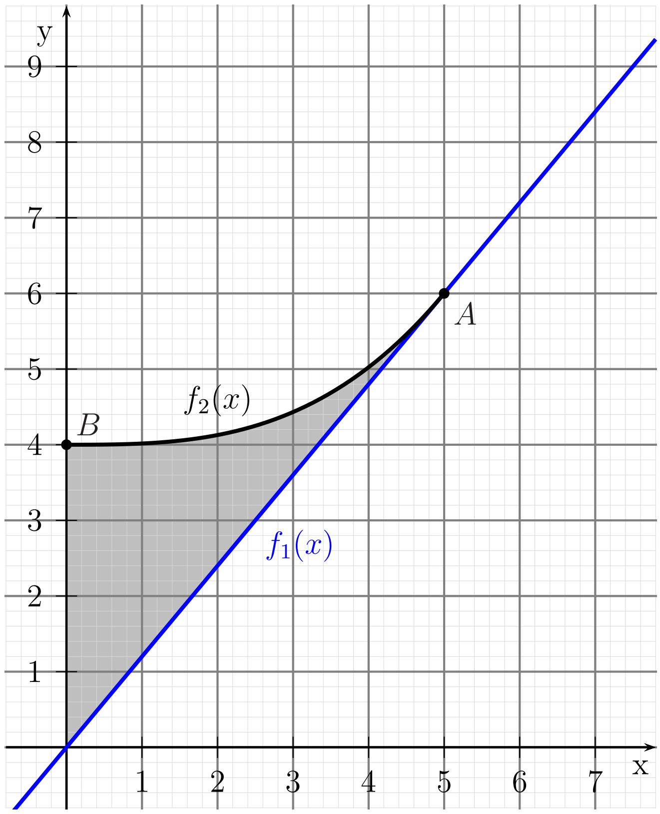
c) Skizzieren Sie die Graphen von Polynoms und Tangente!

d) Die gegebene Tangente mit der oben angegebenen Funktionsgleichung $f_2(x)$, die den Graphen von $f_1(x)$ in B berührt, schneidet diesen Graphen in einem weiteren Punkt P. Berechnen Sie die Fläche, die von den Funktionsgraphen von Polynom und Tangente zwischen P und B eingeschlossen wird!

2.4 Aufgabe 12

An einen Berghang mit linearem Verlauf soll eine Ski-Sprungschanze gebaut werden. Der natürliche Berghang dient dabei als Anlaufstrecke.

Im unteren Teil biegt die Spur im Punkt **A** ohne Knick ab zum Schanzentisch im Punkt **B**. Das Kurvenstück, das den Hang mit dem Schanzentisch verbindet, stellt ein **Polynom dritten Grades** dar, wobei die Kurve auf der Kante des Schanzentisches im Punkt **B** einen Sattelpunkt hat.



Ein Koordinatensystem ist an den Hang angelegt, so dass der Koordinatenursprung genau senkrecht unter der Kante des Schanzentisches auf dem natürlichen Hang liegt. Der Schanzentisch bei Punkt **B** liegt eine **unbekannte** Höhe darüber. (**Achtung!** Sie können also **nicht** den aus der Skizze ablesbaren Wert als gegeben voraussetzen!)

Der Punkt **A**, bei dem das Kurvenstück ohne Knick in den natürlichen Hang einmündet, liegt bei **A**(**5m**|**6m**).

a): Bestimmen Sie die Lineare Funktion $f_1(x)$, die den Verlauf des Hanges darstellt!

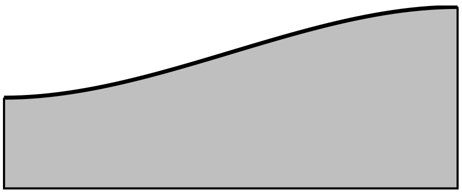
b): Bestimmen Sie das Polynom dritten Grades $f_2(x)$, das den Verlauf des gebogenen Kurvenstückes darstellt!

c): Unter dem gebogenen Kurvenstück muss ein Unterbau aus Beton angefertigt werden. Wieviel m^3 Beton ist (ohne Berücksichtigung des Fundamentes) erforderlich, wenn der Unterbau 80 cm breit werden soll?

d): Wie groß ist die Steigung des gebogenen Kurvenstückes genau in seiner Mitte (wagerecht gemessen)?

2.5 Aufgabe 16

Auf dem Lüdenscheider Rathausplatz stehen aneinandergereihte Betonsteine zur Dekoration mit der nebenstehend dargestellten Form. Die Steine sind auf der linken Seite 30 cm und auf der rechten Seite 60 cm hoch. Sie sind 1,5 m lang und 20 cm dick. Die Oberkante der Steine wird mit einem Polynom 3. Grades beschrieben. Dieses Polynom hat am linken Rand des Steines einen Tiefpunkt und am rechten einen Hochpunkt.

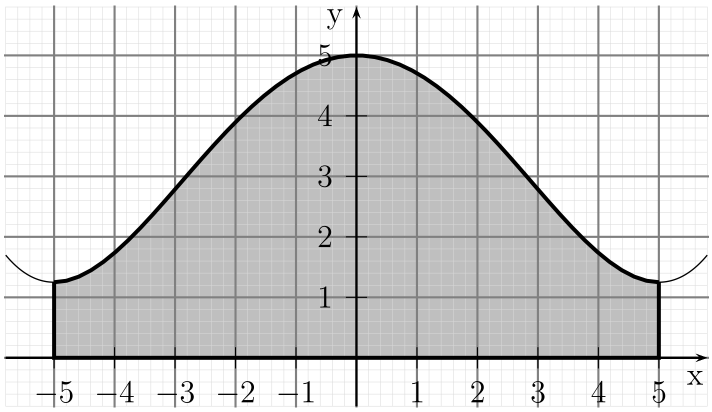


a) Legen Sie in die linke untere Ecke des Betonsteins ein Koordinatenkreuz und bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms. (Verwenden Sie *Dezimeter* als Längeneinheit.)

b) Die Masse des Betonsteins soll mit Hilfe der Integralrechnung bestimmt werden. Die Dichte des Betons beträgt $\varrho = 2{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$.

2.6 Aufgabe 19

Die Fassade am Giebel eines historischen Gebäudes hat eine obere Begrenzung in der Form eines spiegelsymmetrischen Polynoms 4. Grades. Rechts und links sowie auch unten stellt der Rand der Fassade eine gerade Linie dar. Die Fassade ist 10 Meter breit. In der Mitte hat sie eine Höhe von 5 Metern und an den Rändern beträgt die Höhe jeweils 1,25 Meter. An beiden Rändern hat das begrenzende Polynom jeweils einen Tiefpunkt.



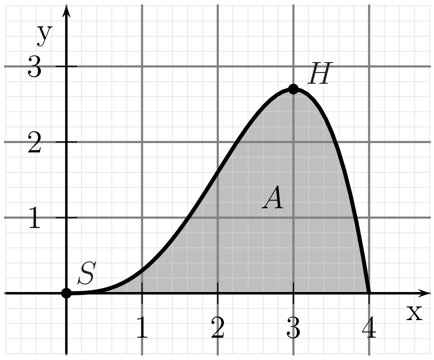
a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms! Stellen Sie diese in der Einheit *Meter* auf, Sie können die Einheiten dann weglassen.

b) In welchem Abstand von der Mitte befinden sich die steilsten Stellen? Wie groß ist die Steigung dort? Gehen Sie bei der Berechnung von folgendem Polynom aus: $f(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}3x^2 + 5$

c) Die Fassade soll frisch gestrichen werden. Für wieviele Quadratmeter muss Farbe beschafft werden?

2.7 Aufgabe 21

Eine Kinderrutschbahn hat die Form eines Polynoms 4. Grades. Die Rutschbahn hat links am unteren Endpunkt S im Koordinatenursprung einen Sattelpunkt und oben am Startpunkt H einen Hochpunkt. Dieser Hochpunkt liegt 2,70 m über dem Erdboden und waagerecht gemessen 3,00 m vom Endpunkt S entfernt. Rechts vom Hochpunkt sind Treppenstufen eingebaut, damit die Kinder zum Startpunkt hochklettern können. Es wird also auf der rechten Seite nach H hinaufgeklettert, und gerutscht wird dann von H nach S hinunter.



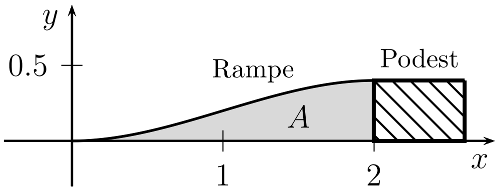
a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Rutsche. Während der Berechnungen können Sie die Einheit *Meter* zur Vereinfachung weglassen.

b) An welcher Stelle (horizontale Entfernung vom Endpunkt S und Höhe über dem Erdboden) hat die Rutschbahn ihre steilste Stelle? Wie groß ist dort ihre Steigung? Gehen Sie dabei von der Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}1x^4 + 0{,}4x^3$ aus.

c) Berechnen Sie die markierte Fläche A, die unter der kompletten Rutsche liegt. Hier soll eine Stützmauer errichtet werden, die die Rutsche trägt.
Anmerkung: Die rechte Begrenzung der Fläche kann nicht aus der Skizze **abgelesen** werden, sie muss **berechnet** werden!

2.8 Aufgabe 26

An ein 40 Zentimeter hohes Podest soll eine Rampe angebaut werden, die ein ruhiges ruckelfreies Hinauf- und Hinunterfahren mit Materialwagen ermöglichen soll. Zu diesem Zweck hat die Rampe die Form eines Polynomes dritten Grades und mündet sowohl auf Bodenniveau als auch oben auf dem Podest waagerecht ein. Die waagerecht gemessene Länge der Rampe beträgt 2 Meter.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms!

b) An welcher Stelle verläuft die Rampe am steilsten, und welche Steigung hat sie dort? Gehen Sie dabei von der Funktion $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}3x^2$ aus.

c) Bestimmen Sie die Querschnittfläche A für den Unterbau der Rampe!

2.9 Aufgabe 30

Ein Polynom 4. Grades hat einen Wendepunkt bei $W(1|3)$ und einen Hochpunkt an der Stelle $x_H = 2$. Weiterhin berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = -8x$ den Funktionsgraphen der gesuchten Funktion bei $x_b = 0$ als Tangente.

a) Ermitteln Sie aus den angegebenen Daten rechnerisch die Funktionsgleichung $f(x)$ der gesuchten Funktion!

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Tangentengleichung der Wendetangenten $f_2(x)$, die den Funktionsgraphen der gesuchten Funktion im gegebenen Wendepunkt $W(1|3)$ berührt! Gehen Sie bei der Berechnung der Tangentengleichung von der Funktionsgleichung $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x$ aus.

c) Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den Funktionsgraphen von $f(x)$ und $f_2(x)$ eingeschlossen wird. Skizzieren Sie vor Beginn der Rechnung den Verlauf von $f(x)$ und $f_2(x)$ mit geeigneten Maßstäben für die x- und die y-Achse. Markieren Sie die gesuchte Fläche in der Skizze.

3 Vektorrechnung

3.1 Aufgabe 4

Gegeben sind folgende drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen, also $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$.

b) Nun soll x so verändert werden, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **komplanar** werden. Gehen Sie dabei von $y = 6$ und $z = 0$ aus.

c) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{b}$!

d) Berechnen Sie den Winkel φ, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aus Aufgabenteil **b)** miteinander bilden!

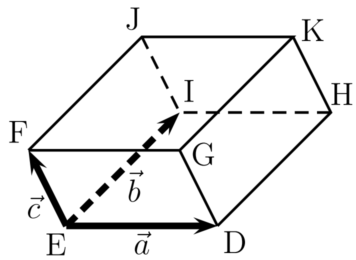
3.2 Aufgabe 6

Gegeben sind nachfolgende drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ v \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ w \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Parameter u, v und w so, dass die drei Vektoren paarweise zueinander senktecht stehen!

Ein Quader hat die Eckpunkte **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J** und **K**. Die Kanten $\overline{ED}$, $\overline{EI}$ und $\overline{EF}$ entsprechen den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Der Punkt E hat die Koordinaten $E(6|20|15)$. Das Kantenmodell des Quaders soll auf einem Bildschirm dargestellt werden. Die Koordinaten x, y und z des dreidimensionalen Quaders werden auf dem zweidimensionalen Bildschirm mit den Koordinaten x_b und y_b abgebildet durch die Zuordnung:



$$x_b = x + 0{,}5z \quad \text{und} \quad y_b = y + 0{,}5z$$

Berechnen Sie die Bildschirmkoordinaten aller 8 Punkte!

3.3 Aufgabe 8

Gegeben sind nachfolgende Vektoren mit $u = -1$, $v = 7$ und $w = 1$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ w \end{pmatrix}$$

a) Sind die drei Vektoren ***komplanar***? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung!

b) Berechnen Sie die Winkel α, β und γ, die die Vektoren miteinander bilden mit $\alpha = \angle \vec{b}, \vec{c}$, $\beta = \angle \vec{a}, \vec{c}$ und $\gamma = \angle \vec{a}, \vec{b}$!

c) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{d}$ mit $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$!

d) Bestimmen Sie nun die Parameter u, v und w so, dass die Winkel α, β und γ jeweils **rechte Winkel** darstellen!

3.4 Aufgabe 23

Gegeben sind die fünf Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -57 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen, also $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$.

b) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{b}$!

c) Nun soll der Parameter z in $\vec{c}$ so verändert werden, dass die drei Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ **komplanar** werden.

d) Berechnen Sie den Winkel φ, den die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ miteinander bilden!

3.5 Aufgabe 27

Gegeben sind die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Parameter x, y und z so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen, also $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$.

b) Berechnen Sie die **Längen** der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus Frageteil **a)**!

c) Prüfen Sie durch eine Rechnung, ob die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die Sie in Frageteil **a)** bestimmt haben, **komplanar** sind. Begründen Sie, warum Sie das Ergebnis auch ohne Rechnung erwarten durften!

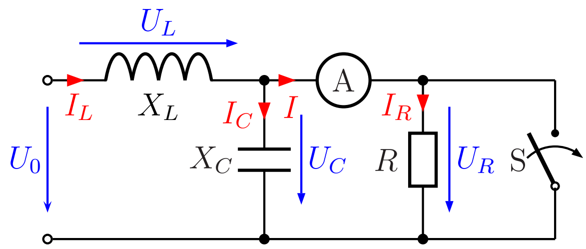
d) Bestimen Sie nun den Parameter x so, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **komplanar** werden. Gehen Sie dabei von den Parametern y und z aus, die Sie im Frageteil **a)** bestimmt haben.

e) Berechnen Sie den **Winkel** zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die sich aus Frageteil **d)** ergeben haben!

4 Komplexe Rechnung

4.1 Aufgabe 22

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Sie wird an einer sinusförmigen Wechselspannung mit $U_0 = 12\,\mathrm{V}$ betrieben. Mit dieser Wechselspannung ergeben sich folgende Werte:
$X_L = 80\,\Omega$
$X_C = 80\,\Omega$
Auch der Widerstand ist bekannt:
$R = 240\,\Omega$

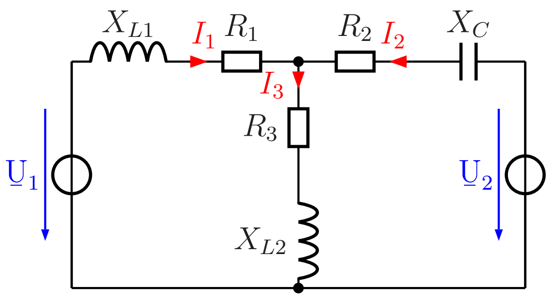


Wie verändert sich der Strom I, der am Strommesser abgelesen werden kann, wenn der Schalter geschlossen wird? Geben Sie dazu den Strom I bei geöffnetem und bei geschlossenen Schalter an. Interpretieren Sie das Ergebnis!

4.2 Aufgabe 24

In nebenstehender Wechselstrom-Schaltung sind folgende Werte bekannt:

$\underline{R}_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_{L1} = j4\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_{L2} = j1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_C = -j3\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{U}_1 = 22\,\mathrm{V}$
$\underline{U}_2 = 15\,\mathrm{V}$



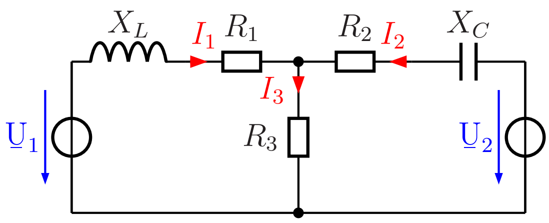
Die Schaltung kann zur Berechnung der Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ mit diesem Komplexen Gleichungssystem beschrieben werden:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} (1) & (\underline{X}_{L1} + \underline{R}_1 + \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\ (2) & (\underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{X}_C + \underline{R}_2 + \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_2 \end{array}}$$

a) Berechnen Sie damit die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$!
b) Bestimmen Sie die Beträge der Ströme I_1, I_2 und I_3!

4.3 Aufgabe 28

In nebenstehender Wechselstrom-Schaltung sind folgende Werte bekannt:
$\underline{R}_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_L = j3\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_C = -j3\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{U}_1 = 12\,\mathrm{V}$
$\underline{U}_2 = j12\,\mathrm{V}$



Die Schaltung kann zur Berechnung der Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ mit diesem Komplexen Gleichungssystem beschrieben werden:

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl} (1) & (\underline{X}_L + \underline{R}_1 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_1 & +\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\ (2) & \underline{R}_3 \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{X}_C + \underline{R}_2 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_2 \end{array}}$$

a) Berechnen Sie damit die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$!
b) Bestimmen Sie die Beträge der Ströme I_1, I_2 und I_3!

5 Integralrechnung

5.1 Aufgabe 7

Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen der Fuktionen $f_1(x) = -x^2 + 6x - 5$ und $f_2(x) = x^2 - 8x + 7$ eingeschlossen wird. Skizzieren Sie vor Beginn der Rechnung die Fläche in einem geeigneten Koordinatensystem!

5.2 Aufgabe 9

Gegeben sind die Funktionen mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 2x^2 - 8x + 4 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = 2x - 4$$

Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Funktionsgraphen eingeschlossen wird! Fertigen Sie vor der Rechnung eine Skizze an!