Aufgabe 8

Gegeben sind nachfolgende Vektoren mit $u = -1$, $v = 7$ und $w = 1$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ w \end{pmatrix}$$

a) Sind die drei Vektoren ***komplanar***? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung!

b) Berechnen Sie die Winkel α, β und γ, die die Vektoren miteinander bilden mit $\alpha = \angle\vec{b}, \vec{c}$, $\beta = \angle\vec{a}, \vec{c}$ und $\gamma = \angle\vec{a}, \vec{b}$!

c) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{d}$ mit $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$!

d) Bestimmen Sie nun die Parameter u, v und w so, dass die Winkel α, β und γ jeweils **rechte Winkel** darstellen!

Lösung:

a)

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 - 1 - 9 + 21 + 1 + 3 = 8 \neq 0$$

Da die Determinante $\neq 0$ ist, liegt **keine Komplanarität** vor.

b)

Bestimmung des Winkels α:

$$\begin{aligned}
|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\alpha &= \vec{b} \cdot \vec{c} \\
\cos\alpha &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \\
\alpha &= \arccos \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \\
\alpha &= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}} \\
\alpha &= \arccos \frac{(-1) \cdot (-3) + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} \\
\alpha &= \arccos \frac{11}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{11}} \\
\alpha &= \arccos \frac{11}{\sqrt{561}} \\
\alpha &\approx 62{,}327^\circ
\end{aligned}$$

Bestimmung des Winkels β:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\beta &= \vec{a} \cdot \vec{c} \\
\cos\beta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} \\
\beta &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} \\
\beta &= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}} \\
\beta &= \arccos \frac{(-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} \\
\beta &= \arccos \frac{7}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} \\
\beta &= \arccos \frac{7}{11} \\
\beta &\approx 50{,}479^\circ
\end{aligned}$$

Bestimmung des Winkels γ:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma &= \vec{a}\cdot\vec{b}\\
\cos\gamma &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\\
\gamma &= \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\\
\gamma &= \arccos\frac{\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\7\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{matrix}-1\\3\\1\end{matrix}\right|\cdot\left|\begin{matrix}-1\\7\\1\end{matrix}\right|}\\
\gamma &= \arccos\frac{(-1)\cdot(-1)+3\cdot7+1\cdot1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+7^2+1^2}}\\
\gamma &= \arccos\frac{23}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{51}}\\
\gamma &= \arccos\frac{23}{561}\\
\gamma &\approx 13{,}818^\circ
\end{aligned}$$

c)

$$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\7\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\11\\3\end{pmatrix}$$

$$|\vec{d}|=\sqrt{(-5)^2+11^2+3^2}=\sqrt{155}\approx 12{,}45$$

Die Länge von $\vec{d}$ beträgt etwa 12,45 Längeneinheiten.

d)

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \vec{a}\cdot\vec{b} & = & 0\\
(2) & \vec{a}\cdot\vec{c} & = & 0\\
(3) & \vec{b}\cdot\vec{c} & = & 0\\
\hline
(1) & \begin{pmatrix} u\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1\\ v\\ 1\end{pmatrix} & = & 0\\
(2) & \begin{pmatrix} u\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3\\ 1\\ w\end{pmatrix} & = & 0\\
(3) & \begin{pmatrix} -1\\ v\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3\\ 1\\ w\end{pmatrix} & = & 0\\
\hline
(1) & -u+3v+1 & = & 0\\
(2) & -3u+3+w & = & 0\\
(3) & 3+v+w & = & 0
\end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem wird in Normalform umgestellt. Man erhält:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & -u & +3v & & = & -1\\
(2) & -3u & & +w & = & -3\\
(3) & & v & +w & = & -3
\end{array}}$$

Zur Lösung kann jedes beliebige Lösungsverfahren verwendet werden. Ich benutze für den ersten Reduktionsschritt das Additions-/Subtraktionsverfahren. Zunächst soll die Variable w eliminiert werden. Dazu wird Gleichung (2) von Gleichung (3) subtrahiert.

$$\begin{array}{lrrrcrl}
(3) & & v & +w & = & -3 & |\\
(2) & -3u & & +w & = & -3 & |-\\
\hline
(4) & 3u & +v & & = 0 & &
\end{array}$$

Für die weitere Lösung bietet sich das Einsetzungsverfahren an, da diese Gleichung (4) bequem nach v umgestellt werden kann.

$$\begin{array}{lrcll}
(4) & 3u+v & = & 0 & \quad |-3u\\
(4a) & v & = & -3u &
\end{array}$$

Diesen Term setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcll}
-u+3v & = & -1 & \\
-u+3\cdot(-3u) & = & -1 & \\
-u-9u & = & -1 & \\
-10u & = & -1 & \quad |:(-10)\\
u & = & 0,1 &
\end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (4a) eingesetzt:

$$v=-3u=-3\cdot 0{,}1=-0,3$$

Dieses Ergebnis wird in Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{aligned} v + w &= -3 \\ -0{,}3 + w &= -3 \qquad \mid +\,0{,}3 \\ w &= -2{,}7 \end{aligned}$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $\boxed{u = 0{,}1}$ $\boxed{v = -0{,}3}$ $\boxed{w = -2{,}7}$