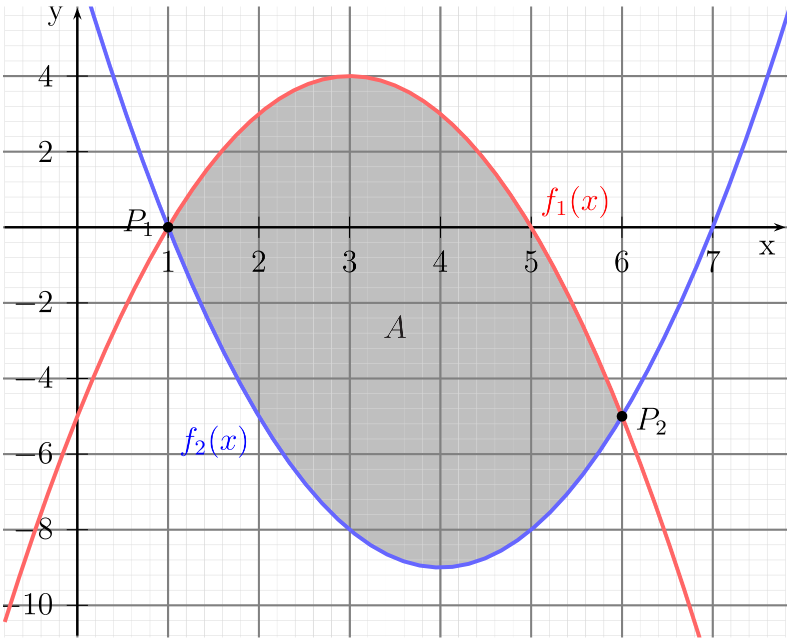
Aufgabe 7

Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen der Fuktionen $f_1(x) = -x^2 + 6x - 5$ und $f_2(x) = x^2 - 8x + 7$ eingeschlossen wird. Skizzieren Sie vor Beginn der Rechnung die Fläche in einem geeigneten Koordinatensystem!

Lösung:



Schnittpunktbestimmung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsterme gleichgesetzt werden.

$$
\begin{array}{rcll}
f_1(x) & = & f_2(x) & \\
-x^2 + 6x - 5 & = & x^2 - 8x + 7 & \mid + x^2 - 6x + 5 \\
0 & = & 2x^2 - 14x + 12 & \mid : 2 \\
0 & = & x^2 - 7x + 6 & \\
x_{1/2} & = & \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} & \\
x_{1/2} & = & \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{24}{4}} & \\
x_{1/2} & = & \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} & \\
x_{1/2} & = & \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} & \\
x_1 = 1 & & x_2 = 6 &
\end{array}
$$

Damit stehen die Integrationsgrenzen fest, die Fläche kann bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(f_1(x) - f_2(x)\right)\ dx \\
&= \int\limits_{1}^{6} (-x^2 + 6x - 5) - (x^2 - 8x + 7)\ dx \\
&= \int\limits_{1}^{6} (-x^2 + 6x - 5 - x^2 + 8x - 7)\ dx \\
&= \int\limits_{1}^{6} (-2x^2 + 14x - 12)\ dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 7x^2 - 12x\right]_1^6 \\
&= \left(-\frac{2}{3}\cdot 6^3 + 7\cdot 6^2 - 12\cdot 6\right) - \left(-\frac{2}{3}\cdot 1^3 + 7\cdot 1^2 - 12\cdot 1\right) \\
&= 36 - \left(-\frac{17}{3}\right) \\
A &= 41\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Die Fläche beträgt $\boxed{A = 41\frac{2}{3}\,\mathrm{FE}}$