

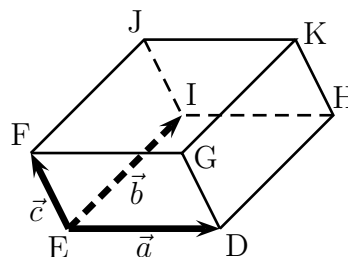
Aufgabe 6

Gegeben sind nachfolgende drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ v \\ -8 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ w \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Parameter u , v und w so, dass die drei Vektoren paarweise zueinander senkrecht stehen!

b) Ein Quader hat die Eckpunkte **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J** und **K**. Die Kanten \overline{ED} , \overline{EI} und \overline{EF} entsprechen den Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} , wie im Bild nebenstehend dargestellt. Der Punkt E hat die Koordinaten $E(6|20|15)$.



c) Das Kantenmodell des Quaders soll auf einem Bildschirm dargestellt werden. Die Koordinaten x , y und z des dreidimensionalen Quaders werden auf dem zweidimensionalen Bildschirm mit den Koordinaten x_b und y_b abgebildet durch die Zuordnung:

$$x_b = x + 0,5z \quad \text{und} \quad y_b = y + 0,5z$$

Berechnen Sie die Bildschirmkoordinaten aller 8 Punkte!

Lösung:

a) Die drei Vektoren sollen paarweise aufeinander senkrecht stehen. Aus den drei Bedingungen dafür können drei Gleichungen gebildet werden.

$$\begin{aligned}\vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow u \cdot 4 + 10 \cdot v + (-5) \cdot (-8) = 0 \\ \vec{a} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow u \cdot 11 + 10 \cdot (-2) + (-5) \cdot w = 0 \\ \vec{b} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow 4 \cdot 11 + v \cdot (-2) + (-8) \cdot w = 0\end{aligned}$$

Die drei Gleichungen werden in die Normalform gebracht. Man erhält ein Lineargleichungssystem, das mit jedem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden kann.

$$\begin{array}{l} (1) \quad 4u + 10v \quad \quad = -40 \\ (2) \quad 11u \quad \quad \quad -5w = 20 \\ (3) \quad \quad \quad -2v - 8w = -44 \end{array}$$

Als Lösungsverfahren wähle ich willkürlich das **Einsetzungsverfahren**.

Gleichung (3) wird nach v umgestellt, das Ergebnis muss in **beide anderen** Gleichungen eingesetzt werden. Da v in Gleichung (2) garnicht vorkommt, muss tatsächlich nur in (1) eingesetzt werden.

$$\begin{array}{l} -2v - 8w = -44 \quad | + 8w \\ -2v = -44 + 8w \quad | : (-2) \\ v = 22 - 4w \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{in (1): } 4u + 10 \cdot (22 - 4w) = -40 \\ 4u + 220 - 40w = -40 \quad | - 220 \\ 4u - 40w = -260 \end{array}$$

Übrig gelieben ist jetzt ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung:

$$\begin{array}{l} (1a) \quad 4u - 40w = -260 \\ (2) \quad 11u - 5w = 20 \end{array}$$

Die Gleichung (1a) kann gut nach u umgestellt werden.

$$\begin{array}{l} 4u - 40w = -260 \quad | + 40w \\ 4u = 40w - 260 \quad | : 4 \\ u = 10w - 65 \end{array}$$

Der Term wird in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{l} 11u - 5w = 20 \\ 11 \cdot (10w - 65) - 5w = 20 \\ 110w - 715 - 5w = 20 \quad | + 715 \\ 105w = 735 \quad | : 105 \\ w = 7 \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die zuletzt umgestellte Gleichung (1a) eingesetzt.

$$\begin{aligned}u &= 10w - 65 \\u &= 10 \cdot 7 - 65 \\u &= 5\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die zuerst umgestellte Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{aligned}v &= 22 - 4w \\v &= 22 - 4 \cdot 7 \\v &= -6\end{aligned}$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $u = 5$ $v = -6$ $w = 7$

Mit diesen Werten lauten die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) Für die Bestimmung der Eckpunkte ordne ich jedem Eckpunkt D bis K des Quaders einen sogenannten „Aufvektor“ \vec{D} bis \vec{K} zu. Das ist der Vektor, der vom Koordinatenursprung bis zum jeweiligen Eckpunkt reicht. Zum gegebenen Punkt $E(6|20|15)$ gehört dann der Aufvektor \vec{E} :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Vektoren ergeben sich die zugehörigen Punkte nur durch Umändern der Schreibweise der Komponenten als Koordinaten.

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow D(11|30|10)$$

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} \Rightarrow F(17|18|22)$$

$$\vec{G} = \vec{F} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow G(22|28|17)$$

$$\vec{H} = \vec{D} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(15|24|2)$$

$$\vec{I} = \vec{E} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow I(10|14|7)$$

$$\vec{J} = \vec{F} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow J(21|12|14)$$

$$\vec{K} = \vec{G} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow K(26|22|9)$$

c) Zur besseren Unterscheidung erhalten die Bildschirmpunkte zu den Punkten D bis K den Index b , also D_b bis K_b .

$$\begin{cases} x_{Db} = 11 + 0,5 \cdot 10 = 16 \\ y_{Db} = 30 + 0,5 \cdot 10 = 35 \end{cases} \Rightarrow D_b(16|35)$$

$$\begin{cases} x_{Eb} = 6 + 0,5 \cdot 15 = 13,5 \\ y_{Eb} = 20 + 0,5 \cdot 15 = 27,5 \end{cases} \Rightarrow E_b(13,5|27,5)$$

$$\begin{cases} x_{Fb} = 17 + 0,5 \cdot 22 = 28 \\ y_{Fb} = 18 + 0,5 \cdot 22 = 29 \end{cases} \Rightarrow F_b(28|29)$$

$$\begin{cases} x_{Gb} = 22 + 0,5 \cdot 17 = 30,5 \\ y_{Gb} = 28 + 0,5 \cdot 17 = 36,5 \end{cases} \Rightarrow G_b(30,5|36,5)$$

$$\begin{cases} x_{Hb} = 15 + 0,5 \cdot 2 = 16 \\ y_{Hb} = 24 + 0,5 \cdot 2 = 25 \end{cases} \Rightarrow H_b(16|25)$$

$$\begin{cases} x_{Ib} = 10 + 0,5 \cdot 7 = 13,5 \\ y_{Ib} = 14 + 0,5 \cdot 7 = 17,5 \end{cases} \Rightarrow I_b(13,5|17,5)$$

$$\begin{cases} x_{Jb} = 21 + 0,5 \cdot 14 = 28 \\ y_{Jb} = 12 + 0,5 \cdot 14 = 19 \end{cases} \Rightarrow J_b(28|19)$$

$$\begin{cases} x_{Kb} = 26 + 0,5 \cdot 9 = 30,5 \\ y_{Kb} = 22 + 0,5 \cdot 9 = 26,5 \end{cases} \Rightarrow K_b(30,5|26,5)$$

Nebenstehend ist das Bild dargestellt, dass sich bei der Darstellung auf dem Bildschirm ergibt.

Anmerkung: Diese Angabe gehört nicht mehr zu eigentlichen Lösung, sie dient nur zur Veranschaulichung des Ergebnisses.

