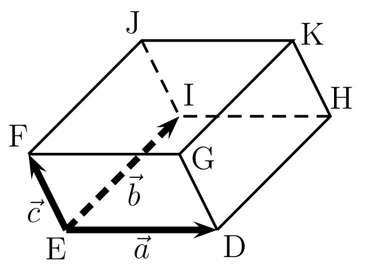
Aufgabe 6

Gegeben sind nachfolgende drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ v \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ w \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Parameter u, v und w so, dass die drei Vektoren paarweise zueinander senkrecht stehen!

b) Ein Quader hat die Eckpunkte **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J** und **K**. Die Kanten $\overline{ED}$, $\overline{EI}$ und $\overline{EF}$ entsprechen den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, wie im Bild nebenstehend dargestellt. Der Punkt E hat die Koordinaten $E(6|20|15)$.



c) Das Kantenmodell des Quaders soll auf einem Bildschirm dargestellt werden. Die Koordinaten x, y und z des dreidimensionalen Quaders werden auf dem zweidimensionalen Bildschirm mit den Koordinaten x_b und y_b abgebildet durch die Zuordnung:

$$x_b = x + 0{,}5z \quad \text{und} \quad y_b = y + 0{,}5z$$

Berechnen Sie die Bildschirmkoordinaten aller 8 Punkte!

Lösung:

a) Die drei Vektoren sollen paarweise aufeinander senkrecht stehen. Aus den drei Bedingungen dafür können drei Gleichungen gebildet werden.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\vec{a}\perp\vec{b} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{b} & = & 0 & \Rightarrow & u\cdot 4 & +10\cdot v & +(-5)\cdot(-8) & = & 0 \\
\vec{a}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{c} & = & 0 & \Rightarrow & u\cdot 11 & +10\cdot(-2) & +(-5)\cdot w & = & 0 \\
\vec{b}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{b}\cdot\vec{c} & = & 0 & \Rightarrow & 4\cdot 11 & +v\cdot(-2) & +(-8)\cdot w & = & 0
\end{array}$$

Die drei Gleichungen werden in die Normalform gebracht. Man erhält ein Lineargleichungssystem, das mit jedem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden kann.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & 4u & +10v & & = & -40 \\
(2) & 11u & & -5w & = & 20 \\
(3) & & -2v & -8w & = & -44
\end{array}}$$

Als Lösungsverfahren wähle ich willkürlich das **Einsetzungsverfahren**.

Gleichung (3) wird nach v umgestellt, das Ergebnis muss in **beide anderen** Gleichungen eingesetzt werden. Da v in Gleichung (2) garnicht vorkommt, muss tatsächlich nur in (1) eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll}
-2v-8w & = & -44 & |+8w \\
-2v & = & -44+8w & |:(-2) \\
v & = & 22-4w &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll}
\text{in (1):} & 4u+10\cdot(22-4w) & = & -40 & \\
& 4u+220-40w & = & -40 & |-220 \\
& 4u-40w & = & -260 &
\end{array}$$

Übrig gelieben ist jetzt ein Lineargleichungssysten 2. Ordnung:

$$\boxed{\begin{array}{rrrcr}
(1a) & 4u & -40w & = & -260 \\
(2) & 11u & -5w & = & 20
\end{array}}$$

Die Gleichung (1a) kann gut nach u umgestellt werden.

$$\begin{array}{rcll}
4u-40w & = & -260 & |+40w \\
4u & = & 40w-260 & |:4 \\
u & = & 10w-65 &
\end{array}$$

Der Term wird in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
11u-5w & = & 20 & \\
11\cdot(10w-65)-5w & = & 20 & \\
110w-715-5w & = & 20 & |+715 \\
105w & = & 735 & |:105 \\
w & = & 7 &
\end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in die zuletzt umgestellte Gleichung (1a) eingesetzt.

$$\begin{aligned} u &= 10w - 65 \\ u &= 10 \cdot 7 - 65 \\ u &= 5 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die zuerst umgestellte Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{aligned} v &= 22 - 4w \\ v &= 22 - 4 \cdot 7 \\ v &= -6 \end{aligned}$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $\boxed{u = 5}$ $\boxed{v = -6}$ $\boxed{w = 7}$

Mit diesen Werten lauten die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) Für die Bestimmung der Eckpunkte ordne ich jedem Eckpunkt D bis K des Quaders einen sogenannten „Aufvektor“ $\vec{D}$ bis $\vec{K}$ zu. Das ist der Vektor, der vom Koordinatenursprung bis zum jeweiligen Eckpunkt reicht. Zum gegebenen Punkt $E(6|20|15)$ gehört dann der Aufvektor $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Vektoren ergeben sich die zugehörigen Punkte nur durch Umändern der Schreibweise der Komponenten als Koordinaten.

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D(11|30|10)$$

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(17|18|22)$$

$$\vec{G} = \vec{F} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad G(22|28|17)$$

$$\vec{H} = \vec{D} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H(15|24|2)$$

$$\vec{I} = \vec{E} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad I(10|14|7)$$

$$\vec{J} = \vec{F} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J(21|12|14)$$

$$\vec{K} = \vec{G} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 22 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 22 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad K(26|22|9)$$

c) Zur besseren Unterscheidung erhalten die Bildschirmpunkte zu den Punkten D bis K den Index b, also D_b bis K_b.

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} x_{Db} & = & 11 + 0{,}5 \cdot 10 & = & 16 \\ y_{Db} & = & 30 + 0{,}5 \cdot 10 & = & 35 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad D_b(16|35)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} x_{Eb} & = & 6 + 0{,}5 \cdot 15 & = & 13{,}5 \\ y_{Eb} & = & 20 + 0{,}5 \cdot 15 & = & 27{,}5 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad E_b(13{,}5|27{,}5)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} x_{Fb} & = & 17 + 0{,}5 \cdot 22 & = & 28 \\ y_{Fb} & = & 18 + 0{,}5 \cdot 22 & = & 29 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad F_b(28|29)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} x_{Gb} & = & 22 + 0{,}5 \cdot 17 & = & 30{,}5 \\ y_{Gb} & = & 28 + 0{,}5 \cdot 17 & = & 36{,}5 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad G_b(30{,}5|36{,}5)$$

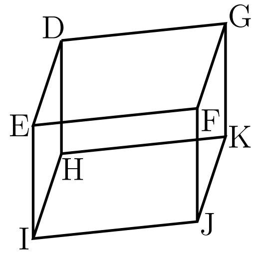
$$\left\{ \begin{array}{lcccc} x_{Hb} & = & 15 + 0{,}5 \cdot 2 & = & 16 \\ y_{Hb} & = & 24 + 0{,}5 \cdot 2 & = & 25 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad H_b(16|25)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} x_{Ib} & = & 10 + 0{,}5 \cdot 7 & = & 13{,}5 \\ y_{Ib} & = & 14 + 0{,}5 \cdot 7 & = & 17{,}5 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad I_b(13{,}5|17{,}5)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} x_{Jb} & = & 21 + 0{,}5 \cdot 14 & = & 28 \\ y_{Jb} & = & 12 + 0{,}5 \cdot 14 & = & 19 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad J_b(28|19)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} x_{Kb} & = & 26 + 0{,}5 \cdot 9 & = & 30{,}5 \\ y_{Kb} & = & 22 + 0{,}5 \cdot 9 & = & 26{,}5 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad K_b(30{,}5|28{,}5)$$

Nebenstehend ist das Bild dargestellt, dass sich bei der Darstellung auf dem Bildschirm ergibt.



Anmerkung: Diese Angabe gehört nicht mehr zu eigentlichen Lösung, sie dient nur zur Veranschaulichung des Ergebnisses.