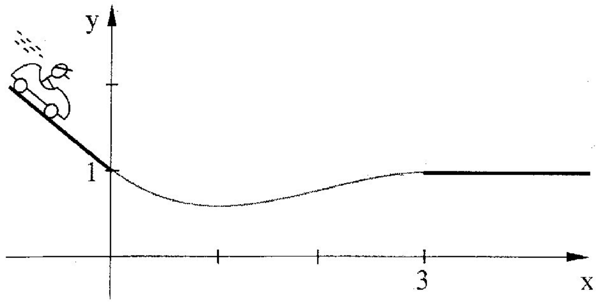
Aufgabe 5

Das Endstück einer Achterbahn besteht aus zwei graden Gleisstücken, die durch ein Kurvenstück **knickfrei** miteinander verbunden sind. Das erste Geradenstück kommt von links und verläuft mit einer Steigung von $m = -0,9$ bergab. Es endet 1 m über dem Boden. 3 m rechts davon beginnt der waagerechte Auslauf der Bahn 1 m über dem Boden. Das (waagerecht gemessen) 3 m lange Kurvenstück zwischen den beiden graden Teilen stellt ein Polynom dritten Grades dar.



1. Legen Sie ein Koordinatensystem in den Bahnverlauf, so dass die x-Achse auf dem Boden liegt und das linke Geradenstück an der y-Achse endet, wie in der Skizze dargestellt. Bestimmen Sie aus den Angaben das Polynom $f(x)$.

2. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,6x^2 - 0,9x + 1$$

Die Längeneinheit *Meter* wurde zur Vereinfachung weggelassen.

- Wie nah kommt die Bahn dem Erdboden?
- Wo befindet sich im ansteigen Bereich des Kurvenstückes die **steilste** Stelle? Welche Steigung hat die Kurve dort?

3. Als Unterbau für das Kurvenstück soll eine 40 cm-starke Betonwand gegossen werden. Wieviele Kubikmeter Beton sind erforderlich, wenn die Fundamente nicht mit eingerechnet werden?

Lösung:

Aufstellen der Funktionsgleichung Allgemeiner Ansatz:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

Am linken Rand und am rechten Rand des Kurvenstückes ist jeweils der Funktionswert und die Steigung bekannt.

$$\begin{array}{lrcll rcl} (1) & f(0) & = & 1 & \Rightarrow & 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d & = & 1 \\ (2) & f'(0) & = & -0{,}9 & \Rightarrow & 0 \cdot a + 0 \cdot b + c & = & -0{,}9 \\ (3) & f(3) & = & 1 & \Rightarrow & 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d & = & 1 \\ (4) & f'(3) & = & 0 & \Rightarrow & 27 \cdot a + 6 \cdot b + c & = & 0 \end{array}$$

Die ersten beiden Gleichungen führen sofort zu den Ergebnissen:

$$d = 1 \quad \text{und} \quad c = -0{,}9$$

Die Werte werden in Gleichung (3) und (4) eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcll} (3) & 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot (-0{,}9) + 1 & = & 1 & \\ (4) & 27 \cdot a + 6 \cdot b - 0{,}9 & = & 0 & \\ \hline (3) & 27a + 9b & = & 2{,}7 & | \\ (4) & 27a + 6b & = & 0{,}9 & | \ - \\ \hline (3)-(4) & 3b & = & 1{,}8 & | \ :3 \\ & b & = & 0{,}6 & \end{array}$$

Ergebnis in Gleichung (4) einsetzen:

$$\begin{aligned} 27a + 6 \cdot b - 0{,}9 &= 0 \\ 27a + 3{,}6 - 0{,}9 &= 0 \\ 27a + 2{,}7 &= 0 \quad | - 2{,}7 \\ 27a &= -2{,}7 \quad | : 27 \\ a &= -0{,}1 \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2 - 0{,}9x + 1}$

Tiefpunkt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2 - 0{,}9x + 1 \\ f'(x) &= -0{,}3x^2 + 1{,}2x - 0{,}9 \\ f''(x) &= -0{,}6x + 1{,}2 \\ f'''(x) &= -0{,}6 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für einen Tiefpunkt ist das Nullwerden der 1. Ableitung.

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0 \\ -0{,}3x_E^2 + 1{,}2x_E - 0{,}9 &= 0 \quad | : (-0{,}3) \\ x_E^2 - 4x_E + 3 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\ x_{E1/2} &= 2 \pm 1 \\ x_{E1} = 1 & \qquad x_{E2} = 3 \end{aligned}$$

Der Wert $x_{E2} = 3$ entfällt, da er am Rand des Bogenstücks liegt. Bleibt noch $x_{E1} = 1$ zu untersuchen.

$$f''(1) = -0{,}6 \cdot 1 + 1{,}2 = 0{,}6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 1$$

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = -0{,}1 \cdot 1^3 + 0{,}6 \cdot 1^2 - 0{,}9 \cdot 1 + 1 = 0{,}6$$

Tiefpunkt bei: $\boxed{T(1|0{,}6)}$
Der tiefste Punkt liegt 60 cm über dem Erdboden.

Steilste Stelle: Wir suchen ein Maximum der Steigung, also muss die Ableitung der Ableitung (die 2. Ableitung) Null sein. Dies ist auch das Kriterium für einen Wendepunkt.

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \\ -0{,}6x_W + 1{,}2 &= 0 \quad | - 1{,}2 \\ -0{,}6x_W &= -1{,}2 \quad | : (-0{,}6) \\ x_W &= 2 \end{aligned}$$

$$f'''(2) = -0{,}6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum für } f'(x)$$

$$f'(2) = -0{,}3 \cdot 2^2 + 1{,}2 \cdot 2 - 0{,}9 = 0{,}3$$

Die Steigung an der steilsten Stelle beträgt: $\boxed{m = 0{,}3}$

Unterbau: Zunächst wird die Fläche A unter dem Kurvenstück bestimmt.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 f(x)\,dx \\ &= \int_0^3 -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2 - 0{,}9x + 1\,dx \\ &= \left[-0{,}025x^4 + 0{,}2x^3 - 0{,}45x^2 + x\right]_0^3 \\ &= \left(-0{,}025 \cdot 3^4 + 0{,}2 \cdot 3^3 - 0{,}45 \cdot 3^2 + 3\right) - \left(-0{,}025 \cdot 0^4 + 0{,}2 \cdot 0^3 - 0{,}45 \cdot 0^2 + 0\right) \\ &= 2{,}325 - 0 \\ A &= 2{,}325\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Volumenbestimmung:

$$\begin{aligned} V &= A \cdot d \\ &= 2{,}325\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}4\,\mathrm{m} \\ V &= 0{,}93\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Das Volumen beträgt: $\boxed{0{,}93\,\mathrm{m}^3}$