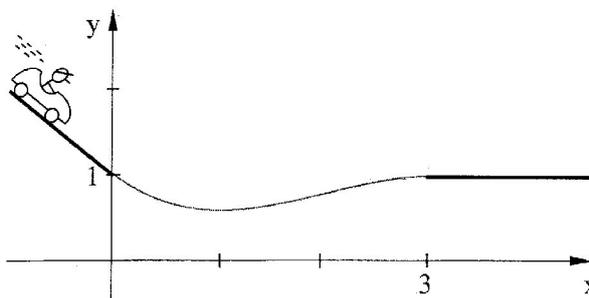


Aufgabe 5

Das Endstück einer Achterbahn besteht aus zwei geraden Gleisstücken, die durch ein Kurvenstück **knickfrei** miteinander verbunden sind. Das erste Geradenstück kommt von links und verläuft mit einer Steigung von $m = -0,9$ bergab. Es endet 1 m über dem Boden. 3 m rechts davon beginnt der waagerechte Auslauf der Bahn 1 m über dem Boden. Das (waagrecht gemessen) 3 m lange Kurvenstück zwischen den beiden geraden Teilen stellt ein Polynom dritten Grades dar.



1. Legen Sie ein Koordinatensystem in den Bahnverlauf, so dass die x -Achse auf dem Boden liegt und das linke Geradenstück an der y -Achse endet, wie in der Skizze dargestellt. Bestimmen Sie aus den Angaben das Polynom $f(x)$.
2. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,6x^2 - 0,9x + 1$$

Die Längeneinheit *Meter* wurde zur Vereinfachung weggelassen.

- Wie nah kommt die Bahn dem Erdboden?
 - Wo befindet sich im ansteigen Bereich des Kurvenstückes die **steilste** Stelle? Welche Steigung hat die Kurve dort?
3. Als Unterbau für das Kurvenstück soll eine 40 cm-starke Betonwand gegossen werden. Wieviele Kubikmeter Beton sind erforderlich, wenn die Fundamente nicht mit eingerechnet werden?

Lösung:

Aufstellen der Funktionsgleichung Allgemeiner Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad (1)$$

Am linken Rand und am rechten Rand des Kurvenstückes ist jeweils der Funktionswert und die Steigung bekannt.

$$(1) \quad f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + d = 1 \quad (4)$$

$$(2) \quad f'(0) = -0,9 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = -0,9 \quad (4)$$

$$(3) \quad f(3) = 1 \quad \Rightarrow \quad 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = 1 \quad (4)$$

$$(4) \quad f'(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 27 \cdot a + 6 \cdot b + c = 0 \quad (4)$$

Die ersten beiden Gleichungen führen sofort zu den Ergebnissen:

$$d = 1 \quad \text{und} \quad c = -0,9 \quad (2)$$

Die Werte werden in Gleichung (3) und (4) eingesetzt.

$$(3) \quad 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot (-0,9) + 1 = 1$$

$$(4) \quad 27 \cdot a + 6 \cdot b - 0,9 = 0$$

$$(3) \quad \quad \quad 27a + 9b = 2,7 \quad |$$

$$(4) \quad \quad \quad 27a + 6b = 0,9 \quad | \quad -$$

$$(3) - (4) \quad \quad \quad 3b = 1,8 \quad | \quad : 3$$

$$b = 0,6 \quad (6)$$

Ergebnis in Gleichung (4) einsetzen:

$$27a + 6 \cdot b - 0,9 = 0$$

$$27a + 3,6 - 0,9 = 0$$

$$27a + 2,7 = 0 \quad | - 2,7$$

$$27a = -2,7 \quad | : 27$$

$$a = -0,1 \quad (3)$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -0,1x^3 + 0,6x^2 - 0,9x + 1$ (1)

Tiefpunkt:

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,6x^2 - 0,9x + 1$$

$$f'(x) = -0,3x^2 + 1,2x - 0,9 \quad (2)$$

$$f''(x) = -0,6x + 1,2 \quad (2)$$

$$f'''(x) = -0,6 \quad (2)$$

Notwendige Bedingung für einen Tiefpunkt ist das Nullwerden der 1. Ableitung.

$$\begin{aligned}
 f'(x_E) &= 0 & (2) \\
 -0,3x_E^2 + 1,2x_E - 0,9 &= 0 & | : (-0,3) \\
 x_E^2 - 4x_E + 3 &= 0 \\
 x_{E1/2} &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\
 x_{E1/2} &= 2 \pm 1 \\
 x_{E1} = 1 & \quad x_{E2} = 3 & (6)
 \end{aligned}$$

Der Wert $x_{E2} = 3$ entfällt, da er am Rand des Bogenstücks liegt. Bleibt noch $x_{E1} = 1$ zu untersuchen. (1)

$$f''(1) = -0,6 \cdot 1 + 1,2 = 0,6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = 1 \quad (2)$$

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = -0,1 \cdot 1^3 + 0,6 \cdot 1^2 - 0,9 \cdot 1 + 1 = 0,6 \quad (2)$$

Tiefpunkt bei: $T(1|0,6)$

Der tiefste Punkt liegt 60 cm über dem Erdboden. (1)

Steilste Stelle: Wir suchen ein Maximum der Steigung, also muss die Ableitung der Ableitung (die 2. Ableitung) Null sein. Dies ist auch das Kriterium für einen Wendepunkt.

$$\begin{aligned}
 f''(x_W) &= 0 & (3) \\
 -0,6x_W + 1,2 &= 0 & | -1,2 \\
 -0,6x_W &= -1,2 & | : (-0,6) \\
 x_W &= 2 & (3)
 \end{aligned}$$

$$f'''(2) = -0,6 < 0 \Rightarrow \text{Maximum für } f'(x) \quad (2)$$

$$f'(2) = -0,3 \cdot 2^2 + 1,2 \cdot 2 - 0,9 = 0,3 \quad (1)$$

Die Steigung an der steilsten Stelle beträgt: $m = 0,3$ (1)

Unterbau: Zunächst wird die Fläche A unter dem Kurvenstück bestimmt.

$$A = \int_0^3 f(x) dx \quad (1)$$

$$= \int_0^3 -0,1x^3 + 0,6x^2 - 0,9x + 1 dx \quad (3)$$

$$= [-0,025x^4 + 0,2x^3 - 0,45x^2 + x]_0^3 \quad (4)$$

$$= (-0,025 \cdot 3^4 + 0,2 \cdot 3^3 - 0,45 \cdot 3^2 + 3) - (-0,025 \cdot 0^4 + 0,2 \cdot 0^3 - 0,45 \cdot 0^2 + 0) \quad (3)$$

$$= 2,325 - 0 \quad (3)$$

$$A = 2,325 \text{ m}^2 \quad (1)$$

Volumenbestimmung:

$$\begin{aligned} V &= A \cdot d \\ &= 2,325 \text{ m}^2 \cdot 0,4 \text{ m} \\ V &= 0,93 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Das Volumen beträgt: $0,93 \text{ m}^3$ (5)