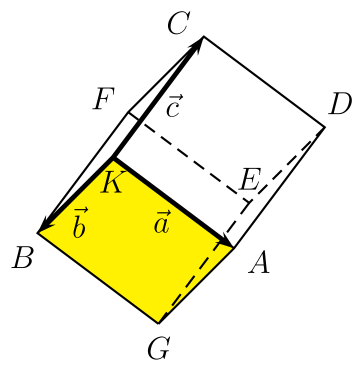
Aufgabe 41

Auf einem Bildschirm soll als Hintergrundbild das Bild eines mehrfarbigen Würfels dargestellt werden. Im $\mathbb{R}^3$ stellen die Punkte

$$K(50|50|60)\ ,\ A(90|20|60) \text{ und } B(50|50|10)$$

drei Eckpunkte dieses Würfels dar. In der nebenstehenden Grafik ist nur eine Fläche farbig dargestellt.



1. Prüfen Sie, ob die Kantenvektoren $\vec{a}$ (Verlauf von K nach A) und $\vec{b}$ (Verlauf von K nach B) tatsächlich gleich lang sind und einen rechten Winkel bilden!

2. Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der sich als dritter Kantenvektor eignet. Das bedeutet, er muss sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht stehen und die gleiche Länge wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben.

3. Wieviele Pixel enthält die hier gelb markierte Würfelfläche, die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird **auf dem zweidimensionalen Bildschirm**? Hierzu sind folgende Informationen erforderlich:

- Eine Einheit im Vektorraum ist eine Pixelbreite.
- Ein **dreidimensionaler** Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ wird auf dem **zweidimensionalen** Bildschirm dargestellt durch die Transformation: $\vec{v}^* = \begin{pmatrix} x + 0{,}5z \\ y + 0{,}5z \end{pmatrix}$.

Lösung:

zu 1:

Zunächst müssen die Kantenvektoren aus den Vektoren zu den Eckpunkten bestimmt werden.

$$\vec{a} = \vec{A} - \vec{K} = \begin{pmatrix} 90 \\ 20 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{B} - \vec{K} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Gleiche Länge bedeutet gleiche Beträge. Zur Prüfung werden die Beträge berechnet.

$$|\vec{a}| = \sqrt{40^2 + (-30)^2 + 0^2} = 50$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 50^2} = 50$$

Ergebnis: Die Beträge sind gleich, also sind die Kanten gleich lang.

Wenn die Vektoren zueinander orthogonal stehen, muss das Skalarprodukt Null ergeben.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 40 \cdot 0 + (-30) \cdot 0 + 0 \cdot (-5) = 0$$

Ergebnis: Das Skalarprodukt ist Null, also bilden die Kanten wie gefordert einen Rechten Winkel.

Zu 2:

Zur Lösung gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Lösungsmöglichkeiten.

1. Man berechnet über das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zunächst einen Vektor, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht. Dieser Vektor muss anschließend noch auf die richtige Länge gebracht werden.

2. Über die drei Bedingungen $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$ und $|\vec{c}| = |\vec{a}|$ können drei Gleichungen zur Berechnung der Komponenten des gesuchten Vektors $\vec{c}$ aufgestellt werden.

Beide Varianten werden nun vorgestellt.

Lösungsvariante 1:

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \cdot (-50) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 40 \cdot (-50) \\ 40 \cdot 0 - (-30) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,500 \\ 2\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Von diesem Vektor wird die Länge (der Betrag) bestimmt:

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{1\,500^2 + 2\,000^2 + 0^2} = 2\,500$$

Dieser Vektor $\vec{d}$ muss um den Faktor

$$\lambda = \frac{|\vec{a}|}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{50}{2\,500} = \frac{1}{50}$$

gekürzt werden. Damit erhält man den gesuchten Vektor $\vec{c}$.

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d} = \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 1\,500 \\ 2\,000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Auch der Gegenvektor zu $\vec{c}$ mit

$$\vec{c}_2 = -\vec{c} = \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Lösungsmöglichkeit.

Lösungsvariante 2: Ansatz mit dem allgemeinen Vektor $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 & \Rightarrow & 40 \cdot x - 30 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \\
(2) & \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 & \Rightarrow & 0 \cdot x + 0 \cdot y - 50 \cdot z = 0 \\
(3) & |\vec{c}| = 50 & \Rightarrow & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 50
\end{array}$$

Aus (2) ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned}
-50z &= 0 \quad |:(-50) \\
z &= 0
\end{aligned}$$

Setzt man das Ergebnis in (1) und (3) ein und formt um, erhält man dieses Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{lrcl}
(1) & 40x - 30y & = & 0 \\
(3) & x^2 + y^2 & = & 2\,500
\end{array}}$$

Da das Gleichungssystem nicht linear ist, muss das Einsetzungsverfahren verwendet werden. (1) kann beispielsweise nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned}
40x - 30y &= 0 \quad |+30y \\
40x &= 30y \quad |:40 \\
x &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Einsetzen in (3):

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 2\,500 \\
\left(\frac{3}{4}\cdot y\right)^2 + y^2 &= 2\,500 \\
\frac{9}{16}\cdot y^2 + y^2 &= 2\,500 \\
\frac{25}{16}\cdot y^2 &= 2\,500 \qquad \left|\cdot \frac{16}{25}\right. \\
y^2 &= 1\,600 \qquad |\sqrt{} \\
y &= \pm 40 \\
y_1 = 40 \qquad & y_2 = -40
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse werden in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$x_1 = \frac{3}{4}\cdot y_1 = \frac{3}{4}\cdot 40 = 30$$

$$x_2 = \frac{3}{4}\cdot y_2 = \frac{3}{4}\cdot(-40) = -30$$

Es gibt also zwei Lösungen:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da nur **ein** Vektor gesucht ist, kann man ihn sich aussuchen. Vermutlich wählen die Schüler den Vektor ohne Minuszeichen, also

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu 3:

Es genügt, wenn nur für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Transformation in den $\mathbb{R}^2$ auf $\vec{a}^*$ und $\vec{b}^*$ durchgeführt wird. Die Fläche kann dann sinngemäß über das Vektorprodukt $\vec{a}^* \times \vec{b}^*$ bestimmt werden. Hierbei ist zu beachten, dass das Vektorprodukt $\vec{a}^* \times \vec{b}^*$ eigentlich nicht existiert, da es nur im $\mathbb{R}^3$ definiert ist. Es muss also zuvor noch je eine dritte Komponente mit dem Wert Null ergänzt werden. Die in den $\mathbb{R}^3$ ergänzten Vektoren heißen dann $\vec{a}^{**}$ und $\vec{b}^{**}$.

$$\vec{a}^* = \begin{pmatrix} 40 + 0{,}5\cdot 0 \\ -30 + 0{,}5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^* = \begin{pmatrix} 0 + 0{,}5\cdot(-50) \\ 0 + 0{,}5\cdot(-50) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Die ergänzten Vektoren können gebildet werden.

$$\vec{a}^{**} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^{**} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt kann gebildet werden.

$$\vec{a}^{**} \times \vec{a}^{**} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \cdot 0 - 0 \cdot (-25) \\ 0 \cdot (-25) - 40 \cdot 0 \\ 40 \cdot (-25) - (-30) \cdot (-25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1\,750 \end{pmatrix}$$

Der Betrag dieses Vektors stellt die gelbe Fläche dar.

$$A = |\vec{a}^{**} \times \vec{a}^{**}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1\,750)^2} = 1\,750$$

Ergebnis: Die gesuchte Fläche beinhaltet 1 750 Pixel.