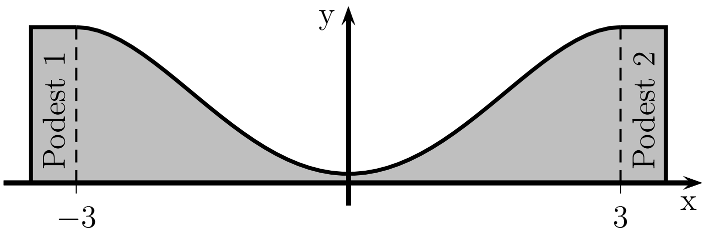
Aufgabe 40

Eine Skaterbahn, die neu erstellt werden soll, stellt im Querschnitt ein spiegelsymmetrisches Polynom 4. Grades dar. In der Mitte verläuft die Bahn 10 cm über dem Erdboden, an beiden Rändern (jeweils 3 m von der Mitte entfernt) mündet sie ohne Knick in einer Höhe von 1,72 m in ein waagerechtes Podest von je 50 cm Breite ein. Auf diesen Podesten kann der Skater starten oder pausieren.



1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ für den Kurvenverlauf zwischen den beiden Podesten!
2. Aus Sicherheitsgründen darf eine Skaterbahn an der steilsten Stelle nicht steiler als mit 40° verlaufen. Ist das bei dieser geplanten Bahn gewährleistet? (Gehen Sie bei der Berechnung von der Funktion $f(x) = -0{,}02x^4 + 0{,}36x^2 + 0{,}1$ aus.)
3. Für den Bau der Bahn aus GFK-Material werden für die seitliche Begrenzung zwei Seitenwände benötigt. Eine Seitenwand entspricht der in der Skizze grau dargestellten Fläche. Berechnen Sie die Fläche für jede dieser Seitenwände!

Lösung:

Für die gesamte Lösung wird die Einheit *Meter* verwendet. Während der Rechnung wird sie weggelassen.

Teil 1:

Die allgemeine Form für eine Funktionsgleichung für ein spiegelsymmetrisches Polynom 4. Grades und seine Ableitung lauten:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + cx^2 + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 2cx \end{aligned}$$

Aus der Aufgabenstellung ergeben sich drei Bedingungen, die in Gleichungen umgesetzt werden können.

$$\begin{array}{llcllrcllcl} (1) & f(0) & = & 0{,}1 & \Rightarrow & a\cdot 0^4 + c\cdot 0^2 + e & = & 0{,}1 & \Rightarrow & e = 0{,}1 \\ (2) & f(3) & = & 1{,}72 & \Rightarrow & a\cdot 3^4 + c\cdot 3^2 + e & = & 1{,}72 & & \\ (3) & f'(3) & = & 0 & \Rightarrow & 4\cdot a\cdot 3^3 + 2\cdot c\cdot 3 & = & 0 & & \end{array}$$

Setzt man das Ergebnis aus (1) in (2) ein und fasst die Gleichungen zusammen, erhält man dieses Lineargleichungssystem.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl} (2) & 81a & +9c & = & 1{,}62 \\ (3) & 108a & +6c & = & 0 \end{array}}$$

Das Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden, beispielsweise mit dem Einsetzungsverfahren. Dazu wird Gleichung (3) nach c aufgelöst und in (2) eingesetzt.

$$\begin{aligned} 108a + 6c &= 0 & &|-108a \\ 6c &= -108a & &|:6 \\ c &= -18a \end{aligned}$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{aligned} 81a + 9c &= 1{,}62 \\ 81a + 9\cdot(-18a) &= 1{,}62 \\ 81a - 162a &= 1{,}62 \\ -81a &= 1{,}62 & &|:(-81) \\ a &= -0{,}02 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (3) eingesetzt.

$$c = -18a = -18\cdot(-0{,}02) = 0{,}36$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = -0{,}02x^4 + 0{,}36x^2 + 0{,}1}$

Teil 2:

Die steilsten Stellen liegen in den Wendepunkten. Diese erhält man als Nullstellen der 2. Ableitung.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -0{,}02x^4 + 0{,}36x^2 + 0{,}1 \\
f'(x) &= -0{,}08x^3 + 0{,}72x \\
f''(x) &= -0{,}24x^2 + 0{,}72 \\
f'''(x) &= -0{,}48x \\
0 &= -0{,}24x_w^2 + 0{,}72 && \mid +0{,}24x_w^2 \\
0{,}24x_w^2 &= 0{,}72 && \mid :0{,}24 \\
x_w^2 &= 3 && \mid\sqrt{\ } \\
x_{w1/2} &= \pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Mit der dritten Ableitung kann geprüft werden, ob tatsächlich Wendestellen vorliegen.

$$\begin{aligned}
f'''(+\sqrt{3}) &= -0{,}48 \cdot \sqrt{3} \approx -0{,}831 \neq 0 && \Rightarrow \text{ Wendestelle bei } x_{w1} = \sqrt{3} \\
f'''(-\sqrt{3}) &= -0{,}48 \cdot \left(-\sqrt{3}\right) \approx 0{,}831 \neq 0 && \Rightarrow \text{ Wendestelle bei } x_{w2} = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Alternativ zur zweiten Prüfung mit x_{w2} kann auch mit Symmetrie argumentiert werden.

Zur Bestimmung des Steigungswinkels muss zunächst die Steigung an den Wendestellen bestimmt werden.

$$f'(x_{w1}) = -0{,}08x_{w1}^3 + 0{,}72x_{w1} = -0{,}08 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 + 0{,}72 \cdot \sqrt{3} = 0{,}48 \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}831\,384$$

$$\begin{aligned}
\tan\varphi_1 &= f'(x_{w1}) \\
&= 0{,}48 \cdot \sqrt{3} \\
\varphi_1 &= \arctan 0{,}48 \cdot \sqrt{3} \\
\varphi_1 &\approx 39{,}74^\circ
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist der Winkel φ_2 bei x_{w2} genau so groß, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen.

Da die Winkel kleiner als 40° sind, ist die Sicherheit gewährleistet.

Teil 3:

Die gesuchte Fläche A setzt sich zusammen aus der Fläche A_K unter der Kurve und den beiden Rechteckflächen A_P unter den Podesten.

Die Fläche A_K unter der Kurve kann als Integral zwischen den Grenzen -3 und 3 oder (wegen der Symmetrie) auch als zwei mal das Integral zwischen den Grenzen 0 und 3 bestimmt werden. Letzteres ist bequemer zu rechnen.

$$
\begin{aligned}
A_K &= 2 \cdot \int\limits_0^3 f(x)\ dx \\
&= 2 \cdot \int\limits_0^3 -0{,}02x^4 + 0{,}36x^2 + 0{,}1\ dx \\
&= 2 \cdot \left[-0{,}004x^5 + 0{,}12x^3 + 0{,}1x\right]_0^3 \\
&= 2 \cdot \Big((-0{,}004 \cdot 3^5 + 0{,}12 \cdot 3^3 + 0{,}1 \cdot 3) - (-0{,}004 \cdot 0^5 + 0{,}12 \cdot 0^3 + 0{,}1 \cdot 0) \Big) \\
&= 2 \cdot (2{,}568 - 0) \\
A_K &= 5{,}136
\end{aligned}
$$

Die Fläche unter der Kurve beträgt: $\boxed{A_K = 5{,}136\,\mathrm{m}^2}$

Die Rechteckfläche unter einem Podest ergibt sich aus Breite und Höhe.

$$A_P = 0{,}5 \cdot 1{,}72 = 0{,}86$$

Die Fläche unter einem Podest beträgt: $\boxed{A_P = 0{,}86\,\mathrm{m}^2}$

Hiermit kann nun die gesuchte Gesamtfläche berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
A &= A_K + 2 \cdot A_P \\
&= 5{,}136\,\mathrm{m}^2 + 2 \cdot 0{,}86\,\mathrm{m}^2 \\
A &= 6{,}856\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Die gesamte Wandfläche beträgt: $\boxed{A = 6{,}856\,\mathrm{m}^2}$