Aufgabe 4

Gegeben sind folgende drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen, also $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$.

b) Nun soll x so verändert werden, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **komplanar** werden. Gehen Sie dabei von $y = 6$ und $z = 0$ aus.

c) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{b}$!

d) Berechnen Sie den Winkel φ, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aus Aufgabenteil **b)** miteinander bilden!

Lösung:

a) Aus den drei Bedingungen für das Aufeinander-senkrecht-Stehen von jeweils zwei Vektoren können drei Gleichungen gebildet werden.

$$\begin{array}{lclcclrrrcl}
\vec{a}\perp\vec{b} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{b} & = & 0 & \Rightarrow & x\cdot(-2) & +(-3)\cdot y & +20\cdot 1 & = & 0\\
\vec{a}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{c} & = & 0 & \Rightarrow & x\cdot 3 & +(-3)\cdot 1 & +20\cdot z & = & 0\\
\vec{b}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{b}\cdot\vec{c} & = & 0 & \Rightarrow & -2\cdot 3 & +y\cdot 1 & +1\cdot z & = & 0
\end{array}$$

Die drei Gleichungen werden in die Normalform gebracht. Man erhält ein Lineargleichungssystem, das mit jedem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden kann.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & -2x & -3y & & = & -20\\
(2) & 3x & & +20z & = & 3\\
(3) & & y & +z & = & 6
\end{array}}$$

Lösungsvariante 1: Einsetzungsverfahren

Gleichung (3) wird nach y umgestellt, das Ergebnis wird in beide anderen Gleichungen eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
y+z & = & 6 & \quad |-z\\
y & = & 6-z &
\end{array}$$

Einsetzen in (1) und (2):

$$\begin{array}{lrcll}
\text{In (1)} & -2x-3\cdot(6-z) & = & -20 & \\
\text{In (2)} & 3x+20z & = & 3 & \\
\hline
 & -2x-18+3z & = & -20 & |+18\\
 & 3x+20z & = & 3 & \\
\hline
 & -2x+3z & = & -2 & \\
 & 3x+20z & = & 3 &
\end{array}$$

Für den nächsten Reduktionsschritt kommen wieder mehrere Lösungsverfahren in Frage. Eine sinnvolle Methode ist das Additionsverfahren.

$$\begin{array}{rrcll}
-2x & +3z & = & -2 & |\cdot 3\\
3x & +20z & = & 3 & |\cdot 2\\
\hline
-6x & +9z & = & -6 & |\\
6x & +40z & = & 6 & |+\\
\hline
 & 49z & = & 0 & |:49\\
 & z & = & 0 &
\end{array}$$

Einsetzen in die umgestellte Gleichung (3):

$$y = 6 - z = 6 - 0 = 6$$

Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (2):

$$\begin{array}{rcll}
3x+20z & = & 3 & \\
3x+20\cdot 0 & = & 3 & \\
3x & = & 3 & |:3\\
x & = & 1 &
\end{array}$$

Zusammengefasst: $\boxed{x=1 \qquad y=6 \qquad z=0}$

Lösungsvariante 2: Cramersche Regel

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} -20 & -3 & 0 & -20 & -3 \\ 3 & 0 & 20 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -3 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 20 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right.} \\
&= \frac{-360+400+9}{40+9} \\
&= \frac{49}{49} \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -20 & 0 & -2 & -20 \\ 3 & 3 & 20 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right.}{49} \\
&= \frac{-6+240+60}{49} \\
&= \frac{294}{49} \\
y &= 6
\end{aligned}
$$

Der Parameter z kann durch Einsetzen dieser Ergebnisse in Gleichung (2) bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
3x + 20z &= 3 \\
3x + 20 \cdot 0 &= 3 \\
3x &= 3 \quad | :3 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst: $\boxed{x = 1 \qquad y = 6 \qquad z = 0}$

b) Zur Überprüfung der Komplanarität gibt es zwei unterschiedliche Ansätze, die zu zwei völlig unterschiedlichen Lösungsansätzen führen.

Lösungsvariante 1:

Die erste Variante geht von der Definition der Komplanarität aus:

$$
\begin{aligned}
\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} &= \vec{c} \\
\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Hierzu kann man die Komponentengleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{crrcl}
(1) & \lambda \cdot x & +\mu \cdot (-2) & = & 3 \\
(2) & \lambda \cdot (-3) & +\mu \cdot 6 & = & 1 \\
(3) & \lambda \cdot 20 & +\mu \cdot 1 & = & 0 \\
\hline
(1) & \lambda \cdot x & -2\mu & = & 3 \\
(2) & -3\lambda & +6\mu & = & 1 \\
(3) & 20\lambda & +\mu & = & 0
\end{array}$$

Gleichung (3) wird nach μ umgestellt:

$$\begin{aligned}
20\lambda + \mu &= 0 \qquad && | - 20\lambda \\
\mu &= -20\lambda
\end{aligned}$$

Term für μ in die anderen Gleichungen einsetzen:

$$\begin{array}{rlrcl}
\text{In } (1) & \lambda \cdot x & -2 \cdot (-20\lambda) & = & 3 \\
\text{In } (2) & -3\lambda & +6 \cdot (-20\lambda) & = & 1 \\
\hline
(1a) & \lambda \cdot x & +40\lambda & = & 3 \\
(2a) & -3\lambda & -120\lambda & = & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Aus Gleichung (2a) kann λ berechnet werden.

$$\begin{aligned}
-3\lambda - 120\lambda &= 1 \\
-123\lambda &= 1 \qquad && | : (-123) \\
\lambda &= -\frac{1}{123}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1a) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot x + 40\lambda &= 3 \\
-\frac{1}{123} \cdot x + 40 \cdot \left(-\frac{1}{123}\right) &= 3 \\
-\frac{x}{123} - \frac{40}{123} &= 3 \qquad && | \cdot 123 \\
-x - 40 &= 369 && | + 40 \\
-x &= 409 && | : (-1) \\
x &= -409
\end{aligned}$$

Lösungsvariante 2:
In dieser Lösungsvariante nutzt man den Lehrsatz aus:

$$\vec{a},\ \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ komplanar} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$$

Diese Determinante wird aufgestellt und gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) &= 0 \\
\begin{vmatrix} x & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \\ 20 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \\
\left|\begin{array}{ccc|cc} x & -2 & 3 & x & -2 \\ -3 & 6 & 1 & -3 & 6 \\ 20 & 1 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right. &= 0 \\
-40 - 9 - 360 - x &= 0 \\
-409 &= x \\
x &= -409
\end{aligned}$$

Aus beiden Lösungsvarianten ergibt sich: $\boxed{x = -409}$

c) Die Länge eines Vektors ist sein Betrag.

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{41} \approx 6,403$$

Die Länge von $\vec{b}$ beträgt etwa: $\boxed{6{,}403 \text{ Längeneinheiten}}$

d) Der Winkel kann mit Hilfe der nachfolgenden Grundformel berechnet werden:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos \angle \vec{a}\vec{b}$$

Mit den vorgegebenen Daten heißt das:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{c} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi \\
\cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} \\
\varphi &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} \\
&= \arccos \frac{a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\
&= \arccos \frac{-409 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 + 20 \cdot 0}{\sqrt{(-409)^2 + (-3)^2 + 20^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2}} \\
&= \arccos \frac{-1\,227 - 3}{\sqrt{167\,690} \cdot \sqrt{10}} \\
&= \arccos \frac{-1\,230}{\sqrt{1\,676\,900}} \\
&\approx \arccos(-0,9498) \\
\varphi &\approx 161,78°
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$ beträgt: $\boxed{\varphi \approx 161,78°}$