Aufgabe 37

Am Strand von Kellenhusen an der Ostsee steht eine Skulptur aus Beton, die einen stilisierten Fisch darstellt. Sie besteht aus drei Teilstücken, die jeweils durch eine senkrechte Fuge voneinander abgetrennt sind. Der linke Teil stellt den Schwanz, der mittlere den Bauch und der rechte den Kopf des Fisches dar. Alle Teile bestehen aus Betonplatten mit einer Plattenstärke von 30 cm. Sie ragen 80 cm tief in das Erdreich hinein, damit sie nicht umfallen können. Das Schwanzteil hat eine Länge von 4 m, das Bauchteil von 8,6 m.

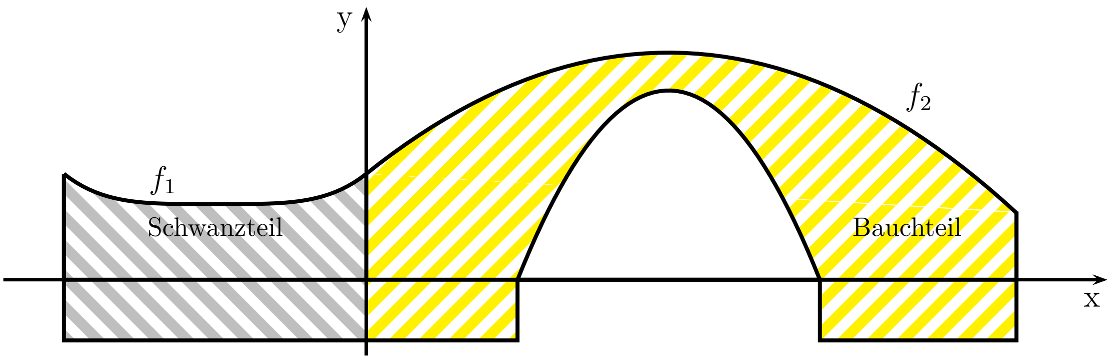
Abbildung 1: *Fischskulptur von Kellenhusen*

Legt man auf die Frontfläche der Skulptur ein Koordinatensystem so, dass die x-Achse auf dem Boden und die y-Achse auf der Trennfuge zwischen Schwanz und Bauch liegt, dann wird die Oberkante des Bauches durch diese Funktion dargestellt:

$$f_2(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}8x + 1{,}4$$

Hierbei ist 1 Meter die verwendete Einheit. Von der Funktion $f_1(x)$, die die Oberkante des Schwanzes darstellt, ist folgendes bekannt:

- Die Funktion stellt ein Polynom 4. Grades dar.
- Der Übergang von Schwanz auf Bauch erfolgt stufenlos und ohne Knick.
- Der tiefste Punkt der Oberkante des Schwanzes liegt 1 m über dem Erdboden 2 m von der Trennfuge entfernt.
- Die Schwanzspitze ist 4 m von der Trennfuge entfernt und liegt in einer Höhe von 1,4 m über dem Erdboden.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der „Schwanzfunktion“ $f_1(x)$!

b) Wie hoch ist die höchste Stelle des Bauches über dem Erdboden?

c) Welche Masse hat das Schwanzteil? Die Dichte des verwendeten Betons beträgt $\rho = 2\,400\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Nicht berücksichtigt werden soll die quer eingebaute Schwanzflosse, die auf dem Foto erkennbar ist. Gehen Sie dabei von dieser Funktionsgleichung aus: $f_1(x) = 0{,}025x^4 + 0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}8x + 1{,}4$

d) Konnten Schwanz- und Bauchteil auf einem Tieflader **ohne Sondergenehmigung** transportiert werden? Für die Ladung gelten folgende Maximalwerte:
Höhe: 3,5 m, Breite: 2,55 m, Länge: 15,65 m, Masse (Gewicht): 32 t
Begründen Sie Ihre Bewertung für Schwanz- und Bauchteil einzeln!

Lösung:

Lösung zu a)
Die Normalform und die erforderliche erste Ableitung für $f_1(x)$ lautet:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f_1'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \end{aligned}$$

Die weiteren Bedingungen aus der Aufgabenstellung können nun Schritt für Schritt in Gleichungen umgesetzt werden.

Zunächst wird die Höhe und die Steigung an der Trennfuge benötigt. Diese Werte liefert f_2. Beide müssen gleich sein, damit es weder eine Stufe noch einen Knick gibt.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -0{,}1x^2 + 0{,}8x + 1{,}4 \\ f_2'(x) &= -0{,}2x + 0{,}8 \end{aligned}$$

$$f_2(0) = -0{,}1 \cdot 0^2 + 0{,}8 \cdot 0 + 1{,}4 = 1{,}4$$

$$f_2'(0) = -0{,}2 \cdot 0 + 0{,}8 = 0{,}8$$

$$\begin{array}{lllllrcllll} (1) & f_1(0) & = & f_2(0) & \Rightarrow & a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e & = & 1{,}4 & \Rightarrow & e & = & 1{,}4 \\ (2) & f_1'(0) & = & f_2'(0) & \Rightarrow & 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d & = & 0{,}8 & \Rightarrow & d & = & 0{,}8 \end{array}$$

Aus dem Tiefpunkt am Schwanzteil ergeben sich zwei weitere Bedingungen.

$$\begin{array}{lllllrcl} (3) & f_1(-2) & = & 1 & \Rightarrow & a \cdot (-2)^4 + b \cdot (-2)^3 + c \cdot (-2)^2 + d \cdot (-2) + e & = & 1 \\ (4) & f_1'(-2) & = & 0 & \Rightarrow & 4a \cdot (-2)^3 + 3b \cdot (-2)^2 + 2c \cdot (-2) + d & = & 0 \end{array}$$

Die letzte Bedingung ergibt sich aus der Lage der Schwanzspitze.

$$\begin{array}{lllllrcl} (5) & f_1(-4) & = & 1{,}4 & \Rightarrow & a \cdot (-4)^4 + b \cdot (-4)^3 + c \cdot (-4)^2 + d \cdot (-4) + e & = & 1 \end{array}$$

Wir haben damit ein Lineargleichungssystem 5. Ordnung erhalten. Da sich die Parameter d und e sofort aus den ersten beiden Gleichungen ergeben haben, bleibt letztlich nur ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung übrig, wenn diese Werte eingesetzt werden.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrrcl} (3) & 16a & -8b & +4c & -2 \cdot 0{,}8 & +1{,}4 & = & 1 \\ (4) & -32a & +12b & -4c & +0{,}8 & & = & 0 \\ (5) & 256a & -64b & +16c & -4 \cdot 0{,}8 & +1{,}4 & = & 1{,}4 \end{array}}$$

Bringt man alle einfachen Zahlen auf die rechte Seite, dann erhält man die Normalform des Gleichungssystems.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (3) & 16a & -8b & +4c & = & 1{,}2 \\ (4) & -32a & +12b & -4c & = & -0{,}8 \\ (5) & 256a & -64b & +16c & = & 3{,}2 \end{array}}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann mit jedem beliebigen Verfahren gelöst werden. Als Beispiel wird hier die Cramersche Regel zur Lösung verwendet.

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\begin{vmatrix} 1{,}2 & -8 & 4 \\ -0{,}8 & 12 & -4 \\ 3{,}2 & -64 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -32 & 12 & -4 \\ 256 & -64 & 16 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{230{,}4 + 102{,}4 + 204{,}8 - 153{,}6 - 307{,}2 - 102{,}4}{3\,072 + 8\,192 + 8\,192 - 12\,288 - 4\,096 - 4\,096} \\
&= \frac{-\,25{,}6}{-1\,024} \\
a &= 0{,}025
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\begin{vmatrix} 16 & 1{,}2 & 4 \\ -32 & -0{,}8 & -4 \\ 256 & 3{,}2 & 16 \end{vmatrix}}{-1\,024} \\
&= \frac{-\,204{,}8 - 1\,228{,}8 - 409{,}6 + 819{,}2 + 204{,}8 + 614{,}4}{-1\,024} \\
&= \frac{-\,204{,}8}{-1\,024} \\
b &= 0{,}2
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Parameters c empfiehlt es sich, die Ergebnisse für a und b z. B. in Gleichung (3) einzusetzen.

$$\begin{aligned}
16a - 8b + 4c &= 1{,}2 \\
16 \cdot 0{,}025 - 8 \cdot 0{,}2 + 4c &= 1{,}2 \\
0{,}4 - 1{,}6 + 4c &= 1{,}2 \\
-1{,}2 + 4c &= 1{,}2 \quad | + 1{,}2 \\
4c &= 2{,}4 \quad | : 4 \\
c &= 0{,}6
\end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f_1(x) = 0{,}025x^4 + 0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}8x + 1{,}4}$

Lösung zu b)

Zur Hochpunktbestimmung wird die erste und zweite Ableitung von $f_2(x)$ benötigt.

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= -0{,}1x^2 + 0{,}8x + 1{,}4 \\
f_2'(x) &= -0{,}2x + 0{,}8 \\
f_2''(x) &= -0{,}2
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für einen Hochpunkt ist das Null-Werden der ersten Ableitung.

$$\begin{array}{rcll} f_2'(x_E) & = & 0 & \\ -0{,}2x_E + 0{,}8 & = & 0 & \mid -0{,}8 \\ -0{,}2x_E & = & -0{,}8 & \mid :(-0{,}2) \\ x_E & = & 4 & \end{array}$$

Da die zweite Ableitung konstant negativ ist, muss es sich hier um einen **Hochpunkt** handeln. Der zugehörige y-Wert muss noch bestimmt werden.

$$y_E = f_2(x_E) = -0{,}1x_E^2 + 0{,}8x_E + 1{,}4 = -0{,}1 \cdot 4^2 + 0{,}8 \cdot 4 + 1{,}4 = 3$$

Die höchste Stelle des Bauches liegt 3 Meter über dem Erdboden.

Lösung zu c)
Zunächst wird die Fläche A_1 des Schwanzteiles **oberhalb des Erdbodens** bestimmt. Dies kann mit einem bestimmten Integral gemacht werden.

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \displaystyle\int\limits_{-4}^{0} f_1(x)\ dx \\ & = & \displaystyle\int\limits_{-4}^{0} 0{,}025x^4 + 0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}8x + 1{,}4\ dx \\ & = & \left[0{,}005x^5 + 0{,}05x^4 + 0{,}2x^3 + 0{,}4x^2 + 1{,}4x\right]_{-4}^{0} \\ & = & \left(0{,}005 \cdot 0^5 + 0{,}05 \cdot 0^4 + 0{,}2 \cdot 0^3 + 0{,}4 \cdot 0^2 + 1{,}4 \cdot 0\right) \ldots \\ & & \ldots - \left(0{,}005 \cdot (-4)^5 + 0{,}05 \cdot (-4)^4 + 0{,}2 \cdot (-4)^3 + 0{,}4 \cdot (-4)^2 + 1{,}4 \cdot (-4)\right) \\ & = & 0 - (-4{,}32) \\ A_1 & = & 4{,}32 \end{array}$$

Die Fläche oberhalb des Erdbodens beträgt $A_1 = 18{,}4\,\mathrm{m}^2$. Unter dem Erdboden liegt noch eine Rechteckfläche A_2.

$$A_2 = 4\,\mathrm{m} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} = 3{,}2\,\mathrm{m}^2$$

Die Gesamtfläche des Schwanzteiles beträgt damit:

$$A = A_1 + A_2 = 3{,}2\,\mathrm{m}^2 + 4{,}32\,\mathrm{m}^2 = 7{,}52\,\mathrm{m}^2$$

Hiermit kann das Volumen berechnet werden. Das Betonteil ist überall 30 cm dick.

$$V = A \cdot d = 7{,}52\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}3\,\mathrm{m} = 2{,}256\,\mathrm{m}^3$$

Nun kann die Masse des Schwanzteiles berechnet werden.

$$m = \rho \cdot V = 2\,400\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 2{,}256\,\mathrm{m}^2 = 5\,414{,}4\,\mathrm{kg}$$

Ergebnis: $\boxed{m = 5\,414{,}4\,\mathrm{kg} = 5{,}414\,4\,\mathrm{t}}$

Lösung zu d)
Das Schwanzteil lässt sich sich problemlos transportieren. Seine maximale Höhe einschließlich Fundamentstreifen beträgt nur $1{,}4\,\mathrm{m} + 0{,}8\,\mathrm{m} = 2{,}2\,\mathrm{m}$. Es kann sogar flach auf den Tieflader gelegt werden, die zulässige Breite von $2{,}55\,\mathrm{m}$ wird nicht erreicht. Die Länge mit $4\,\mathrm{m}$ ist völlig unkritisch und mit weniger als 6 Tonnen ist es auch nicht zu schwer.

Das Bauchteil hat eine maximale Höhe von $3\,\mathrm{m} + 80\,\mathrm{cm} = 3{,}8\,\mathrm{m}$. Damit ist es unzulässig hoch. Die Länge mit $8{,}6\,\mathrm{m}$ dagegen wäre unkritisch. Andere Maße sind nicht bekannt, können also nicht geprüft werden.

Anmerkung: Es könnte sein, dass jemand auf die Idee kommt, das Bauchteil auf dem Tieflader schräg aufzubauen, damit es diagonal ins Transportprofil passt. Das ist möglich, wird aber nicht als Lösung verlangt.