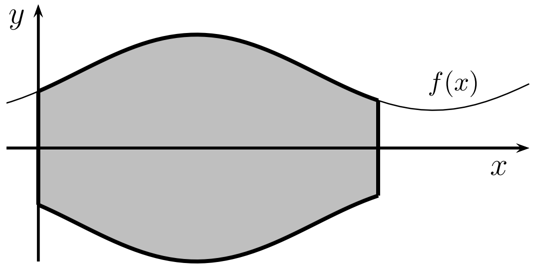
Aufgabe 36

Es soll ein Drehteil angefertigt werden. Die obere Kontur des Drehteils wird durch nachfolgende Funktion (in der Einheit Millimeter) dargestellt:



$$f(x) = 50 \cdot \sin\left(0{,}01x - \frac{\pi}{6}\right) + 100$$

Die Länge des Drehteils beträgt 450 mm. Die Funktion ist demnach gültig für:

$$0 \leq x \leq 450\,\text{mm}$$

Gesucht sind folgende Werte:

1. Der größte Durchmesser des Drehteils
2. Der kleinste Durchmesser des Drehteils
3. Die Stellen mit der stärksten Konturänderung
4. Die Steigungswinkel α an diesen Stellen

Lösung:

Zunächst werden die erforderlichen Ableitungen bestimmt.[1]

$$\begin{aligned}
f(x) &= 50 \cdot \sin\left(0{,}01x - \frac{\pi}{6}\right) + 100 \\
f'(x) &= 50 \cdot 0{,}01 \cdot \cos\left(0{,}01x - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= 0{,}5 \cdot \cos\left(0{,}01x - \frac{\pi}{6}\right) \\
f''(x) &= 0{,}5 \cdot 0{,}01 \cdot \left(-\sin\left(0{,}01x - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= -0{,}005 \cdot \sin\left(0{,}01x - \frac{\pi}{6}\right) \\
f'''(x) &= -0{,}005 \cdot 0{,}01 \cdot \cos\left(0{,}01x - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= -0{,}000\,05 \cdot \cos\left(0{,}01x - \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

zu 1 und 2: Notwendige Bedingung für ein Extremum ist Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned}
f'(x_E) &= 0 \\
0{,}5 \cdot \cos\left(0{,}01x_E - \frac{\pi}{6}\right) &= 0 \qquad |\cdot 2 \\
\cos\left(0{,}01x_E - \frac{\pi}{6}\right) &= 0 \qquad |\arccos\ldots \\
0{,}01x_E - \frac{\pi}{6} &= \arccos 0
\end{aligned}$$

Die Kosinusfunktion hat Nullstellen bei $z = k \cdot \pi - \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

[1]Hierfür ist jeweils die Kettenregel notwendig, siehe z. B. hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ablreg.pdf

$$
\begin{aligned}
k\cdot\pi-\frac{\pi}{2} &= 0{,}01x_E-\frac{\pi}{6} && \mid +\frac{\pi}{6}\\
k\cdot\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} &= 0{,}01x_E\\
k\cdot\pi-\frac{\pi}{3} &= 0{,}01x_E && \mid \cdot 100\\
100k\cdot\pi-\frac{100\pi}{3} &= x_E\\
x_E &= 100k\cdot\pi-\frac{100\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten für:

$$
\begin{aligned}
k &= 0 \Rightarrow x_{E0} = 0\cdot 100\pi-\frac{100\pi}{3} = -\frac{100\pi}{3} \approx -104{,}72\\
k &= 1 \Rightarrow x_{E1} = 1\cdot 100\pi-\frac{100\pi}{3} = \frac{200\pi}{3} \approx 209{,}44\\
k &= 2 \Rightarrow x_{E2} = 2\cdot 100\pi-\frac{100\pi}{3} = \frac{500\pi}{3} \approx 523{,}60
\end{aligned}
$$

Nur x_{E1} liegt im zulässigen Bereich $0 \le x \le 450$. Für $k \le 0$ liegen die Nullstellen der Ableitung unterhalb, und für $k \ge 2$ liegen sie oberhalb.

Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann nun geprüft werden, ob bei $x_{E1} = \frac{200\pi}{3}$ ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

$$f''(x_{E1}) = -0{,}005\cdot\sin\left(0{,}01\cdot\frac{200\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = -0{,}005\cdot\sin\frac{\pi}{2} = -0{,}005 < 0$$

Die zweite Ableitung ist **negativ**, bei $x_{E1} = \frac{200\pi}{3}$ liegt also ein **Maximum** vor. Der zugehörige Funktionswert wird bestimmt:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = 50\cdot\sin\left(0{,}01\cdot\frac{200\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+100 = 50\cdot\sin\frac{\pi}{2}+100 = 150$$

Da der x-Wert den **Radius** des Werkstückes darstellt, ist der Durchmesser davon das Doppelte.

$$\boxed{\text{Der größte Durchmesser beträgt: } D_{max} = 300\,\text{mm}}$$

Da im zulässigen Bereich kein Relatives Minimum gefunden wurde, muss es ein „Randextremum“ geben. Daher werden nun die Funktionswerte an den Grenzen des Definitionsbereiches bestimmt.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 50\cdot\sin\left(0{,}01\cdot 0-\frac{\pi}{6}\right)+100 &= 75\\
f(450) &= 50\cdot\sin\left(0{,}01\cdot 450-\frac{\pi}{6}\right)+100 &\approx 62{,}94
\end{aligned}
$$

Da der x-Wert den **Radius** des Werkstückes darstellt, ist der Durchmesser davon das Doppelte.

$$\boxed{\text{Der kleinste Durchmesser beträgt: } D_{min} = 125{,}88\,\text{mm}}$$

zu 3: Die Stellen mit der stärksten Konturänderung liegen bei den **Wendepunkten**. Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
f''(x_W) &= 0 \\
-0{,}005 \cdot \sin\left(0{,}01x_W - \frac{\pi}{6}\right) &= 0 \quad | : (-0{,}005) \\
\sin\left(0{,}01x_W - \frac{\pi}{6}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Die Sinusfunktion hat Nullstellen bei $z = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
0{,}01x_W - \frac{\pi}{6} &= k \cdot \pi && | + \frac{\pi}{6} \\
0{,}01x_W &= k \cdot \pi + \frac{\pi}{6} && |0{,}01 \\
x_W &= 100 \cdot \left(k \cdot \pi + \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Wir erhalten für:

$$\begin{array}{lllllllll}
k = -1 & \Rightarrow & x_{E(-1)} & = & 100 \cdot \left(-1 \cdot \pi + \frac{\pi}{6}\right) & = & \frac{-500\pi}{6} & \approx & -261{,}80 \\
k = 0 & \Rightarrow & x_{E0} & = & 100 \cdot \left(0 \cdot \pi + \frac{\pi}{6}\right) & = & \frac{100\pi}{6} & \approx & 52{,}36 \\
k = 1 & \Rightarrow & x_{E1} & = & 100 \cdot \left(1 \cdot \pi + \frac{\pi}{6}\right) & = & \frac{700\pi}{6} & \approx & 366{,}52 \\
k = 2 & \Rightarrow & x_{E2} & = & 100 \cdot \left(2 \cdot \pi + \frac{\pi}{6}\right) & = & \frac{1\,300\pi}{6} & \approx & 680{,}68
\end{array}$$

Nur die Werte für x_{E0} und x_{E1} liegen im zulässigen Bereich $0 \leq x \leq 450$. Mit Hilfe der dritten Ableitung kann geprüft werden, ob tatsächlich Wendepunkte vorliegen.

$$\begin{aligned}
f'''(x_{E0}) &= -0{,}000\,05 \cdot \cos\left(0{,}01 \cdot \frac{100\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}000\,05 \neq 0 \\
f'''(x_{E1}) &= -0{,}000\,05 \cdot \cos\left(0{,}01 \cdot \frac{700\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}000\,05 \neq 0
\end{aligned}$$

In beiden Fällen ist die dritte Ableitung $\neq 0$, deshalb liegen tatsächlich Wendepunkte vor.

Die Stellen mit der stärksten Konturänderung liegen bei: $\boxed{x_{E1} = \frac{100\pi}{6}}$ und $\boxed{x_{E2} = \frac{700\pi}{6}}$

zu 4: Für den Steigungswinkel α wir die Steigung m benötigt. Diese liefert die erste Ableitung.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \arctan m_1 \\
&= \arctan \left(f' x_{E1}\right) \\
&= \arctan \left(0{,}5 \cdot \cos\left(0{,}01 x_{E1} - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \arctan \left(0{,}5 \cdot \cos\left(0{,}01 \cdot \tfrac{100\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
\alpha_1 &= 26{,}565^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \arctan m_2 \\
&= \arctan f'(x_{E2}) \\
&= \arctan \left(0{,}5 \cdot \cos\left(0{,}01 x_{E2} - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \arctan \left(0{,}5 \cdot \cos\left(0{,}01 \cdot \tfrac{700\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
\alpha_2 &= -26{,}565^\circ
\end{aligned}$$