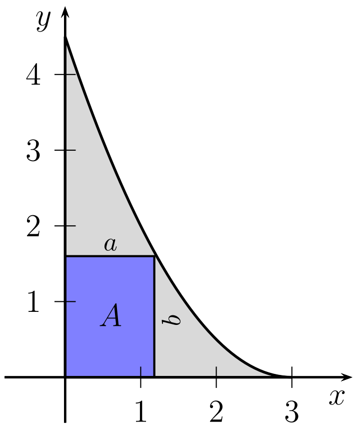
Aufgabe 31

Eine Glasscherbe mit einem rechten Winkel hat eine parabelförmige Bruchkante. Die Parabel hat bei der Nullstelle $x_0 = 3$ ihren Scheitelpunkt und schneidet bei $y_0 = 4{,}5$ die y-Achse. Die Einheit ist dabei Dezimeter. Aus dieser Scherbe soll eine **möglichst große rechteckige Fläche *A*** herausgeschnitten werden, wie nebenstehend dargestellt.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel!

b) Bestimmen Sie die Seitenlängen a und b des optimalen Rechtecks! Gehen Sie dabei von der Funktion $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5$ aus.

c) Wieviel Prozent des Glases fällt dabei als ungenutzter Verschnitt an?

Lösung:

zu a) (Variante 1)

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f'(x) &= 2ax + b \end{aligned}$$

Zwei Bedingungen erhält man aus dem Scheitelpunkt (Tiefpunkt):

$$\begin{array}{lllllrll} (1) & f(3) & = & 0 & \Rightarrow & a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c & = & 0 \\ (2) & f'(3) & = & 0 & \Rightarrow & 2a \cdot 3 + b & = & 0 \end{array}$$

Die dritte Bedingung ergibt sich aus dem y-Achsenabschnitt y_0.

$$\begin{array}{lllllrll} (3) & f(0) & = & 4{,}5 & \Rightarrow & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & 4{,}5 \end{array}$$

Aus dieser Bedingung ergibt sich sofort c.

$$c = 4{,}5$$

Dieser Wert wird in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt.

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & 9a & +3b & +c & = & 0 \\ (2) & 6a & +b & & = & 0 \\ \hline (1) & 9a & +3b & +4{,}5 & = & 0 \\ (2) & 6a & +b & & = & 0 \\ \hline (1) & 9a & +3b & & = & -4{,}5 \\ (2) & 6a & +b & & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems kann Gleichung (2) mir 3 multipliziert werden, dann können die Gleichungen voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & 9a & +3b & = & -4{,}5 & \\ (2) & 6a & +b & = & 0 & | \cdot 3 \\ \hline (1) & 9a & +3b & = & -4{,}5 & |- \\ (2) & 18a & +3b & = & 0 & | \\ \hline & 9a & & = & 4{,}5 & | : 9 \\ & a & & = & 0{,}5 & \end{array}$$

Der Parameter b kann mit Gleichung (2) bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcll} 6a + b & = & 0 & \\ 6 \cdot 0{,}5 + b & = & 0 & \\ 3 + b & = & 0 & | -3 \\ b & = & -3 & \end{array}$$

Hiermit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5}$

zu a) (Variante 2) Alternativ kann die Funktionsgleichung auch über die **Scheitelpunktform** der Funktionsgleichung bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\cdot(x-x_S)^2+y_S\\
f(x) &= a\cdot(x-3)^2+0\\
&= a\cdot(x^2-6x+9)\\
f(x) &= ax^2-6ax+9a
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von a werden die Koordinaten des Schnittpunktes eingesetzt.

$$\begin{aligned}
f(0) &= y_0\\
a\cdot 0^2-6a\cdot 0+9a &= 4{,}5\\
9a &= 4{,}5 \quad |:9\\
a &= 0{,}5
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird in die bisherige Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2-6ax+9a\\
&= 0{,}5x^2-6\cdot 0{,}5x+9\cdot 0{,}5\\
f(x) &= 0{,}5x^2-3x+4{,}5
\end{aligned}$$

zu b) Die **Hauptbedingung** ist die zu optimierende Rechteckfläche.

$$\textbf{HB: } A = a\cdot b$$

Die **Nebenbedingung** ist die Funktionsgleichung, da ja der Eckpunkt rechts oben auf dem Funktionsgraphen liegt.

$$\textbf{NB: } b = f(a) = 0{,}5a^2-3a+4{,}5$$

Die Nebenbedingung ist schon nach b umgestellt und kann daher sofort in die Hauptbedingung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
A &= a\cdot b\\
&= a\cdot(0{,}5a^2-3a+4{,}5)\\
A(a) &= 0{,}5a^3-3a^2+4{,}5a\\
A'(a) &= 1{,}5a^2-6a+4{,}5\\
0 &= 1{,}5a^2-6a+4{,}5 \qquad |:1{,}5\\
0 &= a^2-4a+3\\
a_{1/2} &= 2\pm\sqrt{2^2-3}\\
&= 2\pm 1\\
a_1 = 1 &\qquad a_2 = 3
\end{aligned}$$

Man sollte hier sofort erkennen, dass der Wert $a_2 = 3$ nicht als Lösung in Frage kommt, da damit kein Rechteck zustande kommt. Dann muss geprüft werden, ob tatsächlich ein **Maximum** vorliegt. Das kann am einfachsten mit der 2. Ableitung geprüft werden. Diese muss zunächst gebildet werden.

$$\begin{aligned} A'(a) &= 1{,}5a^2 - 6a + 4{,}5 \\ A''(a) &= 3a - 6 \end{aligned}$$

Der gefundene Wert für a wird nun in die zweite Ableitung eingesetzt. Hat der Schüler $a_2 = 3$ noch nicht ausgeschlossen, muss er dies mit beiden Werten für a machen.

$$\begin{array}{rcccccccl} A''(a_1) & = & 3 \cdot 1 - 6 & = & -3 & < & 0 & \Rightarrow & \text{Maximum bei } a_1 = 1 \\ A''(a_2) & = & 3 \cdot 3 - 6 & = & 3 & > & 0 & \Rightarrow & \text{Minimum bei } a_2 = 3 \end{array}$$

Die gesuchte Lösung liegt also bei $a_1 = 1$. Der zugehörige b-Wert muss noch bestimmt werden. Dazu wird der gefundene a-Wert in die Nebenbedingung eingesetzt.

$$b_1 = f(a_1) = 0{,}5a_1^2 - 3a_1 + 4{,}5 = 0{,}5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 4{,}5 = 2$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $\boxed{a = 1\,\text{dm} \qquad b = 2\,\text{dm}}$

zu c) Hierzu müssen die Rechteckfläche sowie die Gesamtfläche der Glasscherbe bestimmt und zueinander ins Verhältnis gesetzt werden.

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b = 1\,\text{dm} \cdot 2\,\text{dm} = 2\,\text{dm}^2$$

Die Scherbenfläche kann mit einem Integral bestimmt werden.

$$\begin{aligned} A_{\text{Scherbe}} &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \\ &= \int_0^3 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5\,dx \\ &= \left[\frac{0{,}5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4{,}5x\right]_0^3 \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_0^3 \\ &= \left(\frac{1}{6} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 + \frac{9}{2} \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{6} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + \frac{9}{2} \cdot 0\right) \\ &= (4{,}5 - 13{,}5 + 13{,}5) - 0 \\ A_{\text{Scherbe}} &= 4{,}5 \end{aligned}$$

Die Fläche der Scherbe beträgt $A_{\text{Scherbe}} = 4{,}5\,\text{dm}^2$.

Der Verschnitt ist die Differenz zwischen der Scherbenfläche und dem Rechteck.

$$A_{\text{Rest}} = A_{\text{Scherbe}} - A_{\text{Rechteck}} = 4{,}5\,\text{dm}^2 - 2\,\text{dm}^2 = 2{,}5\,\text{dm}^2$$

Hiermit kann der Prozentanteil berechnet werden.

$$p = \frac{A_{\text{Rest}}}{A_{\text{Scherbe}}} \cdot 100\% = \frac{2{,}5\,\text{dm}^2}{4{,}5\,\text{dm}^2} \cdot 100\% \approx 55{,}6\%$$

Der Verschnitt beträgt etwa 55,6%.