# Aufgabe 30

Ein Polynom 4. Grades hat einen Wendepunkt bei $W(1|3)$ und einen Hochpunkt an der Stelle $x_H = 2$. Weiterhin berührt die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_1(x) = -8x$ den Funktionsgraphen der gesuchten Funktion bei $x_b = 0$ als Tangente.

**a)** Ermitteln Sie aus den angegebenen Daten rechnerisch die Funktionsgleichung $f(x)$ der gesuchten Funktion!

**b)** Bestimmen Sie rechnerisch die Tangentengleichung der Wendetangenten $f_2(x)$, die den Funktionsgraphen der gesuchten Funktion im gegebenen Wendepunkt $W(1|3)$ berührt! Gehen Sie bei der Berechnung der Tangentengleichung von der Funktionsgleichung $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x$ aus.

**c)** Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den Funktionsgraphen von $f(x)$ und $f_2(x)$ eingeschlossen wird. Skizzieren Sie vor Beginn der Rechnung den Verlauf von $f(x)$ und $f_2(x)$ mit geeigneten Maßstäben für die $x$- und die $y$-Achse. Markieren Sie die gesuchte Fläche in der Skizze.

**Lösung:**

**Lösung zu a)**
Zunächst wird die Normalform für ein Polynom 4. Grades und die ersten beiden Ableitungen aufgestellt.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

Aus den Angaben zum Wendepunkt ergeben sich zwei Bedingungen, die in Gleichungen umgesetzt werden können.

$$\begin{array}{llcllrcl} (1) & f(1) & = & 3 & \Rightarrow & a\cdot 1^4 + b\cdot 1^3 + c\cdot 1^2 + 1\cdot d + e & = & 3 \\ (2) & f''(1) & = & 0 & \Rightarrow & 12a\cdot 1^2 + 6b\cdot 1 + 2c & = & 0 \end{array}$$

Aus der Angabe zum Hochpunkt ergibt sich eine weitere Bedingung.

$$\begin{array}{llcllrcl} (3) & f'(2) & = & 0 & \Rightarrow & 4a\cdot 2^3 + 3b\cdot 2^2 + 2c\cdot 2 + d & = & 0 \end{array}$$

Die Tangentengleichung bringt zwei Bedingungen.

$$\begin{array}{llcllrcl} (4) & f(0) & = & f_1(0) & \Rightarrow & a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e & = & 0 \\ (5) & f'(0) & = & f_1'(0) & \Rightarrow & 4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2c\cdot 0 + d & = & -8 \end{array}$$

Die 5 Gleichungen können zusammengefasst und vereinfacht werden. Man erhält folgendes Gleichungssystem 5. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrrcl} (1) & a & +b & +c & +d & +e & = & 3 \\ (2) & 12a & +6b & +2c & & & = & 0 \\ (3) & 32a & +12b & +4c & +d & & = & 0 \\ (4) & & & & & e & = & 0 \\ (5) & & & & d & & = & -8 \end{array}}$$

Aus Gleichung (4) und (5) können sofort die Lösungen für $d$ und $e$ abgelesen werden.

$$\boxed{d = -8} \qquad \boxed{e = 0}$$

Die Werte werden in die anderen drei Gleichungen eingesetzt, die Gleichungen werden vereinfacht.

$$\begin{array}{lrrrrrcll} (1) & a & +b & +c & -8 & +0 & = & 3 & \mid +8 \\ (2) & 12a & +6b & +2c & & & = & 0 & \\ (3) & 32a & +12b & +4c & -8 & & = & 0 & \mid +8 \\ \hline (1) & a & +b & +c & & & = & 11 & \\ (2) & 12a & +6b & +2c & & & = & 0 & \\ (3) & 32a & +12b & +4c & & & = & 8 & \end{array}$$

Übrig bleibt ein Gleichungssystem 3. Ordnung. Dieses Gleichungssystem kann mit jedem beliebigen Verfahren gelöst werden. Da hier auch innerhalb der Verfahren verschiedene

Varianten möglich sind, erfolgt hier nur beispielhaft eine Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 6 & 2 \\ 32 & 12 & 4 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-264+16-48+264}{24+64+144-192-24-48} \\
&= \frac{-32}{-32} \\
a &= 1
\end{aligned}
$$

Ergebnis: $\boxed{a=1}$

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 12 & 0 & 2 \\ 32 & 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 6 & 2 \\ 32 & 12 & 4 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{704+96-16-528}{24+64+144-192-24-48} \\
&= \frac{256}{-32} \\
b &= -8
\end{aligned}
$$

Ergebnis: $\boxed{b=-8}$

Der letzte fehlende Parameter $c$ kann beispielsweise aus Gleichung (1) durch Einsetzen der bekannten Werte bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
a+b+c &= 11 \\
1-8+c &= 11 \quad |+7 \\
c &= 18
\end{aligned}
$$

Ergebnis: $\boxed{c=18}$

Damit lautet die gesuchte Funktion: $\boxed{f(x)=x^4-8x^3+18x^2-8x}$

**Lösung zu b)**
Die allgemeine Geradengleichung der Tangenten lautet:

$$f_2(x) = mx + b$$

Zur Bestimmung der Tangentengleichung im Punkt $W(1|3)$ wird die Steigung in diesem Punkt benötigt. Diese wird mit Hilfe der ersten Ableitung bestimmt.

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x - 8$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 4 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 - 8 \\ f'(1) &= 8 \\ m &= 8 \end{aligned}$$

Die Tangentengleichung lautet damit:

$$f_2(x) = 8x + b$$

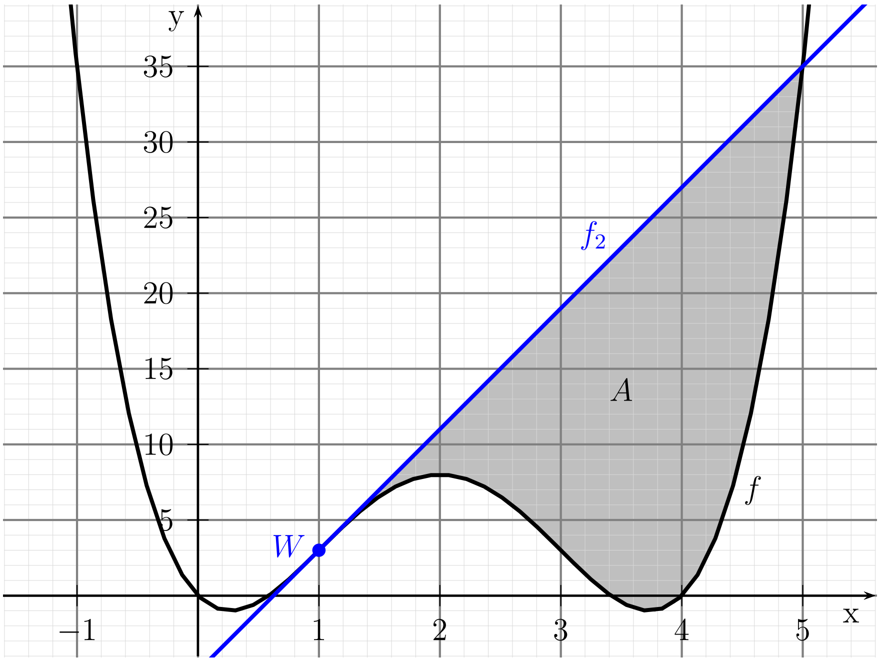
Um den Parameter $b$ zu bestimmen, werden die Koordinaten des Punktes $W(1|3)$ in die Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} y &= 8x + b \\ 3 &= 8 \cdot 1 + b \quad | - 8 \\ -5 &= b \end{aligned}$$

Die Tangentengleichung lautet: $\boxed{f_2(x) = 8x - 5}$

**Lösung zu c)**

Nebenstehend ist der Kurvenverlauf von $f(x)$ und $f_2(x)$ dargestellt.




Um die Fläche berechnen zu können, sind zunächst die Schnittstellen von $f$ und $f_2$ zu bestimmen. Die erste im Wendepunkt bei $x_{S1} = 1$ ist schon bekannt, die andere fehlt noch.

Zur Schnittstellenberechnung werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$$\begin{aligned} f(x_S) &= f_2(x_S) \\ x_S^4 - 8x_S^3 + 18x_S^2 - 8x_S &= 8x_S - 5 \quad | - 8x_S + 5 \\ x_S^4 - 8x_S^3 + 18x_S^2 - 16x_S + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Da eine Gleichung vierten Grades nicht analytisch gelöst werden kann, bietet es sich an, eine Polynomdivision mit der bekannten Nullstelle bei $x_{S1} = 1$ durchzuführen.

$$\begin{array}{rrrrr} (x_S^4 & -8x_S^3 & +18x_S^2 & -16x_S & +5) \; : \; (x_S - 1) \; = \; x_S^3 - 7x_S^2 + 11x_S - 5 \\ -(x_S^4 & -x_S^3) & & & \\ \hline & -7x_S^3 & +18x_S^2 & -16x_S & +5 \\ - & (-7x_S^3 & +7x_S^2) & & \\ \hline & & 11x_S^2 & -16x_S & +5 \\ & - & (11x_S^2 & -11x_S) & \\ \hline & & & -5x_S & +5 \\ & & - & (-5x_S & +5) \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

Es bleibt also noch diese Gleichung zu lösen:

$$x_S^3 - 7x_S^2 + 11x_S - 5 = 0$$

Auch für diese Kubische Gleichung haben wir keine analytische Lösung. Entweder durch planvolles Probieren oder aus Kenntnis der Tatsache, dass die Gerade $f_2$ als Tangente im Wendepunkt eine doppelte Nullstelle ergeben muss, erhält man als weitere Nullstelle:

$$x_{S2} = 1$$

Eine weitere Polynomdivision ist möglich.

$$\begin{array}{rrrrl}
(x_S^3 & -7x_S^2 & +11x_S & -5) & : \ (x_S - 1) \ = \ x_S^2 - 6x_S + 5 \\
-(x_S^3 & -x_S^2) & & & \\
\hline
& -6x_S^2 & +11x_S & -5 & \\
- & (-6x_S^2 & +6x_S) & & \\
\hline
& & 5x_S & -5 & \\
& & -(5x_S & -5) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

Dieser Restterm kann nun mit der p-q-Formel untersucht werden.

$$\begin{aligned}
x_S^2 - 6x_S + 5 &= 0 \\
x_{S3/S4} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\
x_{S3/S4} &= 3 \pm 2 \\
x_{S3} = 1 \qquad & x_{S4} = 5
\end{aligned}$$

Damit haben wir genau zwei **verschiedene** Schnittstellen erhalten, die die Integrationsgrenzen darstellen. Die Fläche kann berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int\limits_{x_{S1}}^{x_{S4}} f_2(x) - f(x)\ dx \\
&= \int\limits_1^5 (8x-5) - \left(x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x\right)\ dx \\
&= \int\limits_1^5 -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 16x - 5\ dx \\
&= \left[-\frac{1}{5}x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 5x\right]_1^5 \\
&= \left(-\frac{1}{5}\cdot 5^5 + 2\cdot 5^4 - 6\cdot 5^3 + 8\cdot 5^2 - 5\cdot 5\right) - \left(-\frac{1}{5}\cdot 1^5 + 2\cdot 1^4 - 6\cdot 1^3 + 8\cdot 1^2 - 5\cdot 1\right) \\
&= 50 - (-1{,}2) \\
A &= 51{,}2
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt: $\boxed{A = 51{,}2\,\text{FE}}$