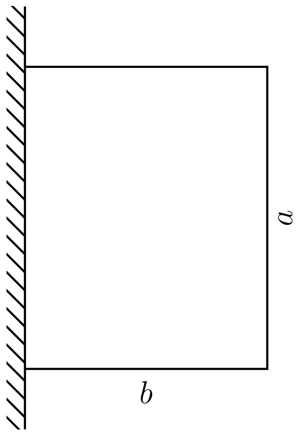
Aufgabe 3

An ein bereits errichtetes Haus soll ein Lagerraum mit rechteckigem Grundriss und einem Flachdach angebaut werden. Der Raum soll 2,5 Meter hoch sein und eine Grundfläche von $12\,\mathrm{m}^2$ haben.

Bestimmen Sie die Länge a und die Breite b so, dass möglichst geringe Kosten entstehen.

Folgende Kosten entstehen im einzelnen für nachfolgend aufgelistete Posten:



Grundriss des Lagers

- Dach und Bodenplatte von zusammen für 250,- € je m^2
- Wände mit 76,80 € je m^2
- Befestigung des Daches an der Hauswand einschließlich Abdichtung mit 8,- € je laufendem Meter
- Türdurchbruch einschließlich Tür in der bereits bestehenden Hauswand von 850,- €

Bestimmen Sie die optimalen Werte für die Länge a und die Breite b sowie die Gesamtkosten K.

Lösung:

Hauptbedingung:

$$\begin{aligned}
K &= \overbrace{12\,\mathrm{m}^2 \cdot 250\frac{€}{\mathrm{m}^2}}^{\text{Dach + Boden}} + \overbrace{(a+2b)\cdot 2,5\,\mathrm{m}\cdot 76,8\frac{€}{\mathrm{m}^2}}^{\text{Wände}} + \overbrace{a\cdot 8\frac{€}{\mathrm{m}}}^{\text{Dachbef.}} + \overbrace{850\,€}^{\text{Tür}} \\
&= 3000\,€ + 192\frac{€}{\mathrm{m}}a + 384\frac{€}{\mathrm{m}}b + 8\frac{€}{\mathrm{m}}a + 850€ \\
K &= 200\frac{€}{\mathrm{m}}a + 384\frac{€}{\mathrm{m}}b + 3850\,€
\end{aligned}$$

Nebenbedingung:

$$\begin{aligned}
a\cdot b &= A \\
a\cdot b &= 12\,\mathrm{m}^2 \\
b &= \frac{12\,\mathrm{m}^2}{a}
\end{aligned}$$

Einsetzen der umgestellten Nebenbedingung in die Hauptbedingung:

$$\begin{aligned}
K(a) &= 200\frac{€}{\mathrm{m}}a + 384\frac{€}{\mathrm{m}}\frac{12\,\mathrm{m}^2}{a} + 3850\,€ \\
K(a) &= 200\frac{€}{\mathrm{m}}a + 4608\frac{€\mathrm{m}}{a} + 3850\,€ \\
K(a) &= 200\frac{€}{\mathrm{m}}a + 4608€\mathrm{m}a^{-1} + 3850\,€ \\
K'(a) &= 200\frac{€}{\mathrm{m}} - 4608€\mathrm{m}a^{-2} \\
K'(a) &= 200\frac{€}{\mathrm{m}} - \frac{4608€\mathrm{m}}{a^2} \\
0 &= 200\frac{€}{\mathrm{m}} - \frac{4608€\mathrm{m}}{a^2} \qquad \Big|\cdot\frac{a^2\mathrm{m}}{€} \\
0 &= 200a^2 - 4608\,\mathrm{m}^2 \quad |+4608\,\mathrm{m}^2 \\
4608\,\mathrm{m}^2 &= 200a^2 \quad |:200 \\
23,04\,\mathrm{m}^2 &= a^2 \quad |\sqrt{\ } \\
a_{1/2} &= \pm 4,8\,\mathrm{m} \\
a_1 = 4,8\,\mathrm{m} & \qquad a_2 = -4,8\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Der negative Wert $a_2 = -4,8\,\mathrm{m}$ entfällt, es bleibt: $\boxed{a_1 = 4,8\,\mathrm{m}}$

Mit Hilfe der zweiten Ableitung erfolgt die Prüfung, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt.

$$\begin{aligned}
K'(a) &= 200\frac{€}{\mathrm{m}} - 4608€\mathrm{m}a^{-2} \\
K''(a) &= 9216€\mathrm{m}a^{-3} \\
K''(a) &= \frac{9216€\mathrm{m}}{a^3} \\
K''(4,8\,\mathrm{m}) &= \frac{9216€\mathrm{m}}{(4,8\,\mathrm{m})^3} \\
K''(4,8\,\mathrm{m}) &= \frac{250€}{3\,\mathrm{m}^2} \approx 83,3\frac{€}{\mathrm{m}^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}
\end{aligned}$$

Die fehlenden Werte b und K werden berechnet:

$$b = \frac{12\,\mathrm{m}^2}{a} = \frac{12\,\mathrm{m}^2}{4,8\,\mathrm{m}} = 2,5\,\mathrm{m}$$

$$K = 200\frac{€}{\mathrm{m}}a + 4608\frac{€\mathrm{m}}{a} + 3850\,€ = 200\frac{€}{\mathrm{m}}4,8m + 4608\frac{€\mathrm{m}}{4,8m} + 3850\,€ = 5770€$$