

Aufgabe 28

In nebenstehender Wechselstrom-Schaltung sind folgende Werte bekannt:

$$\underline{R}_1 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$\underline{R}_2 = 1 \text{ k}\Omega$$

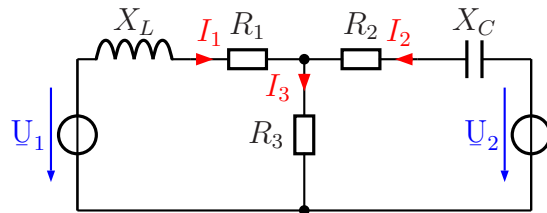
$$\underline{R}_3 = 1 \text{ k}\Omega$$

$$\underline{X}_L = j3 \text{ k}\Omega$$

$$\underline{X}_C = -j3 \text{ k}\Omega$$

$$\underline{U}_1 = 12 \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = j12 \text{ V}$$



Die Schaltung kann zur Berechnung der Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 mit diesem komplexen Gleichungssystem beschrieben werden:

$$\begin{array}{l} (1) \quad (\underline{X}_L + \underline{R}_1 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_1 \quad + \underline{R}_3 \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_1 \\ (2) \quad \underline{R}_3 \cdot \underline{I}_1 \quad + (\underline{X}_C + \underline{R}_2 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \end{array}$$

- Berechnen Sie damit die Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 !
- Bestimmen Sie die Beträge der Ströme I_1 , I_2 und I_3 !

Lösung:

Die bekannten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{l} (1) \quad (j3 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1 + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 = 12 \text{ V} \\ (2) \quad 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_1 + (-j3 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_2 = j12 \text{ V} \end{array}$$

Die Klammerausdrücke können noch etwas zusammengefasst werden.

$$\begin{array}{l} (1) \quad (j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1 + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 = 12 \text{ V} \\ (2) \quad 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_1 + (-j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_2 = j12 \text{ V} \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann nun mit jedem beliebigen Lösungsverfahren aufgelöst werden.

Ich führe als Beispiel die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel durch.

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 12 \text{ V} & 1 \text{ k}\Omega \\ j12 \text{ V} & -j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega & 1 \text{ k}\Omega \\ 1 \text{ k}\Omega & -j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega \end{vmatrix}} \\ &= \frac{12 \text{ V} \cdot (-j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) - j12 \text{ V} \cdot 1 \text{ k}\Omega}{(j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot (-j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) - 1 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ k}\Omega} \\ &= \frac{-j36 \text{ k}\Omega\text{V} + 24 \text{ k}\Omega\text{V} - j12 \text{ k}\Omega\text{V}}{9 \text{ k}\Omega^2 + j6 \text{ k}\Omega^2 - j6 \text{ k}\Omega^2 + 4 \text{ k}\Omega^2 - 1 \text{ k}\Omega^2} \\ &= \frac{-j48 \text{ k}\Omega\text{V} + 24 \text{ k}\Omega\text{V}}{12 \text{ k}\Omega^2} \\ \underline{I}_1 &= 2 \text{ mA} - j4 \text{ mA} \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1) eingesetzt, um \underline{I}_2 zu bestimmen.

$$\begin{aligned} (j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot \underline{I}_1 + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} \\ (j3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega) \cdot (2 \text{ mA} - j4 \text{ mA}) + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} \\ j6 \text{ V} + 12 \text{ V} + 4 \text{ V} - j8 \text{ V} + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} \\ 16 \text{ V} - j2 \text{ V} + 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= 12 \text{ V} & | -16 \text{ V} + j2 \text{ V} \\ 1 \text{ k}\Omega \cdot \underline{I}_2 &= -4 \text{ V} + j2 \text{ V} & | : 1 \text{ k}\Omega \\ \underline{I}_2 &= -4 \text{ mA} + j2 \text{ mA} \end{aligned}$$

Der Strom \underline{I}_3 kann über die Kirchhoffsche Knotenregel am Verbindungspunkt von R_1 , R_2 und R_3 bestimmt werden.

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2 \text{ mA} - j4 \text{ mA} - 4 \text{ mA} + j2 \text{ mA} = -2 \text{ mA} - j2 \text{ mA}$$

Die zugehörigen **Beträge** müssen noch berechnet werden:

$$I_1 = \sqrt{(\text{Re } \underline{I}_1)^2 + (\text{Im } \underline{I}_1)^2} = \sqrt{(2 \text{ mA})^2 + (-4 \text{ mA})^2} \approx 4,472 \text{ mA}$$

$$I_2 = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{I}_2)^2 + (\operatorname{Im} \underline{I}_2)^2} = \sqrt{(-4 \text{ mA})^2 + (2 \text{ mA})^2} \approx 4,472 \text{ mA}$$

$$I_3 = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{I}_3)^2 + (\operatorname{Im} \underline{I}_3)^2} = \sqrt{(-2 \text{ mA})^2 + (-2 \text{ mA})^2} \approx 2,828 \text{ mA}$$

Zusammengefasste Ergebnisse:

$$\underline{I}_1 = 2 \text{ mA} - j4 \text{ mA}$$

$$I_1 \approx 4,472 \text{ mA}$$

$$\underline{I}_2 = -4 \text{ mA} + j2 \text{ mA}$$

$$I_2 \approx 4,472 \text{ mA}$$

$$\underline{I}_3 = -2 \text{ mA} - j2 \text{ mA}$$

$$I_3 \approx 2,828 \text{ mA}$$