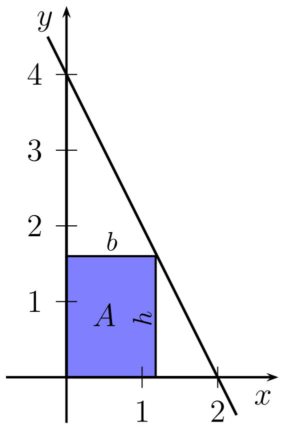
Aufgabe 25



Die Gerade der Linearen Funktion $f(x)$ schneidet die x-Achse bei $x_0 = 2$ und die y-Achse bei $y_0 = 4$. Unter der Geraden soll ein möglichst großes Rechteck mit der Breite b und der Höhe h angelegt werden, wie in der Skizze nebenstehend dargestellt.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Geraden!

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differenzialrechnung die Breite b und die Höhe h des optimalen Rechteckes.

c) Wie groß wird damit die gesuchte Rechteckfläche?

Lösung:

a)

$$f(x) = mx + b$$

$$b = y_0 = 4$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_0 - 0}{0 - x_0} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\text{Ergebnis: } \boxed{f(x) = -2x + 4}$$

b)

$$\underline{\text{Hauptbedingung:}}\ A = b \cdot h$$

Die Nebenbedingung ist ganz einfach durch die Funktionsgleichung gegeben.

$$\begin{array}{rrcl} \underline{\text{Nebenbedingung:}} & h & = & f(b) \\ & h & = & -2 \cdot b + 4 \end{array}$$

Die Nebenbedingung muss nicht mehr umgestellt werden, sie kann sofort in die Hauptbedingung eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll} A & = & b \cdot (-2 \cdot b + 4) & \\ A(b) & = & -2b^2 + 4b & \\ A'(b) & = & -4b + 4 & \\ A''(b) & = & -4 & \\ A'(b_E) & = & 0 & \\ -4b_E + 4 & = & 0 & \quad | - 4 \\ -4b_E & = & -4 & \quad | : (-4) \\ b_E & = & 1 & \end{array}$$

Mit Hilfe der zweiten Ableitung wird geprüft, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt.

$$A''(b_E) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hochpunkt}$$

Die noch fehlende Höhe wird bestimmt:

$$h_E = -2 \cdot b + 4 = -2 \cdot 1 + 4 = 2$$

Die erforderlichen Maße sind: $\boxed{b = 1\,\text{LE}}$ und $\boxed{h = 2\,\text{LE}}$

c) Hiermit ergibt sich die Rechteckfläche:

$$A = b \cdot h = 1 \cdot 2 = 2$$

Die Rechteckfläche hat eine Größe von: $\boxed{A = 2\,\text{FE}}$