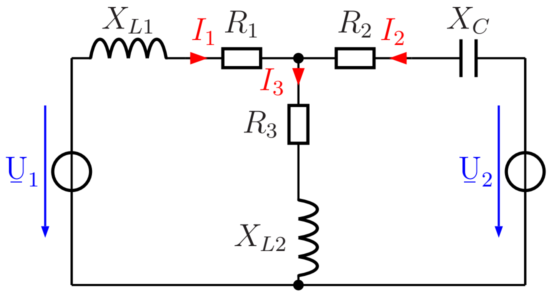
Aufgabe 24

In nebenstehender Wechselstrom-Schaltung sind folgende Werte bekannt:

$\underline{R}_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_{L1} = j4\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_{L2} = j1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_C = -j3\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{U}_1 = 22\,\mathrm{V}$
$\underline{U}_2 = 15\,\mathrm{V}$



Die Schaltung kann zur Berechnung der Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ mit diesem Komplexen Gleichungssystem beschrieben werden:

$$\boxed{\begin{array}{llcl}
(1) & (\underline{X}_{L1} + \underline{R}_1 + \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_1 \quad + (\underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\
(2) & (\underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_1 \quad + (\underline{X}_C + \underline{R}_2 + \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_2
\end{array}}$$

a) Berechnen Sie damit die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$!
b) Bestimmen Sie die Beträge der Ströme I_1, I_2 und I_3!

Lösung:

Zur Lösung werden zunächst die bekannten Werte in das Gleichungssystem eingesetzt.

$$\begin{array}{lrrcl}
(1) & (\underline{X}_{L1} + \underline{R}_1 + \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\
(2) & (\underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{X}_C + \underline{R}_2 + \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2}) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_2 \\
\hline
(1) & (j4\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega} + j1\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & +(2\,\mathrm{k\Omega} + j1\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & 22\,\mathrm{V} \\
(2) & (2\,\mathrm{k\Omega} + j1\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & +(-j3\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega} + j1\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & 15\,\mathrm{V} \\
\hline
(1) & (3\,\mathrm{k\Omega} + j5\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & +(2\,\mathrm{k\Omega} + j1\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & 22\,\mathrm{V} \\
(2) & (2\,\mathrm{k\Omega} + j1\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & +(3\,\mathrm{k\Omega} - j2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & 15\,\mathrm{V}
\end{array}$$

Um die Lösung etwas zu vereinfachen, werden ab hier alle Widerstände in Kiloohm, alle Spannungen in Volt und alle Ströme in Milliampere angegeben. Die Einheitenzeichen lasse ich dann weg. Damit sieht das Gleichungssystem so aus:

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl}
(1) & (3 + j5) \cdot \underline{I}_1 & +(2 + j) \cdot \underline{I}_2 & = & 22 \\
(2) & (2 + j) \cdot \underline{I}_1 & +(3 - j2) \cdot \underline{I}_2 & = & 15
\end{array}}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystemes bietet sich kein Lösungsverfahren besonders an. Aus diesem Grund möchte ich es mit drei verschiedenen Lösungsverfahren vorrechnen:

- mit dem **Einsetzungsverfahren**
- mit dem **Additions-/Subtraktionsverfahren**
- mit der **Cramerschen Regel**

Lösungsvariante 1: Einsetzungsverfahren

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl}
(1) & (3 + j5) \cdot \underline{I}_1 & +(2 + j) \cdot \underline{I}_2 & = & 22 \\
(2) & (2 + j) \cdot \underline{I}_1 & +(3 - j2) \cdot \underline{I}_2 & = & 15
\end{array}}$$

Ich löse Gleichung (1) nach $\underline{I}_2$ auf.

$$\begin{aligned}
(3 + j5) \cdot \underline{I}_1 + (2 + j) \cdot \underline{I}_2 &= 22 && | - (3 + j5) \cdot \underline{I}_1 \\
(2 + j) \cdot \underline{I}_2 &= 22 - (3 + j5) \cdot \underline{I}_1 && | : (2 + j) \\
\underline{I}_2 &= \frac{22 - (3 + j5) \cdot \underline{I}_1}{2 + j}
\end{aligned}$$

Dieser Term muss nun in Gleichung (2) eingesetzt werden.

$$
\begin{aligned}
(2+j)\cdot \underline{I}_1 + (3-j2)\cdot \underline{I}_2 &= 15\\
(2+j)\cdot \underline{I}_1 + (3-j2)\cdot \frac{22-(3+j5)\cdot \underline{I}_1}{2+j} &= 15 \quad |\cdot(2+j)\\
(2+j)\cdot(2+j)\cdot \underline{I}_1 + (3-j2)\cdot \Big(22-(3+j5)\cdot \underline{I}_1\Big) &= 15\cdot(2+j)\\
(2+j)\cdot(2+j)\cdot \underline{I}_1 + (3-j2)\cdot 22-(3-j2)\cdot(3+j5)\cdot \underline{I}_1 &= 15\cdot(2+j)\\
(4+j2+j2-1)\cdot \underline{I}_1 + 66 - j44 - (9+j15-j6+10)\cdot \underline{I}_1 &= 30+j15 \quad |-66+j44\\
(3+j4)\cdot \underline{I}_1 - (19+j9)\cdot \underline{I}_1 &= -36+j59\\
3\cdot \underline{I}_1 + j4\cdot \underline{I}_1 - 19\cdot \underline{I}_1 - j9\cdot \underline{I}_1 &= -36+j59\\
(-16-j5)\cdot \underline{I}_1 &= -36+j59 \quad |:(-16-j5)\\
\underline{I}_1 &= \frac{-36+j59}{-16-j5}\\
\underline{I}_1 &= \frac{(-36+j59)\cdot(-16+j5)}{(-16-j5)\cdot(-16+j5)}\\
\underline{I}_1 &= \frac{576-j180-j944-295}{256+25}\\
\underline{I}_1 &= \frac{281-j1\,124}{281}\\
\underline{I}_1 &= 1-j4
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung von $\underline{I}_2$ wird dieses Ergebnis in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= \frac{22-(3+j5)\cdot \underline{I}_1}{2+j}\\
\underline{I}_2 &= \frac{22-(3+j5)\cdot(1-j4)}{2+j}\\
\underline{I}_2 &= \frac{22-(3-j12+j5+20)}{2+j}\\
\underline{I}_2 &= \frac{22-3+j12-j5-20}{2+j}\\
\underline{I}_2 &= \frac{-1+j7}{2+j}\\
\underline{I}_2 &= \frac{(-1+j7)\cdot(2-j)}{(2+j)\cdot(2-j)}\\
\underline{I}_2 &= \frac{-2+j+j14+7}{4+1}\\
\underline{I}_2 &= \frac{5+j15}{5}\\
\underline{I}_2 &= 1+j3
\end{aligned}
$$

Es fehlt nun noch der Komplexe Strom $\underline{I}_3$. Nach der Kirchhoffschen Knotenregel stellt er die Summe aus $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ dar.

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1\,\mathrm{mA} - j4\,\mathrm{mA} + 1\,\mathrm{mA} + j3\,\mathrm{mA} = 2\,\mathrm{mA} - j1\,\mathrm{mA}$$

Zusammengefasste Ergebnisse:

$$\boxed{\underline{I}_1 = 1\,\mathrm{mA} - j4\,\mathrm{mA}} \qquad \boxed{\underline{I}_2 = 1\,\mathrm{mA} + j3\,\mathrm{mA}} \qquad \boxed{\underline{I}_3 = 2\,\mathrm{mA} - j1\,\mathrm{mA}}$$

Neben den Komplexen Strömen sind noch deren **Beträge** gesucht. Diese werden mit dieser Formel berechnet:

$$z = |\underline{z}| = \sqrt{(\mathrm{Re}\underline{z})^2 + (\mathrm{Im}\underline{z})^2}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sqrt{(1\,\mathrm{mA})^2 + (-4\,\mathrm{mA})^2} &\approx& \ 4{,}123\,\mathrm{mA}\\
I_2 &= \sqrt{(1\,\mathrm{mA})^2 + (3\,\mathrm{mA})^2} &\approx& \ 3{,}162\,\mathrm{mA}\\
I_3 &= \sqrt{(2\,\mathrm{mA})^2 + (-1\,\mathrm{mA})^2} &\approx& \ 2{,}236\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe komplett gelöst.

Für die anderen Lösungsvarianten wird jeweils nur der erste Hauptschritt dargestellt.

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl} (1) & (3+j5)\cdot \underline{I}_1 & +(2+j)\cdot \underline{I}_2 & = & 22 \\ (2) & (2+j)\cdot \underline{I}_1 & +(3-j2)\cdot \underline{I}_2 & = & 15 \end{array}}$$

Damit sich beim Subtrahieren die Variable $\underline{I}_2$ aufhebt, werden die Gleichungen mit dem jeweils anderen Koeffizienten von $\underline{I}_2$ multipliziert.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & (3+j5)\cdot \underline{I}_1 & +(2+j)\cdot \underline{I}_2 & = & 22 & |\cdot(3-j2) \\ (2) & (2+j)\cdot \underline{I}_1 & +(3-j2)\cdot \underline{I}_2 & = & 15 & |\cdot(2+j) \\ \hline (1) & (3+j5)\cdot(3-j2)\cdot \underline{I}_1 & +(2+j)\cdot(3-j2)\cdot \underline{I}_2 & = & 22\cdot(3-j2) & \\ (2) & (2+j)\cdot(2+j)\cdot \underline{I}_1 & +(3-j2)\cdot(2+j)\cdot \underline{I}_2 & = & 15\cdot(2+j) & \\ \hline (1) & (9-j6+j15+10)\cdot \underline{I}_1 & +(6-j4+j3+2)\cdot \underline{I}_2 & = & 66-j44 & \\ (2) & (4+j2+j2-1)\cdot \underline{I}_1 & +(6+j3-j4+2)\cdot \underline{I}_2 & = & 30+j15 & \\ \hline (1) & (19+j9)\cdot \underline{I}_1 & +(8-j)\cdot \underline{I}_2 & = & 66-j44 & | \\ (2) & (3+j4)\cdot \underline{I}_1 & +(8-j)\cdot \underline{I}_2 & = & 30+j15 & |- \\ \hline & (16+j5)\cdot \underline{I}_1 & & = & 36-j59 & \end{array}$$

Wir haben eine Lineare Gleichung erhalten, die nun gelöst werden kann.

$$\begin{aligned} (16+j5)\cdot \underline{I}_1 &= 36-j59 \qquad\qquad |:(16+j5) \\ \underline{I}_1 &= \frac{36-j59}{16+j5} \\ \underline{I}_1 &= \frac{(36-j59)\cdot(16-j5)}{(16+j5)\cdot(16-j5)} \\ \underline{I}_1 &= \frac{576-j180-j944-295}{256+25} \\ \underline{I}_1 &= \frac{281-j1\,124}{281} \\ \underline{I}_1 &= 1-j4 \end{aligned}$$

Der Strom $\underline{I}_2$ kann nun analog zur Lösungsvariante 2 durch Einsetzen dieses Ergebnisses für $\underline{I}_1$ in Gleichung (1) oder (2) berechnet werden.

Lösungsvariante 3: Cramersche Regel

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl} (1) & (3+j5)\cdot \underline{I}_1 & +(2+j)\cdot \underline{I}_2 & = & 22 \\ (2) & (2+j)\cdot \underline{I}_1 & +(3-j2)\cdot \underline{I}_2 & = & 15 \end{array}}$$

Das Gleichungssystem befindet sich schon in der Normalform, die Cramersche Regel kann also sofort angesetzt werden.

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 22 & (2+j) \\ 15 & (3-j2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (3+j5) & (2+j) \\ (2+j) & (3-j2) \end{vmatrix}} \\
\underline{I}_1 &= \frac{22 \cdot (3-j2) - 15 \cdot (2+j)}{(3+j5) \cdot (3-j2) - (2+j) \cdot (2+j)} \\
\underline{I}_1 &= \frac{66 - j44 - 30 - j15}{9 - j6 + j15 + 10 - (4 + j2 + j2 - 1)} \\
\underline{I}_1 &= \frac{36 - j59}{9 - j6 + j15 + 10 - 4 - j2 - j2 + 1} \\
\underline{I}_1 &= \frac{36 - j59}{16 + j5} \\
\underline{I}_1 &= \frac{(36 - j59) \cdot (16 - j5)}{(16 + j5) \cdot (16 - j5)} \\
\underline{I}_1 &= \frac{576 - j180 - j944 - 295}{256 + 25} \\
\underline{I}_1 &= \frac{281 - j1\,124}{281} \\
\underline{I}_1 &= 1 - j4
\end{aligned}
$$

Auch hier findet man $\underline{I}_2$ am einfachsten durch Einsetzen analog zur ersten oder zweiten Lösungsvariante.