Aufgabe 23

Gegeben sind die fünf Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -57 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie zunächst die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen, also $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$.

b) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{b}$!

c) Nun soll der Parameter z in $\vec{c}$ so verändert werden, dass die drei Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ **komplanar** werden.

d) Berechnen Sie den Winkel φ, den die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ miteinander bilden!

Lösungen:

Lösung zu a)

Aus den drei Bedingungen für das Aufeinander-senkrecht-Stehen von jeweils zwei Vektoren können drei Gleichungen gebildet werden.

$$\begin{array}{lllllllllll}
\vec{a}\perp\vec{b} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{b} & = & 0 & \Rightarrow & x\cdot(-3) & +(-57)\cdot y & +(-2)\cdot 12 & = & 0\\
\vec{a}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{c} & = & 0 & \Rightarrow & x\cdot(-4) & +(-57)\cdot 6 & +(-2)\cdot z & = & 0\\
\vec{b}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{b}\cdot\vec{c} & = & 0 & \Rightarrow & -3\cdot(-4) & +y\cdot 6 & +12\cdot z & = & 0
\end{array}$$

Die drei Gleichungen werden in die Normalform gebracht. Man erhält ein Lineargleichungssystem, das mit jedem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden kann.

$$\boxed{\begin{array}{llllll}
(1) & -3x & -57y & & = & 24\\
(2) & -4x & & -2z & = & 342\\
(3) & & 6y & +12z & = & -12
\end{array}}$$

Zur Lösung des Gleichungssystemes kommen mehrere Verfahren in Frage.

Lösungsvariante 1: Einsetzungsverfahren

Gleichung (3) wird nach y umgestellt, das Ergebnis wird in beide anderen Gleichungen eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
6y+12z & = & -12 & \mid -12z\\
6y & = & -12-12z & \mid :6\\
y & = & -2-2z &
\end{array}$$

Einsetzen in (1) und (2):

$$\begin{array}{lrcll}
\text{In (1)} & -3x-57\cdot(-2-2z) & = & 24 & \\
\text{In (2)} & -4x-2z & = & 342 & \\
\hline
 & -3x+114+114z & = & 24 & \mid -114\\
 & -4x-2z & = & 342 & \\
\hline
 & -3x+114z & = & -90 & \\
 & -4x-2z & = & 342 &
\end{array}$$

Für den nächsten Reduktionsschritt kommen wieder mehrere Lösungsverfahren in Frage. Ein sinnvolles Verfahren wäre wiederum das Einsetzungsverfahren, indem die zweite Gleichung nach z aufgelöst wird.

$$\begin{array}{rcll}
-4x-2z & = & 342 & \mid +4x\\
-2z & = & 342+4x & \mid :(-2)\\
z & = & -171-2x &
\end{array}$$

Das Ergebnis wird in die andere Gleichung eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
-3x+114z & = & -90 & \\
-3x+114\cdot(-171-2x) & = & -90 & \\
-3x-19\,494-228x & = & -90 & \mid +19\,494\\
-231x & = & 19\,404 & \mid :(-231)\\
x & = & -84 &
\end{array}$$

$$z = -171 - 2x = -171 - 2 \cdot (-84) = -3$$

$$y = -2 - 2z = -2 - 2 \cdot (-3) = 4$$

<u>Lösungsvariante 2:</u> **Cramersche Regel**

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 24 & -57 & 0 & 24 & -57 \\ 342 & 0 & -2 & 342 & 0 \\ -12 & 6 & 12 & -12 & 6 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & -57 & 0 & -3 & -57 \\ -4 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 6 \end{array}\right|} \\
&= \frac{-1\,368 + 288 + 233\,928}{-36 - 2\,736} \\
&= \frac{232\,848}{-2\,772} \\
x &= -84
\end{aligned}$$

Parameter y kann duch Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (1) bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
-3x - 57y &= 24 \\
-3 \cdot (-84) - 57y &= 24 \\
252 - 57y &= 24 \quad | - 252 \\
-57y &= -288 \quad | : (-57) \\
y &= 4
\end{aligned}$$

Parameter z kann duch Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (3) bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
6y + 12z &= -12 \\
6 \cdot 4 + 12z &= -12 \\
24 + 12z &= -12 \quad | - 24 \\
12z &= -36 \quad | : 12 \\
z &= -3
\end{aligned}$$

Zusammengefasst: $\boxed{x = -84 \quad y = 4 \quad z = -3}$

Lösung zu b)

Die Länge eines Vektors ist sein Betrag.

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

Die Länge des Vektors beträgt: $\boxed{\text{13 Längeneinheiten}}$

Lösung zu c)

Zur Überprüfung der Komplanarität gibt es zwei unterschiedliche Ansätze, die zu zwei völlig unterschiedlichen Lösungswegen führen.

Lösungsvariante 1:
Die erste Variante geht von der Definition der Komplanarität aus:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{c} + \mu \cdot \vec{d} &= \vec{e} \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ z \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hierzu kann man die Komponentengleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{cccccc} (1) & \lambda \cdot (-4) & +\mu \cdot 1 & = & 0 \\ (2) & \lambda \cdot 6 & +\mu \cdot (-3) & = & -1 \\ (3) & \lambda \cdot z & +\mu \cdot 5 & = & 4 \\ \hline (1) & -4\lambda & +\mu & = & 0 \\ (2) & 6\lambda & -3\mu & = & -1 \\ (3) & \lambda \cdot z & +5\mu & = & 4 \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach μ umgestellt:

$$\begin{aligned} -4\lambda + \mu &= 0 \quad | + 4\lambda \\ \mu &= 4\lambda \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt.

$$\begin{array}{ccccc} \text{In } (2) & 6\lambda & -3 \cdot 4\lambda & = & -1 \\ \text{In } (3) & \lambda \cdot z & +5 \cdot 4\lambda & = & 4 \\ \hline (2a) & 6\lambda & -12\lambda & = & -1 \\ (3a) & \lambda \cdot z & +20\lambda & = & 4 \\ \hline \end{array}$$

Aus Gleichung (2a) kann λ berechnet werden.

$$\begin{aligned} 6\lambda \quad -12\lambda &= \quad -1 \\ -6\lambda &= -1 \quad | : (-6) \\ \lambda &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (3a) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot z + 20\lambda &= 4 \\ \frac{1}{6} \cdot z + 20 \cdot \frac{1}{6} &= 4 \quad | \cdot 6 \\ z + 20 &= 24 \quad | - 20 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

Lösungsvariante 2:
In dieser Lösungsvariante nutzt man den Lehrsatz aus:

$$\vec{c},\ \vec{d}\text{ und }\vec{e}\text{ komplanar} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\vec{c},\vec{d},\vec{e}\right)=0$$

Diese Determinante wird aufgestellt und gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{c},\vec{d},\vec{e}\right) &= 0\\
\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0\\ 6 & -3 & -1\\ z & 5 & 4 \end{vmatrix} &= 0\\
\left|\begin{array}{ccc} -4 & 1 & 0\\ 6 & -3 & -1\\ z & 5 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{cc} -4 & 1\\ 6 & -3\\ z & 5 \end{array} &= 0\\
48-z-20-24 &= 0\\
4 &= z
\end{aligned}$$

Ergebnis in beiden Varianten: $\boxed{z=4}$

Lösung zu d)

Die Bestimmung des Winkels φ kann mit Hilfe des nachfolgenden Lehrsatzes erfolgen.

$$\begin{aligned}
\left|\vec{d}\right|\cdot|\vec{e}|\cdot\cos\varphi &= \vec{d}\cdot\vec{e}\\
\left|\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\cos\varphi &= \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}\\
\sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+4^2}\cdot\cos\varphi &= 1\cdot 0+(-3)\cdot(-1)+5\cdot 4\\
\sqrt{35}\cdot\sqrt{17}\cdot\cos\varphi &= 23\\
\cos\varphi &= \frac{23}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{17}}\\
\varphi &= \arccos\frac{23}{\sqrt{595}}\\
\varphi &\approx 19{,}454^\circ
\end{aligned}$$

Zusammengefasst: $\boxed{\varphi\approx 19{,}454^\circ}$