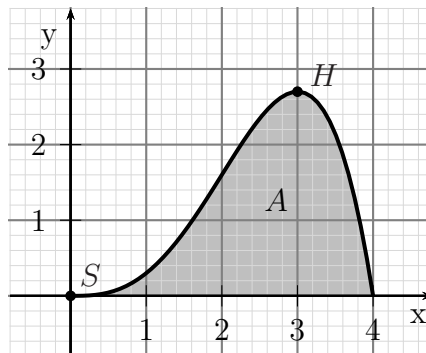


Aufgabe 21

Eine Kinderrutschbahn hat die Form eines Polynoms 4. Grades. Die Rutschbahn hat links am unteren Endpunkt S im Koordinatenursprung einen Sattelpunkt und oben am Startpunkt H einen Hochpunkt. Dieser Hochpunkt liegt 2,70 m über dem Erdboden und waagrecht gemessen 3,00 m vom Endpunkt S entfernt. Rechts vom Hochpunkt sind Treppenstufen eingebaut, damit die Kinder zum Startpunkt hochklettern können. Es wird also auf der rechten Seite nach H hinaufgeklettert, und gerutscht wird dann von H nach S hinunter.



- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Rutsche. Während der Berechnungen können Sie die Einheit *Meter* zur Vereinfachung weglassen.
- An welcher Stelle (horizontale Entfernung vom Endpunkt S und Höhe über dem Erdboden) hat die Rutschbahn ihre steilste Stelle? Wie groß ist dort ihre Steigung? Gehen Sie dabei von der Funktionsgleichung $f(x) = -0,1x^4 + 0,4x^3$ aus.
- Berechnen Sie die markierte Fläche A , die unter der kompletten Rutsche liegt. Hier soll eine Stützmauer errichtet werden, die die Rutsche trägt.

Anmerkung: Die rechte Begrenzung der Fläche kann nicht aus der Skizze **abgelesen** werden, sie muss **berechnet** werden!

Lösung Teil a)

Zunächst wird das Polynom 4. Grades sowie seine ersten beiden Ableitungen in Normalform aufgestellt.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c\end{aligned}$$

Nun können die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umgesetzt werden. Der Sattelpunkt $S(0|0)$ führt zu folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}(1) \quad f(0) &= 0 \Rightarrow a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0 \Rightarrow e = 0 \\(2) \quad f'(0) &= 0 \Rightarrow 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0 \\(3) \quad f''(0) &= 0 \Rightarrow 12a \cdot 0^2 + 6b \cdot 0 + 2c = 0 \Rightarrow c = 0\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse können sofort in die Funktion und die erste Ableitung eingesetzt werden. Mit der zweiten Ableitung ginge das zwar auch, das ist aber nicht erforderlich.

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^4 + bx^3 \\f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2\end{aligned}$$

Der Hochpunkt bei $H(3|2,7)$ führt zu zwei weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned}(4) \quad f(3) &= 2,7 \Rightarrow a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 = 2,7 \\(5) \quad f'(3) &= 0 \Rightarrow 4a \cdot 3^3 + 3b \cdot 3^2 = 0\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man dieses Lineargleichungssystem:

$$\boxed{\begin{array}{l} (4) \quad 81a + 27b = 2,7 \\ (5) \quad 108a + 27b = 0 \end{array}}$$

Dieses Gleichungssystem kann am einfachsten mit dem Subtraktionsverfahren, aber auch mit jedem beliebigen anderen Verfahren gelöst werden.

$$\begin{array}{r} (4) \quad 81a + 27b = 2,7 \quad | - \\ (5) \quad 108a + 27b = 0 \quad | \\ \hline \quad \quad 27a \quad \quad = -2,7 \quad | : 27 \\ \quad \quad \quad a \quad \quad = -0,1 \end{array}$$

Das Ergebnis kann in (4) oder (5) eingesetzt werden, um b zu bestimmen. Ich führe dies mit Gleichung (5) durch.

$$\begin{aligned}108a + 27b &= 0 \\108 \cdot (-0,1) + 27b &= 0 \\-10,8 + 27b &= 0 \quad | + 10,8 \\27b &= 10,8 \quad | : 27 \\b &= 0,4\end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet damit: $f(x) = -0,1x^4 + 0,4x^3$

Lösung Teil b)

Die steilste Stelle liegt im Wendepunkt. Zur Wendepunktbestimmung wird die zweite und dritte Ableitung benötigt.

$$\begin{aligned}f(x) &= -0,1x^4 + 0,4x^3 \\f'(x) &= -0,4x^3 + 1,2x^2 \\f''(x) &= -1,2x^2 + 2,4x \\f'''(x) &= -2,4x + 2,4\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist das Nullwerden der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}f''(x_w) &= 0 \\-1,2x_w^2 + 2,4x_w &= 0 \quad | \cdot (-1,2) \\x_w^2 - 2x_w &= 0 \\x_w \cdot (x_w - 2) &= 0\end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}x_{w1} &= 0 \\x_{w2} &= 2\end{aligned}$$

An der Stelle $x_{w1} = 0$ liegt der vorgegebene Sattelpunkt. In Frage kommt also nur noch $x_{w2} = 2$. Dieser Punkt liegt im Bereich der Rutschbahn. Ob dort tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, kann mit der dritten Ableitung geprüft werden.

$$f'''(2) = -2,4 \cdot 2 + 2,4 = -2,4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{w2} = 2$$

Der zugehörige y -Wert wird bestimmt:

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = -0,1 \cdot 2^4 + 0,4 \cdot 2^3 = 1,6$$

Wendepunkt bei: **W(2|1,6)**

Die zugehörige Steigung liefert die 1. Ableitung:

$$m = f'(x_{w2}) = -0,4 \cdot 2^3 + 1,2 \cdot 2^2 = 1,6$$

Die steilste Stelle liegt 2 Meter vom Endpunkt entfernt in 1,6 Metern Höhe mit einer Steigung von 1,6.

Lösung Teil c)

Die Fläche kann mit einem Integral bestimmt werden. Dazu müssen zunächst die Nullstellen der Funktion berechnet werden, denn sie stellen die Integrationsgrenzen dar. Die untere Grenze ist mit $x_{01} = 0$ ist zwar schon bekannt, weil dort ein Sattelpunkt gegeben ist, aber die obere Grenze x_{02} fehlt noch. Zur Berechnung wird die Funktion gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -0,1x_0^4 + 0,4x_0^3 &= 0 \quad | : (-0,1) \\ x_0^4 - 4x_0^3 &= 0 \\ x_0^3 \cdot (x_0 - 4) &= 0 \\ x_{01} &= 0 \\ x_{02} - 4 &= 0 \quad | + 4 \\ x_{02} &= 4 \end{aligned}$$

Mit $x_{01} = 0$ und $x_{02} = 4$ als Integrationsgrenzen kann die gesuchte Fläche unter der Kurve als Integral bestimmt werden.

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_{01}}^{x_{02}} f(x) \, dx \\ &= \int_0^4 -0,1x^4 + 0,4x^3 \, dx \\ &= [-0,02x^5 + 0,1x^4]_0^4 \\ &= (-0,02 \cdot 4^5 + 0,1 \cdot 4^4) - (-0,02 \cdot 0^5 + 0,1 \cdot 0^4) \\ A &= 5,12 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt: $A = 5,12 \text{ m}^2$