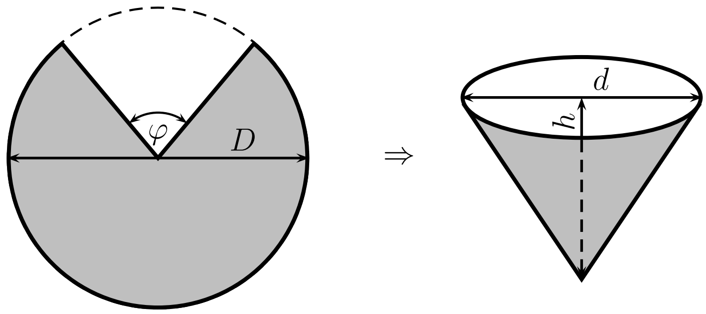
Aufgabe 2

Aus einem kreisförmigen Blechstück mit dem Durchmesser D wird ein Sektor herausgeschnitten. Die Schnittkanten des verbleibenden Blechstückes werden zusammengefügt, so dass ein oben offener Kegel entsteht.



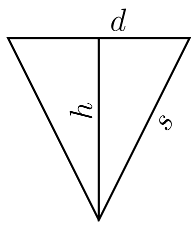
a) Welche Höhe h und welchen Durchmesser d muss dieser Kegel erhalten, damit das Volumen des Kegels möglichst groß wird?

b) Wie groß ist der Winkel φ des ausgeschnittenen Kreissektors?

Erwartete Schülerleistung:

Teil a) Für die Berechnung des Kegelvolumens V steht folgende Formel zur Verfügung:

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$$



Benennt man die Länge der Seitenlinie des Kegels von der Spitze bis zum kreisförmigen Rand mit s, dann gibt der Satz des Pythagoras einen Zusammenhang zwischen d, h und s an:

$$s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

Aus der Konstruktionsbeschreibung ergibt sich, dass die Seitenlänge s der Radius der ursprünglichen runden Blechplatte ist, also sein halber Durchmesser $\frac{D}{2}$:

$$s = \frac{D}{2}$$

Hiermit können nun Haupt- und Nebenbedingungen angegeben werden:

$$\begin{aligned} \textbf{HB:} \quad V &= \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h \quad \textcolor{red}{(10)} \\ \textbf{NB:} \quad \left(\frac{D}{2}\right)^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 \quad \textcolor{red}{(10)} \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung wird nach d^2 umgestellt, damit das Ergebnis in die Hauptbedingung eingesetzt werden kann.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{D}{2}\right)^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 \\
\frac{D^2}{4} &= \frac{d^2}{4} + h^2 \qquad | \cdot 4 \\
D^2 &= d^2 + 4h^2 \qquad | - 4h^2 \\
D^2 - 4h^2 &= d^2 \quad (6)
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Hauptbedingung und nach h ableiten:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h \\
V(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot (D^2 - 4h^2) \cdot h \\
V(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 \cdot h - \frac{\pi}{3} \cdot h^3 \\
V'(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 - \pi \cdot h^2 \quad (6)
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 - \pi \cdot h_E^2 \quad | + \pi \cdot h_E^2 \\
\pi \cdot h_E^2 &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 \qquad | : \pi \\
h_E^2 &= \frac{D^2}{12} \qquad | \sqrt{\ } \\
h_{E1/2} &= \pm\sqrt{\frac{D^2}{12}} \\
h_{E1/2} &= \pm\frac{D}{\sqrt{12}} \quad (6)
\end{aligned}$$

Aus praktischen Gründen entfällt die negative Lösung. Übrig bleibt:

$$\boxed{h_E = \frac{D}{\sqrt{12}} \approx 0,288675D}$$

Nun muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt. Dies geschieht am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
V'(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 - \pi \cdot h^2 \\
V''(h) &= -2\pi \cdot h \\
V''(h_E) &= -2\pi \cdot \frac{D}{\sqrt{12}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } h_E = \frac{D}{\sqrt{12}} \quad (6)
\end{aligned}$$

Jetzt fehlt noch der Durchmesser d des Kegels. Zur Berechnung setzen die Schüler das Ergebnis in die umgestellte Nebenbedingung ein.

$$\begin{aligned}
d^2 &= D^2 - 4h^2 \\
d_E^2 &= D^2 - 4\left(\frac{D}{\sqrt{12}}\right)^2 \\
&= D^2 - 4 \cdot \frac{D^2}{12} \\
&= D^2 - \frac{1}{3}D^2 \\
d_E^2 &= \frac{2}{3}D^2 && |\sqrt{\ } \\
d_{E1/2} &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D \quad (6)
\end{aligned}$$

Da Längen stets positiv sind, entfällt die negative Lösung. Es bleibt:

$$\boxed{d_E = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D \approx 0,816497D}$$

Teil b) Der Umfang des Kreises mit dem Durchmesser d am Kegel ist aus konstruktiven Gründen identisch mit dem Bogenstück des Kreissektors der ursprünglichen Blechplatte mit dem Durchmesser D. Da der gesuchte Winkel φ der Winkel am **weggeschnittenen** Sektor, nicht aber am **übriggebliebenen** Sektor ist, gehört zu diesem der Winkel $(360° - \varphi)$.

An der ursprünglichen Blechplatte mit dem Kreissektor verhalten sich die Bogenstücke wie die zugehörigen Winkel. Nennt man das Bogenstück des übriggebliebenen Sektors b und den Umfang des Vollkreises U, dann ergibt sich damit eine Gleichung zur Bestimmung von φ:

$$\begin{aligned}
\frac{b}{U} &= \frac{360° - \varphi}{360°} \\
\frac{\pi \cdot d}{\pi \cdot D} &= \frac{360° - \varphi}{360°} \\
\frac{d}{D} &= \frac{360° - \varphi}{360°} && | \cdot D \cdot 360° \\
360° \cdot d &= (360° - \varphi) \cdot D \\
360° \cdot d &= 360° \cdot D - \varphi \cdot D && | + \varphi \cdot D - 360° \cdot d \\
\varphi \cdot D &= 360° \cdot D - 360° \cdot d \\
\varphi \cdot D &= 360° \cdot (D - d) && | : D \\
\varphi &= \frac{360° \cdot (D - d)}{D}
\end{aligned}$$

Nun kann der gefundene Wert d_E eingesetzt werden, um den Winkel für das optimale Volumen auszurechnen.

$$\varphi_E = \frac{360^\circ \cdot \left(D - \sqrt{\frac{2}{3}}D\right)}{D} = \frac{360^\circ \cdot D \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{D} = 360^\circ \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 66,06^\circ$$

Zusammengefasst:

$$\boxed{\varphi_E \approx 66,06^\circ} \qquad (10)$$