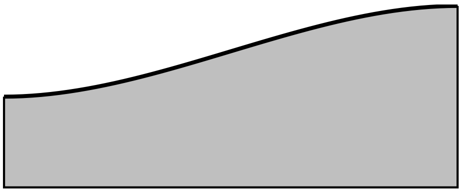
# Aufgabe 16



Auf dem Lüdenscheider Rathausplatz stehen aneinandergereihte Betonsteine zur Dekoration mit der nebenstehend dargestellten Form. Die Steine sind auf der linken Seite 30 cm und auf der rechten Seite 60 cm hoch. Sie sind 1,5 m lang und 20 cm dick. Die Oberkante der Steine wird mit einem Polynom 3. Grades beschrieben. Dieses Polynom hat am linken Rand des Steines einen Tiefpunkt und am rechten einen Hochpunkt.

**a)** Legen Sie in die linke untere Ecke des Betonsteins ein Koordinatenkreuz und bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms. (Verwenden Sie *Dezimeter* als Längeneinheit.)

**b)** Die Masse des Betonsteins soll mit Hilfe der Integralrechnung bestimmt werden. Die Dichte des Betons beträgt $\varrho = 2{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$.

## Lösung:

**a)** Ein Polynom 3. Ordnung hal die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Wegen der beiden Extrema wird auch die erste Ableitung benötigt:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Damit können zum Tiefpunkt und zum Hochpunkt je zwei Bedingungen angegeben werden:

$$\begin{array}{lrcclrcl}
(1) & f(0) & = & 3 & \Rightarrow & a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d & = & 3 \\
(2) & f'(0) & = & 0 & \Rightarrow & 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c & = & 0 \\
(3) & f(15) & = & 3 & \Rightarrow & a \cdot 15^3 + b \cdot 15^2 + c \cdot 15 + d & = & 6 \\
(4) & f'(0) & = & 0 & \Rightarrow & 3a \cdot 15^2 + 2b \cdot 15 + c & = & 0
\end{array}$$

Aus (1) und (2) ergeben sich sofort die Parameter $d$ und $c$.

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & d & = & 3 \\
(2) & c & = & 0
\end{array}$$

Setzt man diese Werte in (3) und (4) ein und stellt die Gleichungen entsprechend um, erhält man ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl}
(3) & 3\,375a & +225b & = & 3 \\
(4) & 675a & +30b & = & 0
\end{array}}$$

Zur Lösung ist natürlich jedes beliebige Lösungsverfahren möglich. Willkürlich wähle ich das **Einsetzungeverfahren**. Dazu stelle ich (4) nach $b$ um und setze den Ergebnisterm in (3) ein.

$$\begin{array}{lrcll}
(4) & 675a + 30b & = & 0 & | - 675a \\
 & 30b & = & -675a & | : 30 \\
 & b & = & -\dfrac{45}{2} \cdot a &
\end{array}$$

Eingesetzt in (3):

$$\begin{array}{lrcll}
(3) & 3\,375a + 225b & = & 3 & \\
 & 3\,375a - 225 \cdot \dfrac{45}{2} \cdot a & = & 3 & \\
 & -\dfrac{3375}{2} \cdot a & = & 3 & | \cdot \left(-\dfrac{2}{3\,375}\right) \\
 & a & = & -\dfrac{2}{1\,125} &
\end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (4) eingesetzt:

$$\begin{aligned} b &= -\frac{45}{2} \cdot a \\ b &= -\frac{45}{2} \cdot \left( -\frac{2}{1\,125} \right) \\ b &= \frac{1}{25} \end{aligned}$$

Hiermit lautet die Funktionsgleichung:

$$\boxed{f(x) = -\tfrac{2}{1\,125} \cdot x^3 + \tfrac{1}{25} \cdot x^2 + 3}$$

**b)** Zunächst wird die Frontfläche des Betonsteins berechnet. Dies geht sofort mit einem bestimmten Integral. Die Integrationsgrenzen sind schon bekannt.

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x)\ dx \\ &= \int_0^{15} -\frac{2}{1\,125} \cdot x^3 + \frac{1}{25} \cdot x^2 + 3\ dx \\ &= \left[ -\frac{1}{2\,250} x^4 + \frac{1}{75} x^3 + 3x \right]_0^{15} \\ &= \left( -\frac{1}{2\,250} \cdot 15^4 + \frac{1}{75} \cdot 15^3 + 3 \cdot 15 \right) - \left( -\frac{1}{2\,250} \cdot 0^4 + \frac{1}{75} \cdot 0^3 + 3 \cdot 0 \right) \\ &= (-22{,}5 + 45 + 45) - (-0 + 0 + 0) \\ A &= 67{,}5\,\mathrm{FE} \end{aligned}$$

Die Frontfläche beträgt $A = 67{,}5\,\mathrm{dm}^2$.

Hiermit und mit der Wandstärke $w = 20\,\mathrm{cm}$ kann damit das Volumen berechnet werden.

$$\begin{aligned} V &= A \cdot w \\ V &= 67{,}5\,\mathrm{dm}^2 \cdot 2\,\mathrm{dm} \\ V &= 135\,\mathrm{dm}^3 \end{aligned}$$

Zum Schluss kann damit die Masse berechnet werden:

$$\begin{aligned} m &= \varrho \cdot V \\ m &= 2{,}0\,\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} \cdot 135\,\mathrm{dm}^3 \\ m &= 270\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Die Masse eines Betonsteines beträgt: $\boxed{m = 270\,\mathrm{kg}}$