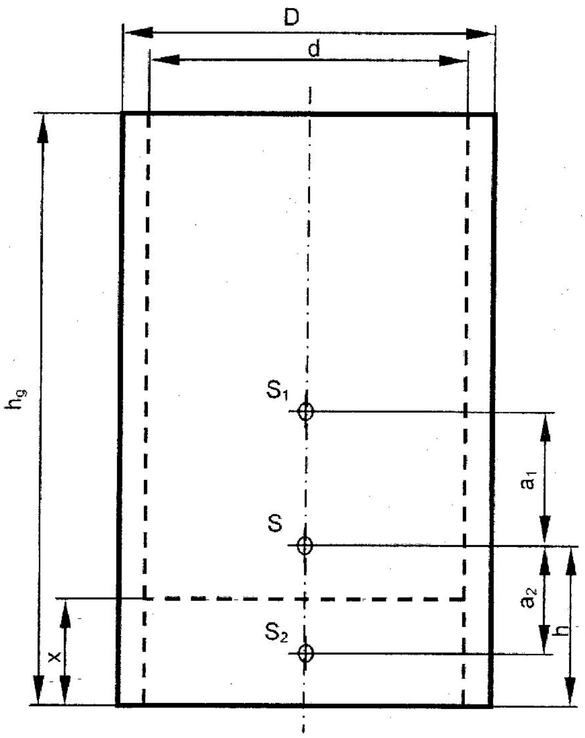
Aufgabe 13

Ein zylindrisches Trinkglas mit einer Höhe von $h_g = 150\,\text{mm}$ hat einen Innendurchmesser von $d = 50\,\text{mm}$ und einen Außendurchmesser von $D = 55\,\text{mm}$. Die Dicke x des Bodens soll so gewählt werden, dass die Standfestigkeit des leeren Glases möglichst hoch wird. Eine hohe Standfestigkeit ist gleichbedeutend mit einem niedrigen Schwerpunkt.



a) Entwickeln Sie eine Funktion, die die Höhe h des Schwerpunktes als Funktion der Bodendicke x angibt!

b) Bestimmen Sie von nachfolgender Funktion das Minimum und geben Sie die Schwerpunkthöhe h für diesen Fall an!

$$h(x) = \frac{x^2 + 4725\,\text{mm}^2}{2x + 63\,\text{mm}}$$

Lösungshinweise:

- Der Schwerpunkt eines **symmetrischen** Körpers liegt in seiner geometrischen Mitte.
- Das Trinkglas lässt sich in **zwei symmetrische** Körper zerlegen.
- Jedem **Teilkörper** kann ein **eigener Schwerpunkt** zugeordnet werden.
- Der Schwerpunkt eines zusammengesetzten Körpers lässt sich mit dem **Hebelgesetz** zu einem **Gesamtschwerpunkt** zusammensetzen. Es sei S_1 der Schwerpunkt des Teilkörpers mit dem Volumen V_1, S_2 der Schwerpunkt des Teilkörpers mit dem Volumen V_2 und S der Gesamtschwerpunkt. Ferner sei a_1 der Abstand zwischen S und S_1 sowie a_2 der Abstand zwischen S und S_2; damit gilt das Hebelgesetz:

$$a_1 \cdot V_1 = a_2 \cdot V_2$$

Lösung:

Der Körper wird in einen Hohlzylinder und einen Zylinder zerlegt. Der Hohlzylinder V_1 hat die Höhe $h_g = 150\,\text{mm}$ sowie den Innen- und Außendurchmesser $d = 50\,\text{mm}$ und $D = 55\,\text{mm}$. Der Zylinder V_2 hat den Duchmesser $d = 50\,\text{mm}$ und die unbekannte Höhe x.[1]

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\pi}{4} \cdot \left(D^2 - d^2\right) \cdot h_g \\
V_2 &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot x \\
a_1 &= \frac{h_g}{2} - h \\
a_2 &= h - \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Die Werte werden ins Hebelgesetz eingesetzt.

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot V_1 &= a_2 \cdot V_2 \\
\left(\frac{h_g}{2} - h\right) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(D^2 - d^2\right) \cdot h_g &= \left(h - \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot x \quad \left| \cdot \frac{4}{\pi}\right. \\
\left(\frac{h_g}{2} - h\right) \cdot \left(D^2 - d^2\right) \cdot h_g &= \left(h - \frac{x}{2}\right) \cdot d^2 \cdot x \\
\frac{h_g^2}{2} \cdot D^2 - \frac{h_g^2}{2} \cdot d^2 - hD^2h_g + hd^2h_g &= hd^2x - \frac{x^2}{2} \cdot d^2 \quad | \cdot 2 \\
h_g^2D^2 - h_g^2d^2 - 2hD^2h_g + 2hd^2h_g &= 2hd^2x - x^2d^2 \quad | - h_g^2D^2 + h_g^2d^2 - 2hd^2x \\
-2hD^2h_g + 2hd^2h_g - 2hd^2x &= -x^2d^2 - h_g^2D^2 + h_g^2d^2 \\
h \cdot \left(-2D^2h_g + 2d^2h_g - 2d^2x\right) &= -x^2d^2 - h_g^2D^2 + h_g^2d^2 \\
h &= \frac{-x^2d^2 - h_g^2D^2 + h_g^2d^2}{-2D^2h_g + 2d^2h_g - 2d^2x} \\
h(x) &= \frac{-2500\,\text{mm}^2x^2 - 68062500\,\text{mm}^4 + 56250000\,\text{mm}^4}{-907500\,\text{mm}^3 + 750000\,\text{mm}^3 - 5000\,\text{mm}^2x} \\
h(x) &= \frac{-x^2 - 4725\,\text{mm}^2}{-2x - 63\,\text{mm}} \\
h(x) &= \frac{x^2 + 4725\,\text{mm}^2}{2x + 63\,\text{mm}}
\end{aligned}$$

[1] Alternativ ist es natürlich auch möglich, den Vollzylinder mit dem Außendurchmesser D **dicker** zu machen und den Hohlzylinder entsprechend um die Hohlzylinderhöhe x **kürzer**. Dabei wird allerdings die Rechnung etwas komplizierter.

Notwendige Bedingung für einen Tiefpunkt ist das Nullwerden der ersten Ableitung. Diese wird mit der **Quotientenregel** bestimmt.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{2x \cdot (2x + 63\,\mathrm{mm}) - (x^2 + 4725\,\mathrm{mm}^2) \cdot 2}{(2x + 63\,\mathrm{mm})^2} \\
h'(x) &= \frac{4x^2 + 2x \cdot 63\,\mathrm{mm} - 2x^2 - 9450\,\mathrm{mm}^2}{(2x + 63\,\mathrm{mm})^2} \\
h'(x) &= \frac{2x^2 + x \cdot 126\,\mathrm{mm} - 9450\,\mathrm{mm}^2}{(2x + 63\,\mathrm{mm})^2} \\
h'(x_E) &= 0 \\
\frac{2x_E^2 + x_E \cdot 126\,\mathrm{mm} - 9450\,\mathrm{mm}^2}{(2x_E + 63\,\mathrm{mm})^2} &= 0 \\
2x_E^2 + x_E \cdot 126\,\mathrm{mm} - 9450\,\mathrm{mm}^2 &= 0 \quad |:2 \\
x_E^2 + x_E \cdot 63\,\mathrm{mm} - 4725\,\mathrm{mm}^2 &= 0 \\
x_{E1/2} &= -31,5\,\mathrm{mm} \pm \sqrt{(31,5\,\mathrm{mm})^2 + 4725\,\mathrm{mm}^2} \\
x_{E1/2} &\approx -31,5\,\mathrm{mm} \pm 75,61\,\mathrm{mm} \\
x_{E1} \approx 44,11\,\mathrm{mm} & \qquad x_{E2} \approx -107,11\,\mathrm{mm}
\end{aligned}$$

Aus logischen Gründen entfällt die Lösung x_{E2}, es bleibt bei $x_E \approx 44,11\,\mathrm{mm}$.

Es muss geprüft werden, ob hier tatsächlich ein Minimum vorliegt.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f'(40\,\mathrm{mm}) & \approx & -0,05917 \\ f'(50\,\mathrm{mm}) & \approx & 0,06963 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} \approx 44,11\,\mathrm{mm}$$

Die Höhe des Schwerpunktes wird für diesen Fall bestimmt.

$$h(x_E) = \frac{x_E^2 + 4725\,\mathrm{mm}^2}{2x_E + 63\,\mathrm{mm}} \approx \frac{(44,11\,\mathrm{mm})^2 + 4725\,\mathrm{mm}^2}{2 \cdot 44,11\,\mathrm{mm} + 63\,\mathrm{mm}} \approx 44,11\,\mathrm{mm}$$

Der Schwerpunkt liegt also genau auf der Oberseite des Glasbodens.